VALSZA'M

DEF

Véletlen jelenség: a rendelkezésre álló adatokból az esemény kimenetele nem mondható meg

Tömegjelenség: jelenség amit akár kísérlet sorozat során is lehet figyelni

Eseménytér: egy véletlen jelenség kimenetelei halmaza
jele: Ω

Esemény: Ω minden részhalmaza, véletlen esemény kimenetele

Diszjunkt: adott A és B halmazok
akkor $A \cap B = \emptyset$ akkor diszjunktak

Szigma-algebra: Legyen $\mathcal{F}$ - Ω részhalmazainak egy gyűjteménye melyre igazak az axiómák: Ω részhalmazai

1) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F}$
2) Ha $A_i \in \mathcal{F} \quad \forall i \in \mathbb{N}$
akkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ és $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
3) Ha $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

Teljes eseményrendszer: $A_1, \dots, A_n$ ha $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$
és $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ kölcsönösen diszjunkt

Relatív gyakoriság: $r_{A,N} := \frac{k_{A,N}}{N}$ $k_{A,N}$ = A hányszor következett be
N-ből elvégzett kísérletben

09.16.

Valóviniűség: Legyen $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ fv

P valóság ha

1, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$

2, legyen A_i, $i \in \mathbb{N}$ események $A_i \in \mathcal{F}$ $\forall i$-re

páronként diszjunktak : $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Valóviniűségi mező: Legyen Ω halmaz, $\mathcal{F}$ σ-algebra mely Ω részhalmazaiból áll és P valóviniűség $\mathcal{F}$-en

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valóségi mező

Klasszikus valóviniűségi mező:

- $|\Omega| = N < \infty$ megszámlálható a elemeinek halmaza
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
- $P(\{\omega\}) = \frac{1}{N}$ $\forall \omega \in \Omega$ minden elemi egyformán valóviniű

Ekkor ha $A \in \Omega$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Geometriai valószíniűségi mező:

Ω_1 = síkidom , $\Omega_2 = [a,b]$, Ω_3 = gömb

$\mathcal{F}_1 = \{$ területtel bíró halmazok$\}$, $\mathcal{F}_2 = \{$hossal bíró halmazok$\}$

$\mathcal{F}_3 = \{$ térfogattal bíró halmazok$\}$

Tfh $\forall$ pont kelléő kerületnek valóségi egyforma

ha $A \in \Omega_1$, $B \subseteq \Omega_2$, $C \subseteq \Omega_3$

$$P(A) = \frac{t(A)}{t(\Omega_1)} \; ; \; P(B) = \frac{h(B)}{h(\Omega_2)} \; ; \; P(C) = \frac{v(C)}{v(\Omega_3)}$$

VALSZA'M DEF 1.

Feltételes valószínűség: Legyen $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$

Akkor egy tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esemény feltételes valószínűsége B-re

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Valószínűségi axióma: Legyen $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$

Akkor $A \in \mathcal{F}$ $P(A|B)$ eleget tesz a valószínűségi axiómáknak

azaz $0 \leq P(A|B) \leq 1$

$P(\Omega|B) = 1$

A_i, $i \in \mathbb{N}$ diszjunktak: akkor $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,|\, B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

Teljes valószínűség: Legyen $B_1, \dots, B_n$ teljes eseményrendszer

$P(B_i) > 0$ $i = 1, \dots, n$

Ekkor Bármely $A \in \mathcal{F}$ esetén

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Bayes tétele: Legyen $B_1, \dots, B_n$ teljes eseményrendszer

$P(B_i) > 0$ $i = 1, \dots, n$

Legyen $A \in \mathcal{F}$: $P(A) > 0$

Ekkor $$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)\,P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

VALSZÁM

Def. 3.

Független: $A, B \in \mathcal{F}$ A független B-től ha $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Valószínűségi változó:

Legyen $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$

Ha $\forall I \subseteq \mathbb{R} : A_I = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in I\} \in \mathcal{F}$

Akkor ξ egydimenziós val. vál. $A_I \in \mathcal{F}$

Diszkrét valószínűségi változó: ÉT $< \infty$ / megszámlálhatóan ∞

Legyen $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$; $R_\xi = \{x_1, x_2, \dots\} < \infty$ / megszámlálhatóan ∞

ha $\forall i \in \mathbb{N}$:

$A_i := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}$

Akkor ξ diszkrét val. vál.

Eloszlás: Legyen ξ val. vál. : $R(\xi) = \{x_1, \dots, x_N\}$ v. $\{x_1, \dots\}$ megszámlálható

Legyen $p_i = P(\xi = x_i)$ $\forall i$-re

Akkor (x_i, p_i) sorozat ξ eloszlása

Ha (x_i, p_i) egy val. vál. eloszlása $\Rightarrow$ x_i-k különbözők

$p_i \geq 0$ $\quad \sum_i p_i = 1$

Bernoulli eloszlás:

$(x_1, p_1) = (1, p)$ akkor $0 < p < 1$

$(x_2, p_2) = (0, 1-p)$

Ha ξ Bernoulli eloszlás $\Rightarrow$ $R(\xi) = \{1, 0\}$

$P(\xi = 1) = p$ $\quad P(\xi = 0) = 1-p$

Binomiális eloszlás:

Legyen $x_0 = 0, \dots, x_n = N$ lehetséges értékek

és $p_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$

$k = 0, \dots, N$ a lehetséges valószínűségek

$p_i \geq 0 \quad \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} = (p + 1 - p)^N = 1$

(N, p) paraméterű Binomiális eloszlás

$R(\xi) = \{0, \dots, N\}$

$P(\xi = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$

$E(X) = n \cdot p \qquad D(X) = \sqrt{np(1-p)} \qquad D^2X = np(1-p)$

Poisson eloszlás

Legyen ξ val. valt. $\lambda > 0$ paraméterű poisson eloszlású

$R(\xi) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ~~$\in \mathbb{N}$~~ $n \in \mathbb{N}$ $p_n \geq 0$

és $p_k = P(\xi = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ $E(X) = \lambda$

$D(X) = \sqrt{\lambda} \quad D^2X = \lambda$

Diszkrét egyenletes eloszlás

ξ N paraméterű d.e.-o.a

ha $R(\xi) = \{x_1, \dots, x_N\}$ $x_1 = 1 \dots x_N = N$

$p_i = \frac{1}{N}$ $i = 1, \dots, N$ ξ eloszlása egyenletes

$P(\xi = k) = \frac{1}{N}$ $k = 1, \dots, N$

Geometriai eloszlás

ξ val. valt. p paraméterű Pascal eloszlású

$R(\xi) = \{1, 2, \dots, n\}$ $n \in \mathbb{N}$ $0 < p < 1$

$p_k = P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$

VALSZA'M

Def 4.

Hipergeometriai eloszlás:

(N, S, n) paraméterű $\exists f$ $k = \xi$ $0 \le \xi \le n$

$R(x) = k$ számok halmaza $k \le S$ $(n-k) \le (N-S)$

$$P(x = \xi) = \frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$\max\{0, N+S\} \le k \le \min\{n, S\}$

$$EX = n\frac{S}{N} \qquad D^2X = n \cdot \frac{S}{N}\left(1 - \frac{S}{N}\right)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

Negatív binomiális:

ℓ paraméter $\in \{1, 2, \dots\}$

$R(\xi) = \{\ell, \ell+1, \dots\}$

$$P(\xi = k) = \binom{k-1}{\ell-1}(1-p)^{k-\ell}p^{\ell} \qquad k = \ell, \dots$$

Szórásnégyzet tul:

1. $D^2X \ge 0$
2. Ha X, Y függetlenek $\cdot D^2(X+Y) = D^2X + D^2Y$
3. $D^2X = E(X^2) - (EX^2) = \sum_i x_i^2 p_i - \left(\sum_i x_i p_i\right)^2$
4. $D^2X = 0 \Rightarrow X = EX$ konstans

Valószínűségi változó:

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ fv

Ha $\forall I \in \mathbb{R}$: $\{\omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{F} \Rightarrow X$ valv'ál

Eloszlás függvény:

Legyen $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valv'ál

$$F_\xi(x) := P(\xi < x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

↳ ξ eloszlás fv-e

Binomiális eloszlás közelítése:

Legyen $0 < p_n < 1$ $\quad np_n = \lambda > 0$ fix

$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad n \to \infty$

Eloszlás fv tulajdonságai: Legyen ξ val.vál $x \mapsto F_\xi(x)$ eloszlásfv

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1 \quad \forall x$
2. monoton nem csökkenő
3. balról folytonos
4. $\lim_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$

Tétel: Ha $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és a fel. igazak akkor $F(x) = F_\xi(x)$ valamely ξ-re

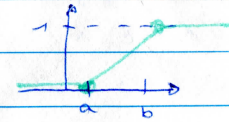
Eloszlás fv-ek:

Exponenciális eloszlás:

Adott $\lambda > 0$ paraméter $\quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$

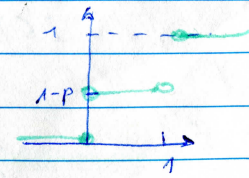
Folytonos egyenletes eloszlás: $a, b \in \mathbb{R}$

$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$



Bernoulli: $0 < p < 1 \quad P(Y=1) = p \quad P(Y=0) = 1-p$

$F_Y(x) = F(Y < x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1-p & 0 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$



Folytonos valószínűségi változó:

Legyen $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ Ha $\exists f_\xi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : \forall I \subseteq \mathbb{R}:$

$P(\xi \in I) = \int f_\xi(u)\,du$ ξ folyt.val.vál f_ξ sűrűségfv.

Várható érték:

Legyen ξ diszkrét val. val. melynek eloszlása (x_i, p_i)

Ha $\sum_i |x_i| p_i < \infty \Rightarrow \xi$ várható értéke

$$E\xi := \sum_i x_i p_i$$

T: Várható érték tulajdonságai:

1) Ha ξ, η valóval

akkor $E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta)$ ha $\exists$

2) $a \in \mathbb{R}$ kötött esetén $b \in \mathbb{R}$ $E(\xi + b) = E(\xi) + b$

$E(a\xi) = a \cdot E(\xi)$ ha $\exists E(\xi)$

3) $(f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $E(f(\xi)) = \sum_i f(x_i) p_i$ ha abs. konv.)

Ha ξ, η függetlenek $\exists E\xi, E\eta \Rightarrow \exists E[\xi \eta]$: $E[\xi, \eta] = E\xi \cdot E\eta$

Momentum:

Legyen x valóál : $m \geq 1 \in \mathbb{R}$

Ha $\exists E|x|^m \Rightarrow x$ m. momentuma (abszolút)

Szóródás négyzet:

Legyen x valóál $\exists Ex^2 < \infty$

$$D^2(x) := E(x - Ex)^2$$

Szórás $Dx := \sqrt{D^2 x}$

Szórás négyzet tulajdonságai:

1) $D^2 x \geq 0$

2) $D^2 x = E(x^2) - (Ex)^2 = \sum_i x_i^2 p_i = \left(\sum_i x_i p_i\right)^2$

3) Ha X és Y független $\Rightarrow D^2(X+Y) = D^2 X + D^2 Y$

Eloszlás függvény:

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val.v.ált eloszlás f-e:

$F_\xi(x) := P(\xi < x) \quad x \in \mathbb{R}$

Folytonos valószínűségi változó:

Legyen $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ val.v.ált

Tfh $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : \forall I \in \mathbb{R} : P(Y \in I) = \int_I f(x)\,dx$

Ekkor Y abs. folyt val.v.ált és f sűrűségfv.

jelö: $f_Y(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f_Y(x)\,dx = 1$$

Sűrűségfv tulajdonságai:

1. Legyen η folyt val.v.ált f_η sűrűségfv-e

Ekkor $F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{y} f_\eta(x)\,dx$ Sűrűségfv meghatározza az eloszlásfv-t.

2. Legyen ξ folyt val.v.ált

Akkor $F_\xi(x)$ folytonos x-ben

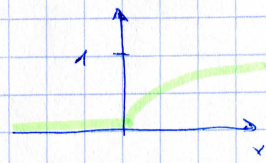
T $f(x) = F_\xi'(x)$ ha $\exists$

$f(x) = 0$ ha $\nexists$

Exponenciális eloszlás

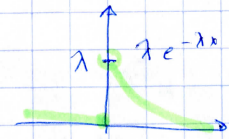
$\lambda > 0$

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$



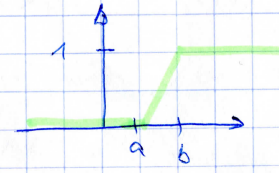
sűrűségfv-e:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

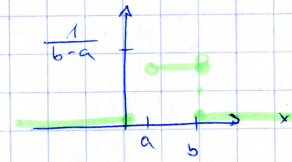


2. Egyenletes eloszlás

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$



$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x < b \\ 0 & x \notin (a,b) \end{cases}$$

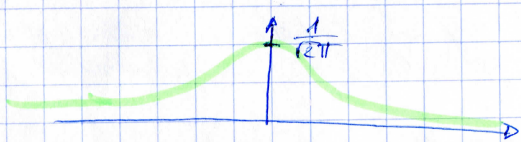


Standard normális (Gauss)

ha ξ valódi sűrűségfv-e: $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$ $x \in \mathbb{R}$

standard normális eloszlású

Ekkor $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-u^2}{2}}\,du$ alakú.



$$f_\xi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$E(x) = 0$ $\quad D(x) = 1$

Cauchy eloszlás

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Várható érték:

Legyen X folyt. valószín. vált. f_X sűrűségfv-e

Ha $\int_{\mathbb{R}} f_X(u)\,|u|\,du < \infty \Rightarrow$ X-nek $\exists$ várható értéke

$$EX := \int_{\mathbb{R}} u\, f_X(u)\,du$$

ha $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fv és $\exists \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, f_X(x)\,dx < \infty$

$$\Rightarrow Eg(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, f_X(x)\,dx$$

Momentumok:

Ha $\alpha \geq 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow X$ α-dik abszolút momentuma: $E|X|^\alpha$

$$E|X|^\alpha = \int_{\mathbb{R}} |u|^\alpha f_X(u)\,du$$

Szóráselnégyzet:

$$D^2X := E(X - EX)^2$$

Szórás: $DX := \sqrt{D^2X}$

Legyenek X, Y val. vált.

1. $D^2X \geq 0$ / $D^2X = 0 \Rightarrow X = c$ konstans

2. Y és X függetlenek $\Rightarrow D^2(X+Y) = D^2X + D^2Y$

3. Ha $\beta \in \mathbb{R}$ $D^2(\beta X) = \beta^2 D^2X$

4. $D^2X = EX^2 - (EX)^2$

X folyt:

$$D^2X = \int_{\mathbb{R}} u^2 \cdot f_X(u)\,du - \left(\int_{\mathbb{R}} u\, f_X(u)\,du\right)^2$$

Exponenciális: $E\xi = \frac{1}{\lambda}$ $\quad D^2\xi =$

Egyenletes eloszlás $[a,b]$-n: $E\xi = \frac{a+b}{2}$ $\quad D^2\xi = \frac{(a-b)^2}{12}$

Gauss $E\xi = 0$ $\quad D^2\xi = 1$

Cauchy $E\xi = \emptyset$ nincs

Sűrűségfüggvény transzformációja

Legyen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható és bijektív

Legyen ξ folyt val vált. sűrűségfüggvénye $f_\xi(x)$ ofh

Ekkor $h(\xi)$ is folyt val vált

$$f_{h(\xi)}(y) = f_\xi\left(h^{-1}(y)\right) \frac{1}{\left|h'\left(h^{-1}(y)\right)\right|} \qquad y \in R(h)$$

Weibull eloszlás

Legyen $\xi \sim \exp(\lambda)$

$\eta := \xi^{\frac{1}{\alpha}}$ $\quad \eta = h(\xi)$ $\quad h(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$ $\quad x \in (0,\infty)$

$$f_\eta(y) = f_\xi\left(h^{-1}(y)\right) \frac{1}{\left|h'\left(h^{-1}(y)\right)\right|} = f_\xi(y^\alpha) \frac{1}{\left|h'(y^\alpha)\right|}$$

Normális eloszlás:

Legyen ξ folytonos valószínűségi változó, ha sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Ekkor ξ (μ, σ^2) paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó, jele: $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E\xi = \mu \qquad D^2\xi = \sigma^2$$

Lognormális eloszlás:

Legyen $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ legyen $\eta := e^\xi$

Ekkor η (μ, σ^2) paraméterű lognormális eloszlású valószínűségi változó

η is folytonos val. változó

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{|e^{\ln y}|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma\cdot y} \cdot e^{\frac{-(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad y > 0$$

Sztenderd normális eloszlás:

ξ $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

Általános normális

Legyen $\eta := \sigma\cdot\xi + \mu$

$$E\eta = \mu \qquad D^2\eta = \sigma^2$$

Sztenderdizálás:

Ha $\xi \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \eta := \frac{\xi - \mu}{\sigma}$ már sztenderd normális $N(0,1)$

Többdimenziós val. változók:

Legyen $\underline{X}: \Omega \to \mathbb{R}^d$ $\nearrow$

X_i $i = 1, \dots, d$ koordinátái val. változók

Ekkor $\underline{X} = (X_1, \dots, X_d)$ d dimenziós val. változó

Diszkrét 2 dim:

Legyen (X, Y) 2 dim val változó

Ha $R(X)$, $R(Y)$ véges / megszámolhatóan végtelen

Akkor (X, Y) 2 dim DISZKRÉT val. változó

Együttes eloszlás:

Legyen (X, Y) 2 dimenziós változó

Akkor (x_i, y_j, q_{ij}) hármasok halmaza

ahol $q_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ (X,Y) együttes eloszlása

Marginális eloszlás / peremeloszlás:

X szerinti (X,Y) 2 dim val. változó (x_i, p_i) X szerinti ...

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_j q_{ij}$$

$$r_j = P(Y = y_j) = \sum_i q_{ij} \Rightarrow (x_i, y_j, q_{ij}) \text{ meghatározza}$$

(x_i, p_i)-t

(y_j, r_j)-t

VALSZÁM

def. 7.

2-dim: (ξ, η) $R(\xi) = \{x_1, x_2, \dots\}$ $R(\eta) = \{y_1, y_2, \dots\}$ $p_i = P(\xi = x_i)$ $r_i = P(\eta = y_j)$

Együttes eloszlás: $(x_i, y_j; q_{ij})$

$$\sum_{i,j} q_{ij} = 1$$

(x_i, y_j, q_{ij}) sorozat egy (ξ, η) 2-dim diszkrét val. vált.

Eloszlása pontosan akkor ha $q_{ij} \geq 0$ $\sum_{ij} q_{ij} = 1$

Folytonos 2-dim val.vált.:

Legyen (ξ, η) valvált. folyt. ha $\exists f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ $\forall I, J \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(\xi \in I, \eta \in J) = \int_{I \times J} f(x,y)\, d(x,y)$$

akkor f az együttes sűrűségfv.-e (ξ, η)-nak

Marginális/peremsűrűségfv.:

Legyen (ξ, η) 2 dim folyt val vált., f sűrűségfv

Akkor ξ és η is folyt val.változó

ti $f_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy$

$f_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx$

függetlenség:

ξ, η valv'll függetlenek ha

bármely $I, J \in \mathcal{R}$: $P(\xi \in I \wedge \eta \in J) = P(\xi \in I) \cdot P(\eta \in J)$

- Ha 2 dim diszkrét val vál: X, Y pontosan akkor fgtlen ha $q_{ij} = p_i \cdot k_j \quad \forall i,j$ - re
- ha adott (ξ, η) 2dim val vál $\Rightarrow$ ξ és η fgtlen ha $f_\xi(x) \cdot f_\eta(y) = f(x,y)$

kovariancia: legyen (ξ, η) val. vál. $E\xi^2 < \infty$, $E\eta^2 < \infty$

Akkor ξ és η kovarianciája:

$$cov(\xi, \eta) := E\Big([\xi - E\xi][\eta - E\eta]\Big)$$

korreláció: legyen ξ, η val vál. nem konstans $E\xi^2 < \infty$, $E\eta^2 < \infty$

$$\varrho(\xi, \eta) := \frac{cov(\xi, \eta)}{D\xi \cdot D\eta}$$

ξ és η korrelációja

1. $cov(\xi, \eta) = cov(\eta, \xi)$ szimmetrikus
2. $cov(a\xi + b\nu, \eta) = a \cdot cov(\xi, \eta) + b(\nu, \eta)$ bilineáris
   $cov(\xi, a\eta + b\nu) = \dots$
3. $cov(\xi, \xi) = D^2\xi$
4. Ha ξ és η függetlenek $\Rightarrow \varrho(\xi, \eta) = cov(\xi, \eta) = 0$
5. $-1 \le \varrho(\xi, \eta) \le 1$
6. $cov(\xi, \eta) = E[\xi\eta] - E\xi \cdot E\eta$
7. ha (ξ, η) diszkrét $\Rightarrow cov(\xi, \eta) = \sum_{i,j} x_i y_j q_{ij} - \Big(\sum_i x_i p_i\Big)\Big(\sum_j y_j \nu_j\Big)$
8. ha (ξ, η) folyt $\Rightarrow cov(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} xy\, f(x,y)\,dx\,dy - \Big(\int_{\mathbb{R}} x f_\xi(x)dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} y f_\eta(y)dy\Big)$

Lemma: (ξ, η) 2-dim folyt. valós v. $f(x,y)$ sűrűségfv-e

legyen $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető

Akkor $E\,h(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y) f(x,y)\,dx\,dy$

$$E(\xi\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot y \cdot f(x,y)\,dx\,dy$$

korrelációs együttható:

Ha ξ, η függetlenek $\Rightarrow \varrho(\xi,\eta) = 0$

Ha $\varrho(\xi,\eta) = 1 \Rightarrow \eta = a\xi + b \quad a > 0 \quad b \in \mathbb{R}$

$\varrho(\xi,\eta) = -1 \Rightarrow \eta = a\xi + b \quad a < 0 \quad b \in \mathbb{R}$

↳ ξ nő η csökken

ξ nő $\Rightarrow$ η is

Valószínűségi változók összege:

ξ és η valós $f(x,y)$ sűrűségfv

$$f_{\xi+\eta}(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)\,dx$$

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

VALSZÁM Def. 8

Valószínűségi változók konvergenciája:

Legyen Y_n, $n \in \mathbb{N}$ val.változók, Y val.változó

$Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$

$Y : \Omega \to \mathbb{R}$

Y_n tart Y-hoz 1 valószínűséggel ha

$$P(\{\omega \in \Omega : Y_n(\omega) \to Y(\omega),\ n \to \infty\}) = 1$$

Sztochasztikusan tart:

Y_n sztochasztikusan tart Y-hoz ha

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|Y_n - Y| > \varepsilon) \to 0,\ n \to \infty$$

Kolmogorov, Nagy Számok Törvénye:

Legyenek ξ_i $i \in \mathbb{N}$ független és azonos eloszlású val.változók

$F_{\xi_1}(x) = F_{\xi_j}(x)$ $\forall j$-re

Létezzen $E\xi_1$

Ekkor $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \to E\xi_1$ 1 valószínűséggel

$$\forall \delta > 0 : P\left(\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - E\xi_1\right| \geq \delta\right) \to 0$$

Csebisev - egyenlőtlenség:

Legyen η val.változó $E\eta^2 < \infty$

Akkor $\forall \delta > 0$: $P(|\eta - E\eta| \geq \delta) \leq \frac{D^2\eta}{\delta^2}$

→ Kör: Legyen ξ_i $i \in \mathbb{N}$ független, p paraméterű Bernoulli val.változók

$P(\xi_i = 1) = p$ $P(\xi_i = 0) = 1 - p$

$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \to p$ 1 valószínűséggel

Centralis határeloszlás - tétel:

Legyenek $\xi_i, i \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású val. vált.

$E\xi_1^2 < \infty$

Akkor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $P\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - n E\xi_1}{\sqrt{n} D\xi_1} < x\right) \to \Phi(x)$

$n \to \infty$

VALSZA'M

Def 9.

Standard normális:

$(Y_1, \dots, Y_d)$ d-dim Sz.V. vall. ha együtt. sűrűségfv.e

$$f(y_1, \dots, y_d) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_d^2)}$$

Normális eloszlású:

Legyen $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_d)^T$ Sz.V. eloszlású

$A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ $\det A \neq 0$, $\underline{m} = (m_1, \dots, m_d)^T \in \mathbb{R}^d$

Ekkor $Z := A\underline{Y} + \underline{m}$ vall. d-dim Norm. eloszlású

Kovarianciamátrix:

(X_1, X_2) 2 dim vall. $EX_1^2 < \infty$, $EX_2^2 < \infty$

Ekkor $\Sigma := \Sigma\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} D^2 X_1 & \operatorname{cov}(X_1, X_2) \\ \operatorname{cov}(X_1, X_2) & D^2 X_2 \end{pmatrix}$

1. mindig kétszer

2. pozitív semidefinit

$$\Sigma\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = E\left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}(X_1 \; X_2)\right]$$ 2 dim esetén

Transzformációs tétel:

(X_1, X_2) 2 dim folyt. vall.v., $f(x_1, x_2)$ sűrűségfv.e

Legyen $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektív, folyt. diffható

$R(h) \subseteq \mathbb{R}^2$

Ekkor $h(X_1, X_2)$ is 2 dim vall. sűrűségfv.e

$$g(y_1, y_2) := f(h^{-1}(y_1, y_2)) \cdot \frac{1}{\det(h'(h^{-1}(y_1, y_2)))}$$

$(y_1, y_2) \in R(h)$

$h': \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$\underline{Z} = A\underline{Y} + \underline{m}$

$\underline{Z}$ együttes sűr. $g(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(y-\underline{m})^T \Sigma^{-1}(y-\underline{m})}$

$y \in \mathbb{R}^2$

2 paraméter: Σ, m

Normális eloszlású:

legyen Z 2dim folyt val.vektor

$g(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(y-\underline{m})^T \Sigma (y-\underline{m})}$ együttes sűr.fv

Σ poz def $\in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad \underline{m} \in \mathbb{R}^2$ $\quad y \in \mathbb{R}^2$

Ekkor $\underline{Z}$ $(\underline{m}, \Sigma)$ paraméterű 2dim NE eloszlású

- Ha $\underline{Z} \sim N(\underline{m}, \Sigma) \Rightarrow \underline{Z}$ várható értéke a kovarianciamátrixa
- Ha $(Z_1, Z_2) \sim N(m, \Sigma) \Rightarrow cov(Z_1, Z_2) = 0 \Leftrightarrow Z_1, Z_2$ függetlenek
- Ha $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\quad X_2 \sim (\mu_2, \sigma_2^2)$ függetlenek

akkor $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

↳ általánosítás

(Z_1, Z_2) 2dim normális $\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha Z_1 + \beta Z_2$ is normális eloszlású

Feltételes várható érték:

Legyen $B \in \mathcal{F}$ nullától $P(B) > 0$

Legyen $X: \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét $\quad R(X) = x_1, x_2 \ldots$

Ekkor $E[X|B] = \sum_i x \cdot P(X = x_i | B)$ $\quad X$ várható értéke

$\int_A \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx$

Feltételes valószínűség:

Ha (X,Y) 2 dim folyt., $f(x,y)$ eggyütes sűr. fv.

akkor $P(X \in A \mid Y=y) := \int_A \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx \qquad A \subseteq \mathbb{R}$

ha $f_Y(y) \neq 0$, $P(X \in A \mid Y=y) = 0$ ha $f_Y(y) = 0$

$$f_{X|Y=y}(x) := \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} & \text{ha } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{ha } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

Tehát $P(X \in A \mid Y=y) = \int_A f_{X|Y=y}(x)\,dx$

Feltételes várható érték:

Ha (X,Y) 2 dim folyt. valvál. $\Rightarrow$ X $Y=y$-ra vett feltételes várható értéke $E[X \mid Y=y] := \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{X|Y=y}(x)\,dx$

(x: feltételt nélkül számolt várható érték; $f_{X|Y=y}$: feltétellel számolt sűr. fv.)

$X \in \mathbb{R} \Rightarrow E[X \mid Y=y] = EX$

VALSZÁM Def 10.

Folytonos Feltételes sűrűségfv:

(X,Y) folyt $f(x,y)$ együttes sfv

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} & \text{ha } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{ha } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

$$E[X|Y=y] = \int_{\mathbb{R}} x \, f_{X|Y=y}(x)\,dx$$

1. ha X és Y független $\Rightarrow E[X|Y=y] = EX$
2. ha $X = g(Y)$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow E[X|Y=y] = g(y)$

Tétel: Ha (X,Y) 2dim normális $\Rightarrow (X - \beta Y, Y)$ is, ahol $\beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \operatorname{cov}\left(X - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2 Y} Y, Y\right) = 0 \Rightarrow X - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2 Y} Y$ is Y függetlenek

Affin fv (X,Y) normális $\Rightarrow E[X|Y=y]$ Y affin fv-e

Regresszió fv: azt a g fv-t melyre $E[X - g(Y)]^2$ a legkisebb regresszió fv-nek nevezzük

T: $g(y) := E[X|Y=y]$ fv a regresszió fv Tfh $EX^2 < \infty$

log-likelihood fv. $l(\vartheta, x_1, \dots, x_n) := \ln h_\vartheta(x_1, \dots, x_n)$ log-likelihood fv

$\hat{\vartheta}_N$ $\vartheta \to l(\vartheta, \xi_1, \dots, \xi_N)$ fv egyik maximumhelye

$\to \vartheta$ paraméter maximum likelihood becslése mintából

Statisztika

minta: $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ N elemű mintának hívjuk

paraméter halmaza: $\vartheta \in \mathbb{R}$ lehetséges par. halmaza elemei $\vartheta - k$

statisztikai fv: Legyen $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ Nelemű minta $f_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ fv

Akkor $f_N(\xi_1, \dots, \xi_N)$ stat fv-nek nevezzük

mintaátlag: /tapasztalati közép $\overline{\xi}_N := \frac{\xi_1 + \dots + \xi_N}{N}$

tapasztalati szórásnégyzet: alábbi statisztikát

$$S_N^2 := \frac{\sum_{i=1}^{N} (\xi_i - \overline{\xi}_N)^2}{N}$$

konzisztens becsléssorozat:

Legyen $f_N(\xi_1, \dots, \xi_N)$ $N \in \mathbb{N}$ statisztikák egy sorozata

Ez a konzisztens becsléssorozat ha $f_N(\xi_1, \dots, \xi_N) \to \vartheta$ $N \to \infty$ (esetén)

ϑ igazi paraméter

torzítatlan stat.: $f_N(\xi_1, \dots, \xi_N)$ torzítatlan ha

$E f_N(\xi_1, \dots, \xi_N) = \vartheta$ ϑ igazi paraméter

torzítatlan becslés: $\overline{\xi}_N$ torzítatlan becslése $\vartheta = E\xi_1$-nek

hiszen $E\overline{\xi}_N = E\frac{\xi_1 + \dots + \xi_N}{N} = \frac{1}{N}(E\xi_1 + \dots + E\xi_N = \frac{N E\xi_1}{N} = E\xi_1 = \vartheta$

korrigált tapasztalati szórásnégyzet:

$$(S_N^*)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\xi_i - \overline{\xi}_N)^2}{N-1}$$

T: Általános feltételek mellett $\hat{\vartheta}_N$ $N \in \mathbb{N}$ konzisztens becsléssorozat

VALSZA'M

Def. 11

Becslés négyzetes hibája:

$$E\left|f(\xi_1,\dots,\xi_n)-\vartheta\right|^2$$

$\xi_1 \dots \xi_n$ n elemű minta
$f(\xi_1,\dots,\xi_n)$ adott becslés $\vartheta \in \Theta$ valódi paraméter

Konfidencia intervallum:

legyen $\varepsilon > 0$ rögzített szám, $K > 0$

$[f(\xi_1,\dots,\xi_n) - K,\ f(\xi_1,\dots,\xi_n) + K]$ ε szintű kon. intervallum

ha $P(\vartheta \in [f(\xi_1,\dots,\xi_n) - K,\ f(\xi_1,\dots,\xi_n) + K]) \geq \varepsilon$

ϑ igazi paraméter

Alsó konfidencia határ:

$\varepsilon > 0$ $K > 0$ $f(\xi_1,\dots,\xi_n) - K$ ε szintű alsó kon. hat.
ha $P(\vartheta > f(\xi_1,\dots,\xi_n) - K) \geq 1 - \varepsilon$

Felső konfidencia határ:

$\varepsilon > 0$, $K > 0$ $f(\xi_1,\dots,\xi_n) + K$ ε szintű felső kon. hat
ha $P(\vartheta < f(\xi_1,\dots,\xi_n) + K) \geq 1 - \varepsilon$

Hipotézis vizsgálat:

Nullhipotézis: H_0: $E\xi_n = \mu_0$
Ellenhipotézis: H_1: H_0 nem igaz
Első fajú hiba: H_0-t elvetjük pedig igaz
Második fajú hiba: H_0-t elfogadom pedig hamis

Egymintás, kétoldali u-próba $\xi_1, \dots, \xi_n$ minta

$\mu := E\xi_1$ $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$

$\sigma^2 = D^2\xi_1$ ismert

$\xi_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ Próbafv: $u(\xi_1, \dots, \xi_n) := \dfrac{\bar{\xi}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Lemma: ha H_0 igaz $(E\xi_1 = \mu_0) \Rightarrow u(\xi_1, \dots, \xi_n)$ eloszlása $\sim N(0,1)$

Egymintás, egyoldali u-próba: $\xi_1, \dots, \xi_n$ minta $\mu = E\xi_1$

$\sigma^2 = D^2\xi_1$ ismert $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$

$u(\xi_1, \dots, \xi_n) := \dfrac{\bar{\xi}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

$E = [a, \infty]$

$K = (-\infty, a)$

ha $u(\xi_1, \dots \xi_n) \in E$

↳ akkor elfogadjuk H_0-t

Kétmintás, kétoldali u-próba: $\xi_1, \dots, \xi_n$ 1-minta

$\eta_1, \dots, \eta_m$ 2-minta

$E\xi_1 = \mu$ ismert

$E\eta_1 = \nu$

$H_0: \mu = \nu$ $H_1: \mu \neq \nu$

$D^2\xi_1 = \sigma^2$ $D^2\eta_1 = K^2$ ismert

$$u(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m) = \frac{\bar{\xi}_n - \bar{\eta}_m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{K^2}{m}}}$$

H_0 mellett $u \sim N(0,1)$

Kétmintás, egyoldali u próba: $\xi_1, \dots, \xi_n$ $\eta_1, \dots, \eta_m$ $\mu = E\xi_1$ $\nu = E\eta_1$ ismeretlen

$\sigma^2 = D^2\xi_1$ $K^2 = D^2\eta^2$ ismert

$H_0: \mu \geq \nu$

$H_1: \mu < \nu$

$u = \dfrac{\bar{\xi}_n - \bar{\eta}_m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{K^2}{m}}}$ $E = [a, \infty)$ $K = (-\infty, a)$

$P(H_0 \text{ igaz}, u < a) = \Phi(a)$

$\Phi(a) = \varepsilon$

Egymintás kétoldali t-próba: $\xi_1, \dots \xi_n$ $E\xi_1 = \mu$ ismeretlen

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$ $D^2\xi_1 = \sigma^2$ ismert

$t(\xi_1, \dots \xi_n) = \dfrac{\bar{\xi}_n - \mu_0}{s_n^* / \sqrt{n}}$

$s_n^* = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi}_n)^2}{n-1}}$

Ha H_0 igaz $\Rightarrow$ t $(n-1)$ szabadságfokú Student eloszlású

Hipergeometriai

$$P(x=k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$EX = n \cdot \frac{K}{N}$$

$$D^2X = n \cdot \frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

n - max kiválasztott
k - tényleges ami kell
K - összes ami kell
N - összes ami kiválasztható

Binomiális

$$P(x=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$EX = n \cdot p$$

$$D^2X = n \cdot p(1-p)$$

Poisson

$$P(x=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$EX = \lambda$$

$$D^2X = \lambda$$

Geometriai

$$P(x=k) = p(1-p)^{k-1}$$

optimista: hány dobásra jön az első hatos
pesszimista: hányat dobok az első hatos előtt

Negatív Binomiális

$$P(x=k) = \binom{k-1}{\ell-1}(1-p)^{k-\ell} p^{\ell}$$

hányadikra jön ki a 3. hatos
ℓ.

Teljes valószínűség

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) \cdots$$

Bayes tétel:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)\,P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)\,P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)}$$

$$\frac{P(B_j \wedge A)}{P(A)} \longrightarrow P(A|B_j)P(B_j)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

$$D^2(x) = E^2(x) - E(x^2)$$