

Def: Többdimenziós standard normális eloszlás:

→ $(Y_1, \dots, Y_d)$ d -dimenziós standard normális val.v. vektor, ha együttes sűrűsége $f(y_1, \dots, y_d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_d^2)}$, $(y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$

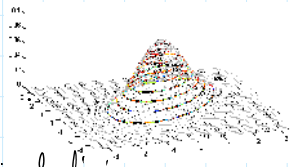
Def: Többdimenziós normális eloszlás:

→ Legyen $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_d \end{pmatrix}$ standard d -dimenziós normális eloszlású.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\det(A) \neq 0$, $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$.

→ Ekkor $Z := AY + m$ val.v. vektor d -dimenziós normális eloszlású.

Megj: Tízet a d -dimenziós normális val.v. vektorok a d -dimenziós standard normális eloszlás affin transzformációi.



Példa: $d=2$

Standard normális: $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Legyen (Y_1, Y_2) 2D standard normális eloszlású.

$$\Rightarrow f(x, y) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{f_{Y_1}(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}}_{f_{Y_2}(y)}$$

(Megj: Tízet Y_1, Y_2 független $N(0, 1)$ -okt egymás mellé téve kapunk egy 2D nt. norm. val.v. vektort.)

$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\det(A) \neq 0$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$

Várható érték:

$$E(Z) = E\left(\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}\right) = E\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}\right] = E\left[\begin{pmatrix} a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 \\ a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_{11}EY_1 + a_{12}EY_2 \\ a_{21}EY_1 + a_{22}EY_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

Def: Kovariancia-mátrix

Legyen (X_1, X_2) 2D val.v. vektor, $EX_1 < \infty$, $EX_2 < \infty$.

→ Ekkor a $\Sigma := \Sigma \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} D^2X_1 & \text{cov}(X_1, X_2) \\ \text{cov}(X_1, X_2) & D^2X_2 \end{bmatrix}$ mátrixot az (X_1, X_2) kovariancia mátrixnak hívjuk

Alkítás: Kovariancia-mátrix tulajdonságai

1) Σ szimmetrikus Biz: triviális

2) Σ pozitív nemdefinit

Biz: $D^2X_1 \geq 0$, $D^2X_2 \geq 0$, $D^2X_1 D^2X_2 - \text{cov}^2(X_1, X_2) \geq 0$ ← Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

Alkítás: $V(X_1, X_2)$ 2D val.v. vektor esetén $\Sigma \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = E\left[\begin{pmatrix} X_1 - EX_1 \\ X_2 - EX_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 - EX_1 & X_2 - EX_2 \end{pmatrix}\right]$

$$\text{Biz: } \Sigma \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = E\left[\begin{pmatrix} X_1 - EX_1 \\ X_2 - EX_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 - EX_1 & X_2 - EX_2 \end{pmatrix}\right] = E\left[\begin{pmatrix} (X_1 - EX_1)^2 & (X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2) \\ (X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2) & (X_2 - EX_2)^2 \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} E(X_1 - EX_1)^2 & E(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2) \\ E(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2) & E(X_2 - EX_2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^2X_1 & \text{cov}(X_1, X_2) \\ \text{cov}(X_1, X_2) & D^2X_2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \Sigma \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = E\left[\begin{pmatrix} Z_1 - EZ_1 \\ Z_2 - EZ_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 - EZ_1 & Z_2 - EZ_2 \end{pmatrix}\right] = E\left[\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= E\left[\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}\right] = A \underbrace{E\left[\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}\right]}_{\Sigma \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^2Y_1 & \text{cov}(Y_1, Y_2) \\ \text{cov}(Y_1, Y_2) & D^2Y_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{standard norm.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I} A^T = A I A^T = A A^T$$

Összefoglalás: $EZ = m$

$$\Sigma(Z) = A A^T$$

Megj: Ha Y standard normális eo, akkor $\Sigma(Y) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$EY = \begin{pmatrix} EY_1 \\ EY_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$$

Def: Transzformációs tétel

$$E = (E, \gamma) = (0) - \subseteq \mathbb{R}^k$$

Tétel: Transzformációs tétel

(x_1, x_2) 2D bolyonás vektor, $f(x_1, x_2)$ a függvény
Legyen $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektív és bolyonásos diffháb.

$\Rightarrow$ Ekkor $h(x_1, x_2)$ is 2D bolyonásos vektor,

meljant egytűs függvény: $g(y_1, y_2) := f(h^{-1}(y_1, y_2)) \cdot \frac{1}{\det(h'(h^{-1}(y_1, y_2)))}$ $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_h$

Megj: $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $h': \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ $h'(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} \partial_1 h_1(y_1, y_2) & \partial_1 h_2(y_1, y_2) \\ \partial_2 h_1(y_1, y_2) & \partial_2 h_2(y_1, y_2) \end{bmatrix}$

DE ha $z = A \cdot y + m$

$\Rightarrow y = A^{-1} \cdot (z - m) \Rightarrow h'(x) = A : \forall x \in \mathbb{R}^2$
 $\Rightarrow h'(y) = A^{-1} (y - m)$ (mivel $y = A \cdot x + m$
 $y - m = A \cdot x$
 $A^{-1}(y - m) = x$)

Alkalmazni a tétel: $z = h(y) - m$

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \frac{1}{|\det A|} = f(A^{-1}(y - m)) \frac{1}{|\det A|} = \frac{1}{2\pi |\det A|} e^{-\frac{1}{2} \|A^{-1}(y - m)\|^2} = (*)$$

a norma némitűs: $x^2 + y^2 = \|x\|^2 = x^T \cdot x$

$(*) = \frac{1}{2\pi |\det A|} e^{-\frac{1}{2} (y - m)^T (A^{-1})^T A^{-1} (y - m)} \rightarrow (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (A^T A)^{-1} = \Sigma^{-1}$
 $\rightarrow \det \Sigma^{-1} = \det(A A^T) = \det A \det A^T = (\det A)^2$
 $\hookrightarrow \det \Sigma^{-1} = (\det A)^2$

Összefoglalás: z egytűs függvény:

$$g(y) = \frac{1}{2\pi \det \Sigma} e^{-\frac{1}{2} (y - m)^T \Sigma^{-1} (y - m)} : y \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{let paraméter: } \Sigma, m$$

Df: Folytonos 2D normális eloszlás

Legyen z 2D bolyon. vektor,

meljant egytűs függvény: $g(y) = \frac{1}{2\pi \det \Sigma} e^{-\frac{1}{2} (y - m)^T \Sigma^{-1} (y - m)} : y \in \mathbb{R}^2$, ahol $\Sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ poz. def. és $m \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ Ekkor $z \sim (\underline{m}, \Sigma)$ paraméterű folytonos 2D normális eloszlásnak nevezzük.

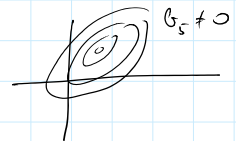
Alkalmazás: Ha $z \sim (\underline{m}, \Sigma)$, akkor z vektoris értéke $\underline{m}$, kovarianciamátrixa pedig Σ .

Tekintsd a z függvényen, $g(y)$ -ben az a kifejezés!

$$y \rightarrow -\frac{1}{2} (y - m)^T \Sigma^{-1} (y - m) = l(y) \Rightarrow \text{ez egy pozitív definit kvadrátikus alak}$$

$$l(y) = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_1 + b_4 y_2 + b_5 y_1 y_2 + b_6$$

$\Rightarrow$ az a függvény ellipszis mértékű alakú tengelyek pozitív és negatív irányúak
 párhuzamosan a koordináta tengellyel, ha $b_5 = 0$



Tétel: Függetlenség és normális eloszlás vektorok kovarianciája

Ha (z_1, z_2) 2D normális eo vektor, és $\text{cov}(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1, z_2$ függetlenek

Biz: $\Leftarrow$ Ha z_1, z_2 függetlenek $\Rightarrow \text{cov}(z_1, z_2) = 0$

$\Rightarrow$ Típus $\text{cov}(z_1, z_2) = 0 \rightarrow$ Be kell látnunk, hogy $g(x_1, x_2) = f_{z_1}(x_1) f_{z_2}(x_2)$

Ugyanakkor: $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$ diagonális! $\det \Sigma = \sigma_1 \sigma_2$
 $\hookrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \end{pmatrix}$ $(y - m) = \begin{pmatrix} y_1 - m_1 \\ y_2 - m_2 \end{pmatrix}$

$$g(y) = \frac{1}{2\pi \det \Sigma} e^{-\frac{1}{2} (y - m)^T \Sigma^{-1} (y - m)} = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma_1} (y_1 - m_1)^2 + \frac{1}{\sigma_2} (y_2 - m_2)^2 \right]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} e^{-\frac{(y_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2} e^{-\frac{(y_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2}} = f_{z_1}(y) \cdot f_{z_2}(y)$$

Emellett: Szorzatt (konvolúciós tételek): ha $X_1 \sim (0, 1)$ és $X_2 \sim (0, 1)$, $f = g$ függetlenek,

akkor $(X_1 + X_2) \sim (0, 2)$

Tétel: Független vektorok összege

Ha $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ és $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ függetlenek, akkor $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

11. J. 4. d. / Előző előadás

Ha z_1 és z_2 normális eloszlású és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor $(\alpha z_1 + \beta z_2)$ is normális eloszlású.

Emlíkeztető: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, ha $P(B) \neq 0$

$A \in \mathcal{F} \rightarrow P(A|B)$: valószínűség axiómáinak eleget tesz

Def 1: Feltételes várható érték

Legyen $B \in \mathcal{F}$ rögzített, $P(B) > 0$

és legyen $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét val. v. vektor, melynek értékei: $x_1, x_2, \dots, x_n$

$\Rightarrow$ Ekkor $E[X|B] := \sum_i x_i P(X = x_i | B)$ -t X feltételes várható értékének nevezzük.

Típikus példa: X : adott diák fizika jegye, Y : adott diák matek jegye

$\Rightarrow R(X) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R(Y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\Rightarrow$ Tudni, hogy a diák matek jegye 3-as, várhatóan mennyi a fizika jegye? ($B := \{Y=3\}$)

$\Rightarrow$ Várhatóan: $E[X|B] = E[X|Y=3] = \sum_{i=1}^5 i P(X=i|Y=3)$

Másik példa: X : csapadékmenyiség, Y : hőmérséklet

Ez egy folytonos val. vektor, ezért $P(Y=y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$

Mégis szeretnénk tudni, mennyi a várható csapadék adott t hőmérséklet mellett, azaz $E[X|Y=t] = ?$

$\Rightarrow$ Feltételes valósz. eloszlásának problémája: $P(X \in A | Y=t) = \frac{P(X \in A \text{ és } Y=t)}{P(Y=t)} \Rightarrow$ Némelyik!

$\rightarrow$ Ötlet: $h > 0$ kis mennyiség

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} P(X \in A | Y \in [y, y+h]) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(X \in A, Y \in [y, y+h])}{P(Y \in [y, y+h])} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_y^{y+h} \int_A f(x, z) dx dz}{\int_y^{y+h} f_Y(z) dz} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_A \frac{1}{h} \int_y^{y+h} f(x, z) dz dx}{\frac{1}{h} \int_y^{y+h} f_Y(z) dz} = \frac{\int_A f(x, y) dx}{f_Y(y)} = \int_A \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx \end{aligned}$$

$\rightarrow$ marginális sűrűség

Def 1: Feltételes sűrűség

Ha (X, Y) 2D folytonos val. vektor, melynek sűrűsége $f(x, y)$,

akkor a feltételes valószínűség: $P(X \in A | Y=y) = \int_A \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$: $A \subset \mathbb{R}$, $f_Y(y) \neq 0$

ha $f_Y(y) = 0 \Rightarrow P(X \in A | Y=y) = 0$

Jelölés: $f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} & : f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & : f_Y(y) = 0 \end{cases}$ $f_{X|Y=y}(x)$ elnevezése: X feltételes sűrűsége $Y=y$ feltétel mellett.

$$\Rightarrow P(X \in A | Y=y) = \int_A f_{X|Y=y}(x) dx$$