# Felügyelt önálló tanulás - Analízis III.

Kormos Máté

Differenciálható sokaságok

<u>Sokaságok</u>

Röviden, sokaságoknak nevezzük azokat az objektumokat, amelyek egy *n* dimenziós térben lokálisan *k* dimenziósak.

Definíció: tekintsük $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmazát. Az $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ halmaz egy *k* dimenziós sokaság, ha

1. $\forall\, p \in \mathcal{M}$ - hez létezik egy $\mathcal{U} = S(p, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ nyílt gömbkörnyezet,
2. létezik olyan $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz,
3. van olyan $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés ($k \leq n$),

amelyekre teljesül, hogy $\phi(\mathcal{V}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{U}$.

A $\phi$ leképezés képtere *n* dimenziós vektortér, Jacobi mátrixa pedig teljes rangú, azaz, ha

$$\phi = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{pmatrix},$$

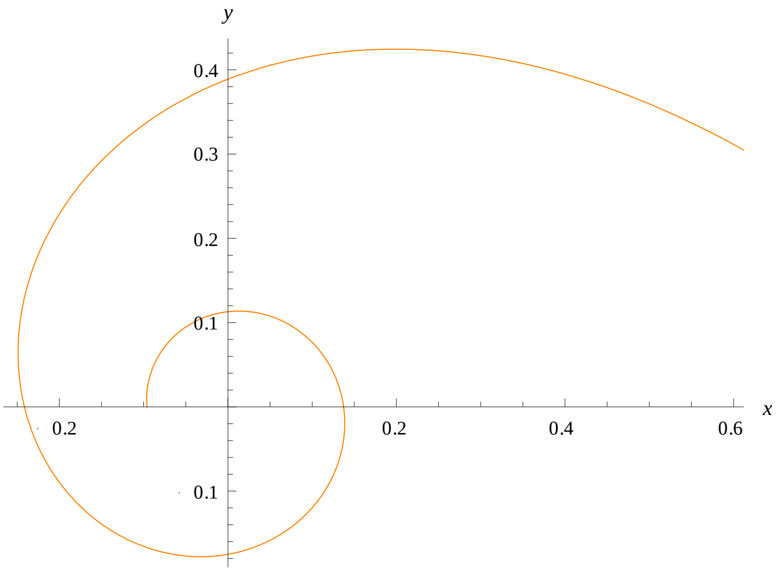
akkor

$$D\phi = \begin{pmatrix} grad\ f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ grad\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{pmatrix}$$

egy *n x k* dimenziós mátrix lesz, melynek *k* darab lineárisan függelten oszlopa van, ezek pedig *k* dimenziós lineáris alteret feszítenek ki a képtérben.

Példa sokaságra

Görbe




A fenti görbe egy 1 dimenziós sokaság $\mathbb{R}^2$-ben.
Ennek a görbének a paraméterezése:

$$\phi(u) = \left(\frac{\cos u}{u+1}, \frac{\sin u}{u+1}\right)$$

$$u \in [0, 3\pi) = \mathcal{V}$$

$$D\phi(u) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\cos u}{(u+1)^2} - \dfrac{\sin u}{u+1} \\ \dfrac{\cos u}{1+u} - \dfrac{\sin u}{(1+u)^2} \end{pmatrix}$$

A Jacobi mátrixnak 1 darab lineárisan független oszlopa van, így:

$$rg(D\phi) = 1.$$

Ezzel pedig megkaptuk a görbe dimenzióját.

Sokaságok határa

Sokaságoknak természetesen értelmezhetjük a határát (habár nem mindig létezik), az alábbi módon:

$\partial\mathcal{M} = \bar{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$ ahol

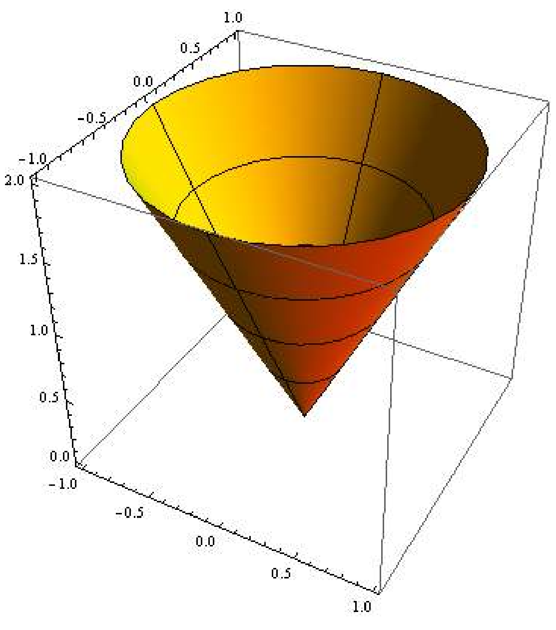
$$\bar{\mathcal{M}} = \{ x \subset \mathbb{R}^n : \exists\, (x_i) \subset \mathcal{M} : \lim_{i\to\infty} x_i = x \}$$

Tehát a határpontok halmaza az $\mathcal{M}$ -ben értelmezett konvergens sorozatok végpontjai.
Ha $\mathcal{M}$ egy *k* dimenziós sokaság, akkor $\partial\mathcal{M}$ maga is egy sokaság, amire teljesül, hogy:

$$\dim\partial\mathcal{M} \begin{cases} k-1 \\ \{\emptyset\} \end{cases}$$

Ahol a *k - 1 = 0* esetet nulla dimenziós – csak pontokból álló – sokaságként értelmezzük és ezt megkülönböztetjük attól az esettől, amikor maga a határhalmaz nem létezik, vagyis az üres halmaztól.

Az alábbi tölcsér egy két dimenziós sokaság $\mathbb{R}^3$-ban, amelynek a határa egy körvonal. Itt $\dim\partial\mathcal{M} = 1$.




A határ tehát 1 dimenziós, azonban a határoló körvonalnak már nem tudnánk értelmezni a határát, hiszen nincsenek végpontjai (ezért, ha $\mathcal{M}$-nek például a zárt egységkört választanánk, akkor $\dim\partial\mathcal{M} = \{\emptyset\}$ lenne).

Differenciálható sokaság absztrakt értelemben

Definíció: $\mathcal{M}$ egy *n* dimenziós differenciálható sokaság, ha minden $\mathcal{U}_\alpha$ nyílt halmazhoz meg tudunk adni valamilyen folytonos és invertálható

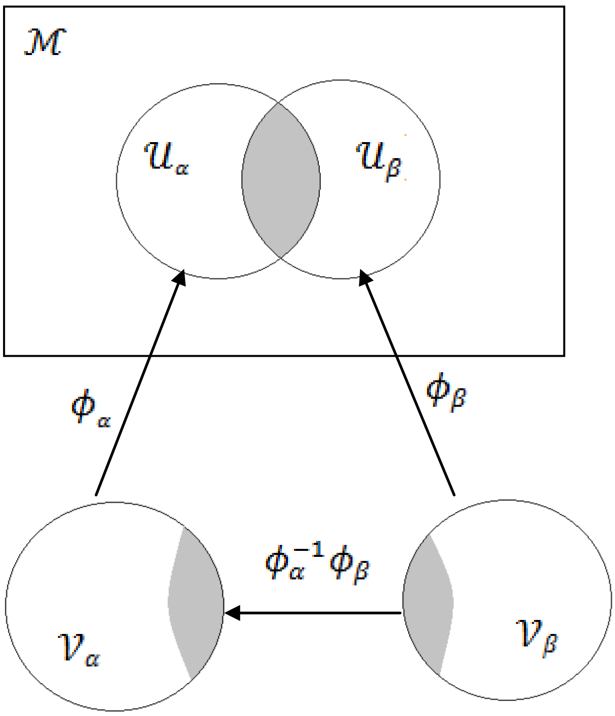
$\phi_\alpha : \mathcal{V}_\alpha \to \mathcal{U}_\alpha$ függvényt, ahol $\mathcal{V}_\alpha$ nyílt gömb $\mathbb{R}^n$-ben,

továbbá teljesül, hogy a

$$\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta \,:\, \phi_\beta^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \to \phi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$$

leképezés differenciálható és a hozzá tartozó Jacobi mátrix oszloprangja *n*.

Az $(\mathcal{U}, \phi)$ párost a környezet egy lokális *térképének* hívjuk, $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$-t pedig *atlasznak*, ahol $\alpha$ eleme egy $I = \{0, 1, \dots\}$ indexhalmaznak.




Az ábra azt szemlélteti, hogy ha megadtuk a sokaság valamely térképeit, és ha ezeknek a térképeknek vannak közös pontjai, akkor $\mathcal{V}_\beta$-ból eljutva a közös pontokba, $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ -ból „vissza tudunk jutni” $\mathcal{U}_\alpha$ ősképébe, $\mathcal{V}_\alpha$-ba, ha $\phi_\beta$-ra alkalmazzuk a $\phi_\alpha^{-1}$ inverz függvényt.

Ez alapján a definíció alapján most belátjuk, hogy a $\mathbb{P}^n$ projektív tér *n-1* dimenziós sokaság.

A projektív teret így definiáljuk:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

ahol $\{0\}$ az origót jelöli és $\mathbb{P}^n$ elemei között pedig megadunk egy ekvivalencia relációt a következőképpen:

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Ez azt jelenti, hogy a projektív térben azonosnak tekintjük azokat a pontokat, amelyeket ugyanaz a konstans szorzó határoz meg, így például $\mathbb{P}^3$-ban (1,2,3) = (2,4,6) vagy (2, 4, 8) = (6, 12, 24), stb.

A továbbiakban legyen $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ egy bijekció, az alábbi módon meghatározva:

$$\phi_i(x_0, x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) \rightarrow (x_0 : x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n)$$
$$\phi_i^{-1}(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \rightarrow (\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$$

ahol $\widehat{x_i}$ a hiányzó koordinátát jelöli.

Megnézzük *n* = *3*-ra, azaz, hogy a $\mathbb{P}^3$ tér 2 dimenziós sokaság.

$$\phi_0(x, y) = (1 : x : y)$$
$$\phi_1(x, y) = (x : 1 : y)$$
$$\phi_2(x, y) = (x : y : 1)$$

Ekkor $\phi_0^{-1} \circ \phi_1 = \phi_0^{-1}(x : 1 : y) = (1/x, y/x)$

$$D\, \phi_0^{-1} \circ \phi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

Ennek a Jacobi mátrixnak a rangja 2, tehát $\mathbb{P}^3 \equiv \mathbb{R}^2$

Sokaságok implicit megadása

Ha az *n* dimenziós térben van egy *k* dimenziós sokaságunk, akkor azt megadhatunk implicit módon is, *n - k* darab függvénnyel:

$$\rho_1(x), \dots, \rho_{n-k}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$\mathcal{M} = \{x : \rho_i(x) = 0 \mid i = 1, \dots, n-k\}$$

Például az egységkör esetében:

$$\mathcal{M} \coloneqq S^1 = \{ (x, y) : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

Ebből az is következik, hogy ha $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ egy *k* dimenziós sokaság, akkor ahhoz meg tudunk adni *n - k* darab merőleges vektort.

Tangens tér és normált tér

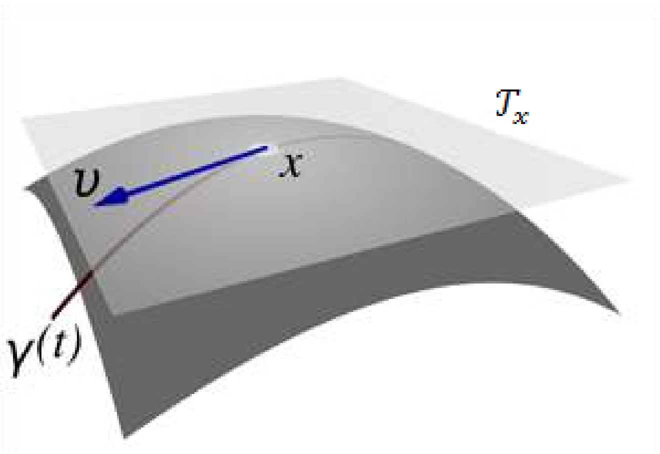
Egy sokaság *normált terén* ($\mathcal{N}_\mathrm{p}$) egy $p \in \mathcal{M}$ pontban azt a vektorteret értjük, amelyeket az alábbi vektorok feszítenek ki:

$$\nabla\rho_1(p), \dots, \nabla\rho_{n-k}(p).$$

Egy sokaság *tangens tere* (más szóval érintőtere) egy $p \in \mathcal{M}$ pontban pedig azokból a *v* vektorokból áll, amelyek merőlegesek mindegyik normálvektorra.

$$\mathcal{T}_p = \{ v : v \perp \nabla\rho_i \mid i = 1, \dots, n-k \}$$

Példa – görbe és felület érintőtere




A felület érintőtere az *x* pontban egy érintősík, ugyanakkor a felületen haladó *γ(t)* görbe érintőteréhez az ugyanebben a pontban megadott *v* érintővektor tartozik.

Sokaságok irányíthatósága

Egy $\mathcal{M}$ sokaság irányítható, ha minden pontjában meg tudunk adni érintővektorokat valamely irányban, és ha ezek az érintővektorok az adott irányban „folytonosan változnak" a sokaságon haladva.

Algebrai értelemben ez azt jelenti, hogy ha megadjuk egy vektortér két lehetséges bázisát, akkor az irányítás a két féle bázisosztály valamelyike lesz.

Így, ha a $V$ vektortér két bázisa

$$v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

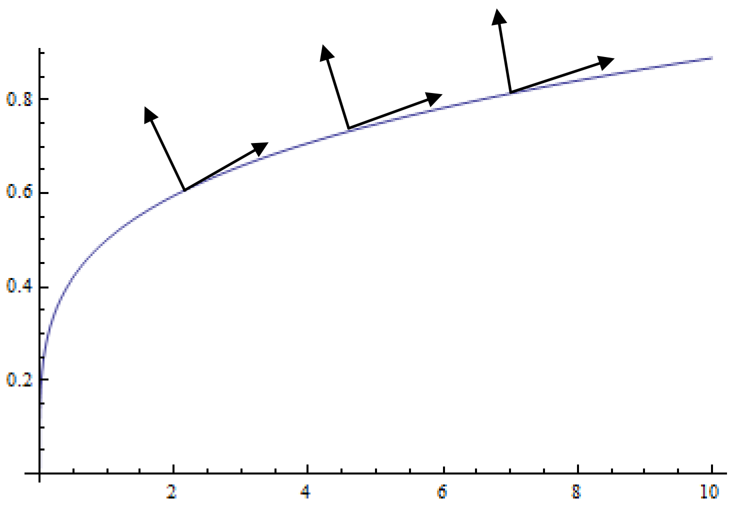
illetve

$$w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\},$$

akkor ezek pontosan akkor adják a vektortér ugyanolyan irányítását, ha a két bázis közötti áttérési mátrix determinánsa pozitív.

Ha $v = A\,w$ és $v \sim w \;\Rightarrow \det(A) > 0$

Egy görbe, mint sokaság lehetséges irányítása:




A fenti görbén megadtunk a pontokban érintő – és – normálvektorokat egy rögzített irányban, amelyet a sokaságon „folytonosan" tudunk végigfuttatni – az eredeti irányítást megőrizve - , így ez egy lehetséges irányítás.

Integrálás sokaságokon

Általános Stokes tétel

Az általános Stokes tétel azt mondja ki, hogy egy differenciálforma integrálja az integrálási tartomány határán megegyezik a differenciálforma külső deriváltjának az integráljával a tartomány belsejében.
Formálisan:

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega$$

A Stokes tételt felhasználva könnyen megoldhatjuk a következő feladatot:

Tekintsük az $F(x, y, z) = (x, 2y, 5z)$ vektormezőt.

Számoljuk a vektormezőnek az alábbi a tartományra vett felületi integrálját:

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 \ \leq \ r^2\}$$

Ennél a feladatnál $\omega$ egy vektormező, és ennek a differenciálformának a külső deriváltja a divergencia.

$$\omega \ \to F$$
$$d\omega \ \to div(F)$$

A Stokes tételből megkapjuk a divergencia tételt:

$$\iiint_M div(F) dxdydz = \iint_{\partial M} F \ \cdot \underline{n} \ dS$$

Így a tétel felhasználásval elég a vektormező divergenciáját meghatározni, majd ezt integrálni a megadott sokaságon, azaz a gömbön.

A vektormező divergenciája:

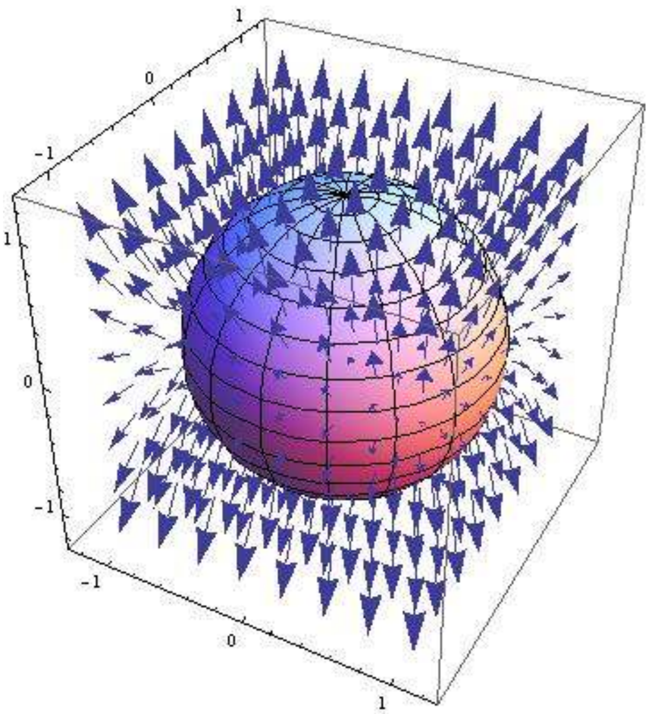
$$div(F) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial 2y}{\partial y} + \frac{\partial 5z}{\partial z} = 1 + 2 + 5 = 8$$

Gömbi polárkoordinátákra való áttérés után az előbb kapott mennyiséget integráljuk az $\mathcal{M}$ tartományon:

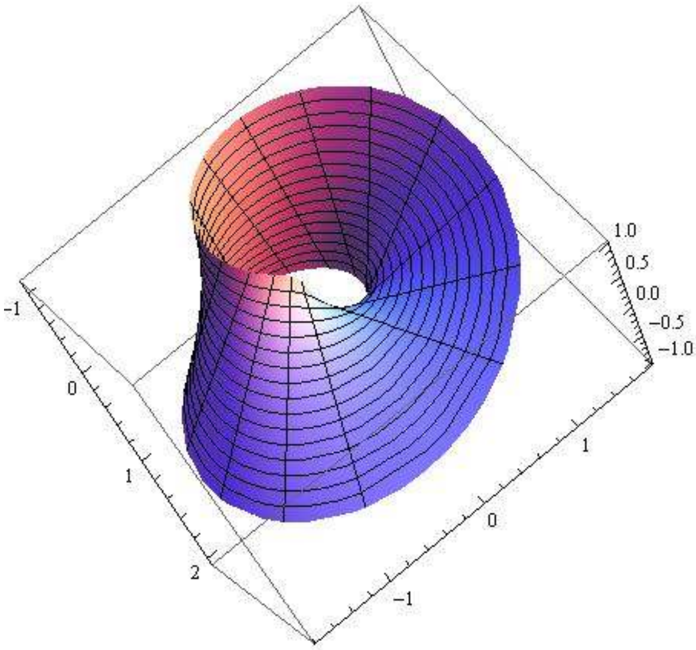
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} 8\, r^2 sin\varphi\, drd\varphi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{8}{3}\, r^3\, sin\varphi d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{8}{3}\, r^3[-cos\pi + cos0]\, d\theta = \int_0^{2\pi} 2\frac{8}{3}\, r^3\, d\theta = \frac{32}{3}\, r^3\pi$$

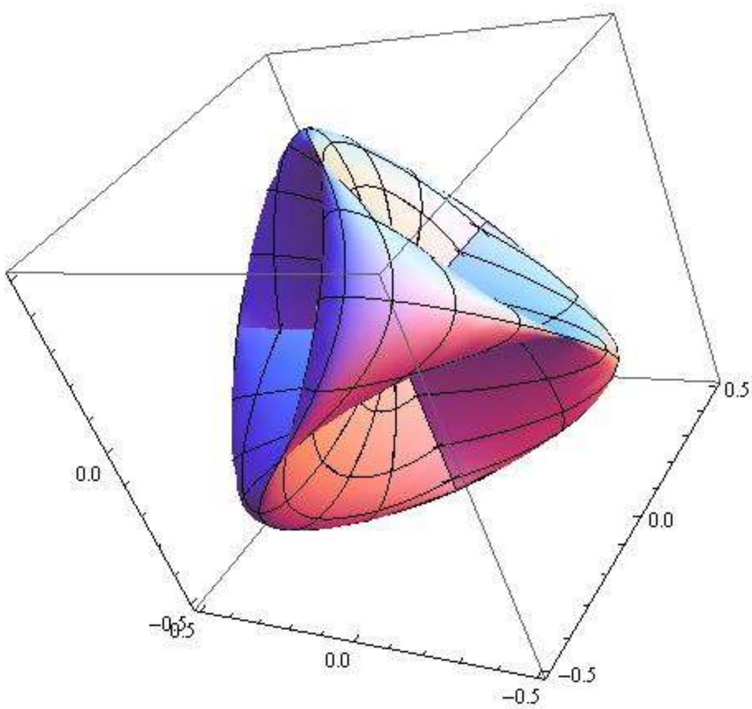
A vektormező és a gömbfelület:



Speciális sokaságok




**1. ábra Möbius szalag**




**2. ábra A Steiner-féle római felület**

A Möbius szalag és a Steiner-féle római felület jellegzetessége, hogy nem irányíthatóak.