

Matematikai Analízis III.

egyetemi jegyzet¹

2015. szeptember 30.

¹Az előadásokat lejegyezte: Marczell Márton

Tartalomjegyzék

1. Vektoranalízis	1
1.1. Vektormezők. Bevezetés	2
1.2. A vektormezők speciális jellemzői	3
1.3. Skalárpotenciál és vektorpotenciál	5
1.4. Vonalintegrál, cirkuláció	7
1.5. Felületi integrál. Fluxus.	8
1.5.1. Felület	8
1.5.2. Felületi integrál	9
1.6. Vektormezőkre vonatkozó tételek	10
1.6.1. Divergencia tétel	10
1.6.2. Stokes tétel	13
1.6.3. Green tétel	14
2. Differenciálgeometria	17
2.1. Sokaságok	18
2.1.1. Paraméteres megadás	18
2.1.2. Topologikus térben	19
2.1.3. Implicit megadás	23
2.1.4. Sokaság irányítása	24

2.2. Differenciálformák	25
2.2.1. Bevezetés és ismételés	25
2.2.2. Elemi formák	26
2.2.3. Általános formák. Külső szorzat	27
2.2.4. Differenciálformák	29
2.2.5. Differenciálformák $\mathbb{R}^3$ -ban	30
2.2.6. Formák integrálása sokaságokon	32

1. fejezet

Vektoranalízis

1.1. Vektormezők. Bevezetés

Definíció 1.1.1. Az $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ típusú (többváltozós, vektorértékű) függvényeket vektormezőnek nevezzük. Ezek 'koordinátafüggvények függvényrendszere'-ként is felírhatók:

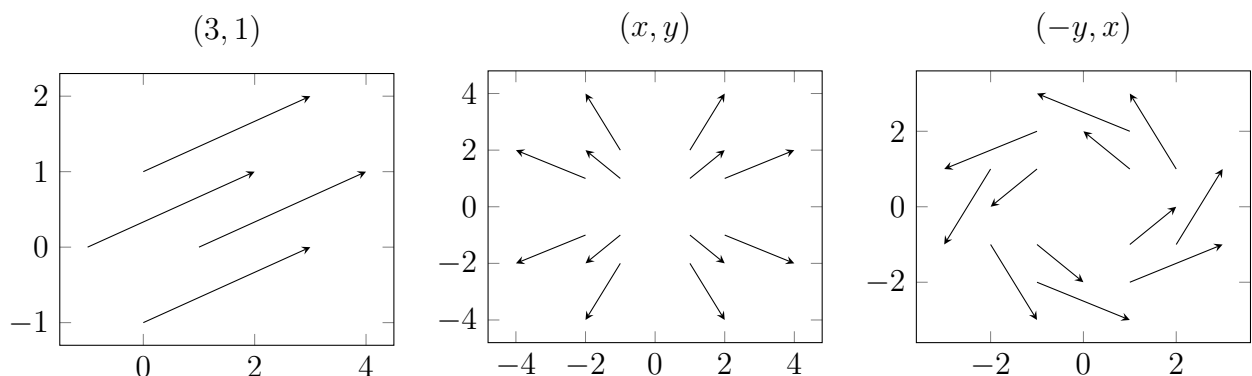
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

ahol $f_1, \dots, f_m$ $\mathbb{R}^n$ -ből $\mathbb{R}$ -be képező függvények.

Egy $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vagy $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektormező könnyen elképzelhető úgy, hogy a tér minden pontjához egy vektort rendel, amely az ábrázoláson az adott pontból indul ki. Ennek fizikai értelme pl. a tér egyes pontjaiban ható erő. A többváltozós valós függvényeket ezért nevezzük skalármezőnek is: a tér minden pontjához egy skalárt rendelnek. Konvenció szerint a skalármezőket kisbetűvel, a vektormezőket nagybetűvel jelöljük.

Példák.

1. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F(x, y) = (3, 1)$: konstans mező
2. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F(x, y) = (x, y)$: az origóból „kifelé mutató” vektorok
3. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F(x, y) = (-y, x)$: „forgatás”
4. $F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F(t) = (\cos t, \sin t)$: az egységkör



1.1. ábra. Vektormezők

Definíció 1.1.2. Vektormező folytonos, ha koordinátafüggvényei folytonosak.

Definíció 1.1.3. Az $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektormező differenciálható az $\mathbf{x} \in D_F$ pontban, ha létezik olyan $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, hogy ha F megváltozását a következőképpen közelítjük: $F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx F(\mathbf{x}) + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \Delta \mathbf{x}$, akkor a közelítés hibájának nagyságrendje kisordó, azaz

$$\lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \left(\frac{\|F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) - \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \Delta \mathbf{x}\|}{\|\Delta \mathbf{x}\|} \right) = 0.$$

Ekkor a vektormező derivált- (Jacobi-) mátrixának a következő mátrixot nevezzük:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = D F = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1 \\ \vdots \\ \text{grad } f_m \end{pmatrix}$$

Differenciálási szabályok

- Linearitás és homogenitás
- Kompozíció differenciálása: Tegyük fel, hogy $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ pedig az $F(a)$ pontban differenciálhatóak. Ekkor $G \circ F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ is differenciálható a -ban, és $D(G \circ F) = D G(F(a)) \cdot D F(a)$. (Ez utóbbi mátrix-mátrix szorzás.)
- Inverz deriváltja: Tegyük fel, hogy $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható az $a \in D_F$ helyen, és a derivált-mátrix nem szinguláris. Ekkor F^{-1} differenciálható $F(a)$ -ban, és $D F^{-1}(F(a)) = (D F(a))^{-1}$ (az inverz deriváltja a derivált-mátrix inverze).
- Szorzási szabály:

$$\text{grad } (fg) = f \text{ grad } (g) + g \text{ grad } (f)$$

A további deriválás a tenzorokhoz vezet, amelyekkel most nem foglalkozunk.

1.2. A vektormezők speciális jellemzői

Definíció 1.2.1. A ∇ (nabla) operátor alatt három dimenzióban a $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ formális vektort értjük.

Tehát egy $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\text{grad } f = \nabla f$.

Definíció 1.2.2. Tegyük fel, hogy $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható. Ekkor a vektormező divergenciáját így definiáljuk:

$$\text{div } (F) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \langle \nabla, F \rangle$$

A divergencia egy számszerű mértéke annak, hogy a vektormező egy adott pontból mennyire "szóródik szét". Ha egy F vektormezőre $\text{div}(F) \equiv 0$, akkor a vektormező *divergencia-mentes*.

Definíció 1.2.3. A fenti F vektormező rotációja

$$\text{rot } (F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \nabla \times F =$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) (= \text{curl } (F)).$$

A rotációvektor fizikai értelmezése: hossza az erőter örvénylésének sebessége, iránya merőleges az örvénylésre.

Ha egy vektormező rotációja 0, akkor *örvénymentesnek* hívjuk.

1. **Példa.** Jellemezzük egy folyó áramlását vektormezővel. Az x tengely a folyás irányába mutat és a folyó közepén fekszik. Az y tengely a folyás irányára merőleges. A folyó szélessége d , ezért $y \in [-d; d]$. A z tengely felfelé mutat. Természetes közelítés lehet, hogy a folyó áramlását a

$$\mathbf{v} = \left(v_0 \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{d^2} \right), 0, 0 \right)$$

vektormező jellemzi. Mit tudunk mondani az áramlás örvényességéről?

Megoldás:

$$\text{rot } (\mathbf{v}) = \left(0, 0, \frac{8yv_0}{d^2} \right),$$

azaz az örvénylés erőssége y -nal egyenesen arányos: annál nagyobb, minél közelebb vagyunk a parthoz. A folyó közepén tehát nincs örvénylés. Az örvénylés iránya mindig

merőleges a z tengelyre. Az örvény erőssége pedig a folyó közepétől kifelé haladva egyre nő.

1. Gyakorlat. Vajon mi lehet a fenti példa fizikai háttere?

Állítás 1.2.4. *A deriválás szorzási szabályai, melyek az újonnan bevezetett speciális jellemzőket tartalmazzák az alábbiak:*

$$\begin{aligned}\operatorname{div} (fF) &= f \operatorname{div} F + \langle F, \operatorname{grad} f \rangle \\ \operatorname{rot} (fF) &= \operatorname{grad} f \times F + f \operatorname{rot} F \\ \operatorname{div} (F \times G) &= \langle G, \operatorname{rot} F \rangle - \langle F, \operatorname{rot} G \rangle\end{aligned}$$

1. Feladat. Igazoljuk ezeket a szorzat-deriválási szabályokat.

1.3. Skalárpotenciál és vektorpotenciál

Definíció 1.3.1. *Az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező potenciális, - pontosabban: skalárpotenciális - ha létezik olyan $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, melyre $F = \operatorname{grad} f$.*

Tegyük fel, hogy F skalárpotenciális. Létezik $f(x, y, z)$ differenciálható függvény, melyre $F = (f'_x, f'_y, f'_z)$. Ekkor divergenciája és rotációja:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} (F) &= \frac{\partial}{\partial x} f'_x + \frac{\partial}{\partial y} f'_y + \frac{\partial}{\partial z} f'_z = \Delta f, \\ \operatorname{rot} (F) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = \cdots = 0.\end{aligned}$$

Tehát egy skalárpotenciális vektormező örvénymentes.

Állítás 1.3.2. *A következő állítások ekvivalensek:*

1. F skalárpotenciális.
2. $\operatorname{rot} (F) = 0$.

3. $\forall \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ zárt görbére

$$\oint_{\Gamma} F(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = 0.$$

Definíció 1.3.3. $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező vektorpotenciális, ha létezik olyan $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező, amelyre $\text{rot } (G) = F$.

Tegyük fel, hogy F vektorpotenciális. Létezik $G = (g_1, g_2, g_3)$ differenciálható vektormező, melyre

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial}{\partial y} g_3 - \frac{\partial}{\partial z} g_2 \\ f_2 &= \frac{\partial}{\partial z} g_1 - \frac{\partial}{\partial x} g_3 \\ f_3 &= \frac{\partial}{\partial x} g_2 - \frac{\partial}{\partial y} g_1. \end{aligned}$$

Ekkor a divergenciája:

$$\text{div } (F) = \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \frac{\partial}{\partial z} f_3 = \dots = 0.$$

Állítás 1.3.4. A következő állítások ekvivalensek:

1. F vektorpotenciális

2. $\text{div } (F) = 0$

Következmény 1.3.5. A fenti két állítás alapján tehát:

1. $\text{rot } (\text{grad } (f)) = 0$.

2. $\text{div } (\text{rot } (F)) = 0$.

3. Könnyen belátható az is, hogy $\text{div } (\text{grad } (f)) = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} = \Delta f$.

Megjegyzés 1.3.6. A rotáció lineáris operátor. Ezért ha $\text{rot } (G_1) = 0$, akkor egy tetszőleges G vektormezőre $\text{rot } (G + G_1) = \text{rot } (G) + 0 = \text{rot } (G)$. Ez azt jelenti, hogy a vektorpotenciál nem egyértelmű: ha $F = \text{rot } (G)$, akkor F -nek G és $G + G_1$ is vektorpotenciálja.

Ha F vektorpotenciális, akkor egy vektorpotenciálját megkaphatjuk a következő módon:

$$G(x, y, z) = \int_0^1 t F(tx, ty, tz) \times (x, y, z) \, dt$$

1.4. Vonalintegrál, cirkuláció

Ebben a fejezetben átismétljük az első évben megtanultakat, majd kibővítjük.

Definíció (Ismétlés.) Adott $C \subset \mathbb{R}^3$ görbe, $C = \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$. Az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos valós függvény vonalintegrálja a C görbe mentén:

$$\int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| \, dt.$$

A fenti képletben $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ a görbe érintővektorát adja meg az adott pontban. Skalármező vonalintegráljának lehetséges fizikai interpretációja a *tömeg*.

Definíció (Ismétlés.) Az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező vonalintegrálja a C görbe mentén:

$$\int_C F(\underline{r}) \, d\underline{r} = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt.$$

Vektormező vonalintegráljának lehetséges fizikai interpretációja *munka*, melyet a vektortérben az adott görbe mentén haladva végzünk.

A fenti definíciót átfogalmazzuk, figyelembe véve $\dot{\gamma}(t)$ jelentését. Legyen $T : C \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy olyan vektormező, mely a görbe minden pontjához egységnyi hosszú érintővektort rendel. Ekkor

$$\int_C F(\underline{r}) \, d\underline{r} = \int_a^b F(x, y, z) \cdot T(x, y, z) \, ds,$$

ahol az integrálbeli szorzás skalárszorzatot jelent. Úgy fogalmazhatunk, hogy a vektormező vonalintegrálja megegyezik érintőirányú komponensének - mint skalármezőnek - vonalintegráljával.

Definíció 1.4.1. Az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező vonalintegrálját a C görbe mentén a vektormező cirkulációjának hívjuk.

A vonalintegrál természetes módon kiterjeszthető magasabb dimenzióra.

Definíció 1.4.2. Az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény (skalármező) vonalintegrálja a $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$; $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ görbe mentén:

$$\int_\Gamma f(x_1, \dots, x_n) \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dots + \dot{x}_n^2(t)} \, dt$$

Megjegyzés. A fenti képletben $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))$ a görbe érintővektorát adja meg az adott pontban. A vonalintegrál értéke független a görbe paraméterezésétől.

1.5. Felületi integrál. Fluxus.

1.5.1. Felület

Ebben a fejezetben definiáljuk, hogy mit értünk felület alatt. Egy speciális esetet már láttunk, kétváltozós függvény gráfként. Adott a síkon egy $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, és egy ezen értelmezett valós függvény, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Az ennek megfelelő felület

$$S := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}.$$

Az általános felület bizonyos értelemben hasonlít a görbék megadásához. Akkor a számegyenes egy $[a, b]$ intervallumát képeztük le egy-egyértelműen egy görbe pontjaiba; síkban vagy térben.

Definíció 1.5.1. Adott egy $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, és egy $s : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható, egy-egyértelmű függvény.

$$s(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in D.$$

A felület s értékkészlete lesz,

$$S = \left\{ (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : (u, v) \in D \right\}.$$

Megjegyzés. Gondolhatunk legegyszerűbb esetként a D tartományra, mint egy kétdimenziós intervallumra, $D = [a, b] \times [c, d]$. A felület pontjait ezen D elemeivel paraméterezzük.

1. *Példa.* A fenti egyszerű eset természetesen leírható az általános keretben. Ekkor

$$s(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in D.$$

2. *Példa.* Az egységsugarú, origó középpontú félgömb felszínének pontjai paraméterezhetők két paraméterrel, a második és harmadik gömbi polárkoordinátának megfelelően. Legyen az u paraméter a pontba mutató vektor és a z tengely pozitív részének szöge, a v paraméter pedig az (x, y) síkba eső vetületnek az x tengely pozitív részével bezárt szöge.

Ekkor

$$\begin{aligned} z &= \cos(u) \\ x &= \sin(u) \cos(v) \\ y &= \sin(u) \sin(v). \end{aligned}$$

1.5.2. Felületi integrál

Definíció 1.5.2. Adott az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos valós függvény, melyre $D \subset D_f$. Az f függvény felületi integrálja az S felület mentén:

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(s(u, v)) |s'_u \times s'_v| \, d(u, v) \quad (1.1)$$

Megjegyzés 1.5.3. A fenti képletben $s'_u \times s'_v$ a felület érintősíkjának normálvektora az adott pontban. Az integrál értéke független a felület paraméterezésétől.

2. Példa. Speciális esetben a felület egy kétváltozós valós függvény felülete: $s(u, v) = (u, v, t(u, v))$, ahol $t : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható kétváltozós függvény. Ekkor

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(u, v, t(u, v)) \sqrt{1 + (t'_u)^2 + (t'_v)^2} \, d(u, v).$$

Igazoljuk ezt. Számoljuk ki (1.1) jobb oldalán szereplő vektoriális szorzatot:

$$s'_u \times s'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & t'_u \\ 0 & 1 & t'_v \end{vmatrix} = (-t'_u, -t'_v, 1),$$

és ennek a vektornak a hossza valóban $\sqrt{1 + (t'_u)^2 + (t'_v)^2}$.

Adott a térben egy vektormező,

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix},$$

ahol $F_1, F_2, F_3 : R \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények az $R \subset \mathbb{R}^3$ tartományon. Feltesszük, hogy $S \subset R$.

Definíció 1.5.4. Az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező felületi integrálja a fenti S felület mentén

$$\iint_S F \, d\mathbf{S} = \iint_D \langle F(s(u, v)), s'_u \times s'_v \rangle \, d(u, v)$$

A vektormező felületi integrálját egy skalárszorzattal definiáltuk, azaz visszavezettük egy skalármező integráljára. Tehát ha a felület egységnyi normálvektorait $\mathbf{n}$ -nel jelöljük, akkor látszik, hogy

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_D F(s(u, v)) \cdot \frac{s'_u \times s'_v}{|s'_u \times s'_v|} \cdot |s'_u \times s'_v| \, d(u, v) = \\ &= \iint_D F(s(u, v)) \cdot (s'_u \times s'_v) \, d(u, v) = \iint_S F \, d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Definíció 1.5.5. Adott egy $S \subset \mathbb{R}^3$ sima felület, ennek minden pontjában $\mathbf{n}(x, y, z) = (n_1(x, y, z), n_2(x, y, z), n_3(x, y, z))$ egység hosszú normálvektor. Egy $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező felületi integrálját:

$$\oiint_{\partial M} F \, d\mathbf{S} = \oiint_{\partial M} F \cdot \mathbf{n} \, dS$$

vektormezőnek a felületre vett fluxusának nevezzük.

2. Gyakorlat. Legyen $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ és S az origó középpű, r sugarú gömb felszíne. Számoljuk ki F fluxusát S -re nézve.

3. Gyakorlat. Legyen $F(x, y, z) = \mathbf{i}$, és S az $x + y + z = 1$ sík első tér-nyolcadba eső része. Határozzuk meg a vektortér fluxusát.

Értelmezhetjük egy kétdimenziós $F(x, y)$ vektormező fluxusát is, egy Γ síkgörbére nézve:

$$\phi = \int_{\Gamma} F(x, y) \, ds$$

1.6. Vektormezőkre vonatkozó tételek

1.6.1. Divergencia tétel

Tétel 1.6.1 (Divergenciatétel / Gauss-Osztrogradszkij-tétel). Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ egy zárt tér-rész, és ∂M a tér-részt határoló (zárt) felület. Tegyük fel, hogy ∂M pontjaiban

adottak az $\mathbf{n}(x, y, z) = (n_1(x, y, z), n_2(x, y, z), n_3(x, y, z))$ egység hosszú, a térrészből kifelé mutató normálvektorok. Ekkor az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezőre

$$\iint_M \operatorname{div} F(x, y, z) \, d(x, y, z) = \oiint_{\partial M} F \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Azaz a térrészen vett térfogati integrál megegyezik a vektormezőnek a határoló felületre vett felületi integráljával (ld. 1.5.4).

Bizonyítás. (vázlat): Tegyük fel, hogy M egyszerű térrész, azaz minden, valamelyik tengellyel párhuzamos egyenessel vett metszése csak egyetlen szakasz, vagy egy pont. Azt kell belátnunk, hogy

$$\begin{aligned} \iiint_M \operatorname{div} F &= \iiint_M \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) d(x, y, z) = \\ &= \oiint_{\partial M} (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3) \, dS \end{aligned}$$

Ez pedig tagonkénti egyenlőséggel bizonyítható. Ebből most a harmadik tagot fogjuk belátni:

$$\iiint_M \frac{\partial f_3}{\partial z} d(x, y, z) = \oiint_{\partial M} f_3 n_3 \, dS.$$

Írjuk fel M -et az (x, y) sík szerinti normáltartományként: $b(x, y) < z < t(x, y)$ ahol $(x, y) \in D$. Írjuk fel a határhalmazt három tartomány uniójaként n_3 előjelének megfelelően:

$$n_3 > 0 : M_{top}, \quad n_3 = 0 : M_{side}, \quad n_3 < 0 : M_{bottom},$$

így $\partial M = \partial M_{top} \cup \partial M_{side} \cup \partial M_{bottom}$. Számoljuk ki a résztartományokra vett felületi integrálokat:

$$n_3 > 0 : \partial M_{top} = \{(u, v, t(u, v)) : (u, v) \in D\}:$$

$$\mathbf{n} = (-t'_u, -t'_v, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (t'_u)^2 + (t'_v)^2}} \Rightarrow n_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + (t'_u)^2 + (t'_v)^2}}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} \iint_{\partial M_{top}} f_3 n_3 \, dS &= \iint_{\partial M_{top}} f_3(u, v, t(u, v)) n_3(u, v, t(u, v)) \sqrt{1 + (t'_u)^2 + (t'_v)^2} \, d(u, v) = \\ &= \iint_{\partial M_{top}} f_3(u, v, t(u, v)) \, d(u, v) \end{aligned}$$

$n_3 = 0 : \partial M_{side}$: Itt $n_3 = 0$, ezért az integrál is 0.

$n_3 < 0 : \partial M_{bottom} = \{(u, v, b(u, v))\}$:

$$\iint_{\partial M_{bottom}} f_3 n_3 \, dS = \dots = - \iint_D f_3(u, v, b(u, v)) \, d(u, v)$$

Tehát a teljes tartományon vett integrál az egyes résztartományokon vett integrál összege:

$$\iint_{\partial M} f_3 n_3 \, dS = \iint_D f_3(u, v, t(u, v)) - f_3(u, v, b(u, v)) \, d(u, v)$$

A teljes M -re vett térfogati integrált pedig normáltartományon való integrálással számoljuk:

$$\begin{aligned} \iiint_M \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \iint_D \int_{b(x, y)}^{t(x, y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) \, dz \, d(x, y) = \\ &= \iint_D f_3(x, y, t(x, y)) - f_3(x, y, b(x, y)) \, d(x, y) \end{aligned}$$

a Newton-Leibniz-formula miatt. Ez láthatóan megegyezik a felületi integrálok összegével.
□

3. Példa. $F(x, y, z) = (x, y, z)$ divergenciája $\operatorname{div} F = 3$. Legyen M az origó körüli r sugarú gömb felső fele. A térfogati integrál:

$$\iiint_M 3 \, d(x, y, z) = 3 \frac{2}{3} r^3 \pi = 2r^3 \pi$$

A felületet két részre osztjuk: $S = S_1 \cup S_2$, ahol S_1 a félgömb felülete és S_2 az alsó körlap. Ekkor az S_1 felületen $\mathbf{n}_1(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, z)$ és az S_2 felületen $\mathbf{n}_2(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Az S_1 -en vett integrál:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (x, y, z) \cdot \frac{1}{r}(x, y, z) \, dS &= \iint_{S_1} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} \, dS = \\ &= \iint_{S_1} r \, dS = r A(S_1) = r 2r^2 \pi = 2r^3 \pi. \end{aligned}$$

Az S_2 -n vett integrál:

$$\iint_{S_2} (x, y, z) \cdot (0, 0, -1) \, dS = \iint_{S_2} -z \, dS = 0.$$

A két integrál összege pedig valóban megegyezik a térfogati integrállal:

$$\iint_{S_1 \cup S_2} F \, dS = 2r^3 \pi$$

1.6.2. Stokes tétel

Tétel 1.6.2 (Klasszikus Stokes-tétel). Vegyünk egy $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezőt és egy $M \subset \mathbb{R}^3$ felületet, amelyet egy $\partial M = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3 : t \in [a, b]\}$ sima, zárt görbe határol. A felület normálvektorait jelölje $\mathbf{n}$. Ekkor

$$\iint_M \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial M} F \cdot T \, ds. \quad (1.2)$$

Itt T jelöli a görbe pontjaihoz húzott egységnyi hosszú érintővektorokat, amelyeket úgy számolhatunk, hogy

$$T = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

Megjegyzés 1.6.3. Később látni fogjuk, hogy a Newton-Leibniz formula, a Divergencia- és a Stokes-tétel ugyanazon absztrakt tétel speciális esetei. Annyit azonban már most észrevehetünk, hogy mindhárom tétel megfogalmazható nagy vonalakban így: „A függvény deriváltjának integrálja egy tartományon egyenlő a függvénynek a tartomány határán vett megváltozásával”.

Definíció 1.6.4. A fenti integrállal megadott mennyiséget az F vektormező cirkulációjának nevezzük.

4. Példa. Legyen $F(x, y, z) := (y, z, x)$, és M az egységgömb felső fele. Ennek paraméterezése:

$$M := \{s(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} : \varphi \in [0, \pi/2], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Ekkor tehát $\partial M = \{\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) : t \in [0, 2\pi]\}$ egységkör az (x, y) síkon. A (1.2) egyenlet jobb oldala:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial M} F(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (\sin t, 0, \cos t), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle \, dt = - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = -\pi. \end{aligned}$$

(1.2) egyenlet bal oldalán a normálvektor $\mathbf{n} = (x, y, z)$ (jelen esetben azért nem kell a hosszával elosztani, mert az egységgömb felületén vagyunk). Számoljunk:

$$\operatorname{rot} (F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1).$$

A (1.2) egyenlet bal oldala:

$$\begin{aligned} \iint_M \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_M \langle (-1, -1, -1), (x, y, z) \rangle \, dS = - \iint_M (x + y + z) \, dS = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\sin \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta + \cos \varphi) \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi = -\pi \end{aligned}$$

A $\sin \varphi$ szorzó a polárkoordinátás áttérés Jacobi-determinánsa.

1.6.3. Green tétel

A harmadik klasszikus tétel speciális esetként levezethető a Stokes tételből.

Tétel 1.6.5 (Green tétel). *Adottak a P és Q kétváltozós valós függvények valamely $D \subset \mathbb{R}^2$ tartományon. Feltesszük, hogy D határa sima, ez a C zárt görbe. Ekkor*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y) = \oint_C (P \, dx + Q \, dy). \quad (1.3)$$

A jobboldalon szereplő integrálok kiszámítása:

$$\oint_C P(x, y) \, dx = \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt, \quad \oint_C Q(x, y) \, dy = \int_a^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt.$$

2. Feladat. Igazoljuk a fenti tételt a Stokes tétel alapján. Javasolt "szereposztás":

$F(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$, valamint

$$S = \{(x, y, 0) : (x, y) \in D\}, \quad \mathbf{n} = (0, 0, 1), \quad C = \{(x(t), y(t), 0) : t \in [a, b]\}.$$

5. **Példa.** Két speciális esetet tekintünk. Legyen elsőként $P(x, y) = -y$ és $Q(x, y) = 0$, majd $P(x, y) = 0$ és $Q(x, y) = x$. Ekkor a (1.3) egyenlet így írható

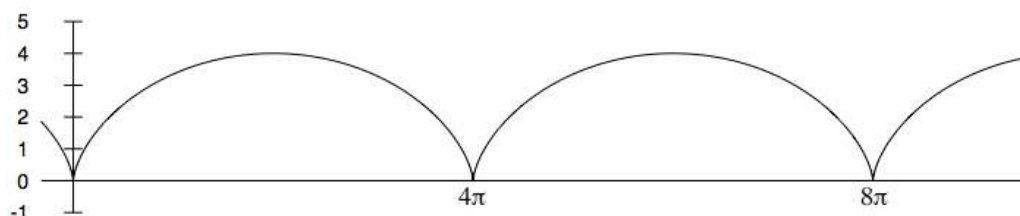
$$\begin{aligned} \iint_D 1 \, d(x, y) &= \oint_C -y \, dx \\ \iint_D 1 \, d(x, y) &= \oint_C x \, dy \end{aligned}$$

A baloldalon mindkét egyenletben a C görbe által közrezárt tartomány területe van. Ezért

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_C (x \, dy - y \, dx) = \oint_C x \, dy = - \oint_C y \, dx \quad (1.4)$$

6. Példa. Határozzuk meg egy cikloid ív alatti területet. A görbét meghatározó egyenletek:

$$\begin{aligned}x(t) &= r(t - \sin(t)) \\y(t) &= r(1 - \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$



1.2. ábra. Cikloid, $r = 2$ paraméter mellett.

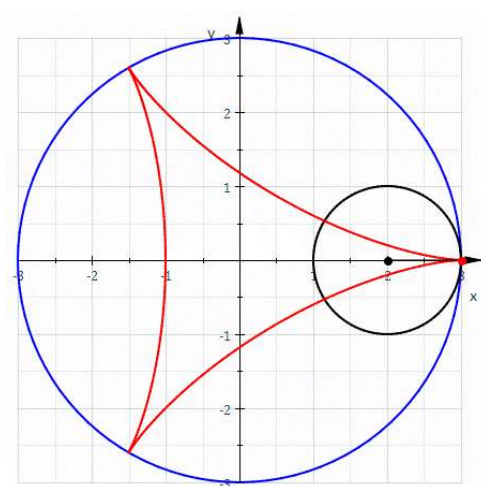
A teületszámításra az $A(D) = -\oint_C y \, dx$ képletet fogjuk használni. Mivel a területet határoló vízszintes szakaszon $y = 0$, ezért csak az ív mentén kell integrálnunk. Felhasználjuk, hogy itt $dx = r(1 - \cos(t)) \, dt$. Ezért

$$\begin{aligned}A(D) &= -\oint_C y \, dx = \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos(t))^2 \, dt = \\&= r^2 \left(\int_0^{2\pi} 1 \, dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos(t) \, dt + \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \, dt \right) = r^2 (2\pi + 0 + \pi) = 3\pi r^2.\end{aligned}$$

3. Feladat. Számoljuk ki a (1.4) képlet alapján egy deltoid területét:

A deltoidot határoló görbe egyenlete:

$$\begin{aligned}x(t) &= 2 \cos(t) + \cos(2t) \\y(t) &= 2 \sin(t) - \sin(2t)\end{aligned}$$



2. fejezet

Differenciálgeometria

2.1. Sokaságok

2.1.1. Paraméteres megadás

Definíció 2.1.1 (Paraméteresen megadott sokaság). Az $M \subset \mathbb{R}^n$ részhalmaz k -dimenziós sokaság ($k \leq n$), ha $\forall p \in M$ -hez

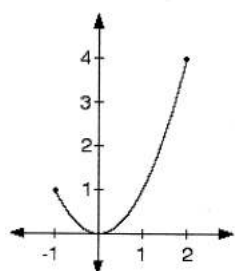
- $\exists U$ környezete,
- és $\exists F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés
- és $\exists V \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz,

hogy $F(V) = U \cap M$ és a DF Jacobi mátrix teljes rangú, azaz a leképezés egy-egy értelmű.

Ezt úgy lehet értelmezni, hogy az M halmaz lokálisan olyan, mintha k dimenziós volna. Például egy síkbeli vagy térbeli görbe, amely egydimenziós (egy paraméterű) sokaság. Másik péld egy térbeli felület, amely kétdimenziós (két paraméterű) sokaság. Láthatjuk, hogy a sokaság dimenziója megegyezik a paraméterezéskor használt paraméterek számával.

Fontos megjegyeznünk, hogy V mindig nyílt halmaz. Ebből következik, hogy pl. csak olyan görbe lehet sokaság, amely nem tartalmazza a végpontjait, mert a végpontok környezetei már nem úgy viselkednek, mint egydimenziós intervallumok. Ugyanígy csak a határoló görbét nem tartalmazó felület számít sokaságnak.

7. Példa. Egy síkbeli görbe pontjai 1 dimenziós sokaságot adnak $\mathbb{R}^2$ -ben.

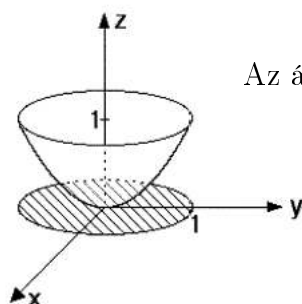


Az ábrán látható vonal esetén:

$$F : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(t) = (t, t^2), \quad V = (-1, 2).$$

A Jacobi mátrix $\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ valóban teljes rangú.

8. Példa. Egy térbeli felület pontjai 2-dimenziós sokaságot adnak $\mathbb{R}^3$ -ban.



Az ábrán látható felület esetén:

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y) = (x, y, x^2 + y^2),$$

$$V = \{x^2 + y^2 < 1\}.$$

A Jacobi mátrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{pmatrix}$ mindig teljes rangú.

Definíció 2.1.2. $M \subset \mathbb{R}^n$ lezárása a torlódási pontjainak halmaza:

$$\overline{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists (x_n) \subset M, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \right\}.$$

Megjegyzés 2.1.3. Egy halmaz lezárása tartalmazza a halmaz pontjait: $M \subset \overline{M}$, hiszen minden $x \in M$ esetén a konstans $x_n \equiv x$ sorozat határértéke x .

Definíció 2.1.4. A k -dimenziós M sokaság határa $\partial M = \overline{M} \setminus M$.

4. Gyakorlat. Mi lesz a fenti két Példa-beli sokaság határa?

4. Feladat. A fenti definíció értelmében hogyan tudjuk az egységgör-vonalat egydimenziós sokaságként reprezentálni? Mi lesz a határa?

Igazolható, hogy ha M k -dimenziós sokaság, akkor ∂M vagy $k - 1$ dimenziós sokaság, vagy üres halmaz.

Megjegyzés 2.1.5. Itt kell megjegyeznünk, hogy 0 dimenziós sokaságnak egy véges elemszámú diszkrét pontokból álló halmazt nevezünk. Tehát az egy dimenziós sokaság (görbe) határa 0 dimenziós sokaság lesz, ha a görbe nem zárt.

2.1.2. Topologikus térben

A sokaságok absztraktabb, általánosabb definíciójának megfogalmazásához legalább érintőlegesen beszélnünk kell a topológikus terekről.

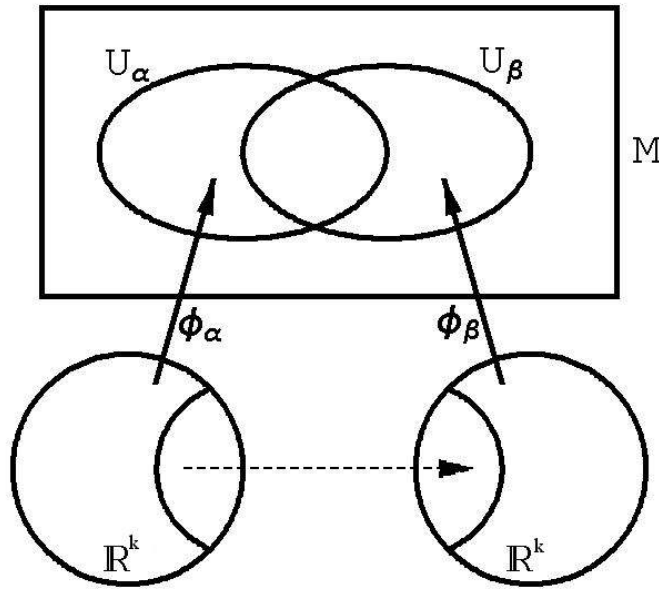
Topologikus terek - kitérő. A topológikus tér egy absztrakt fogalom. Hallhattunk már olyan terekről, amelyekben létezik metrika (metrikus tér), vagy létezik norma (normált tér), vagy skalárszorzat (euklideszi tér). A topologikus terekben egyiknek a létezése sincs feltéve. A topologikus térben csupán az van feltéve, hogy a T halmazon létezik egy $\mathcal{U} \subset 2^T$ halmazrendszer, amely a T -beli nyílt halmazokat tartalmazza. Az $\mathcal{U} \subset 2^T$ halmazrendszer bizonyos axiómáknak eleget tesz (melyeket nyílt halmazoktól 'elvárunk').

Definíció 2.1.6. Egy M halmaz nyílt lefedése az U_α nyílt halmazokból álló (U_α) halmazrendszer, ha minden $p \in M$ -re van olyan α , hogy $p \in U_\alpha$.

Definíció 2.1.7. $M \subset \mathbb{R}^n$ egy k dimenziós sokaság, ha létezik egy nyílt (U_α) lefedése, továbbá minden α -hoz

- $\exists \phi_\alpha : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, melyre
- $\exists V \in \mathbb{R}^k$ nyílt gömb, hogy $\phi_\alpha(V) = U_\alpha$
- ϕ_α bijekció V és U_α között (egy-egy értelmű)

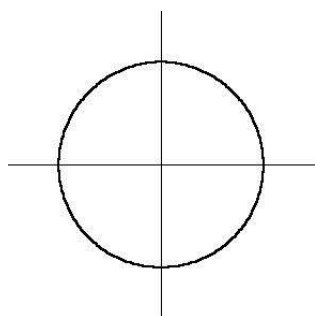
Feltesszük továbbá, hogy ezek a leképezések "simán" változnak, azaz ha $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, akkor a $\phi_\alpha^{-1} \Big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ megszorítást véve a $\phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenciálható, egy-egy értelmű leképezés. Ekkor a $p \in U_\alpha$ pont lokális koordinátái (k dimenzióban) $\phi_\alpha^{-1}(p) \in \mathbb{R}^k$.



Definíció 2.1.8. Az (U_α, ϕ_α) párt lokális térképnek, az egész M -et lefedő térképek rendszerét $(\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in I \text{ indexhalmaz}\})$ atlasznak nevezzük.

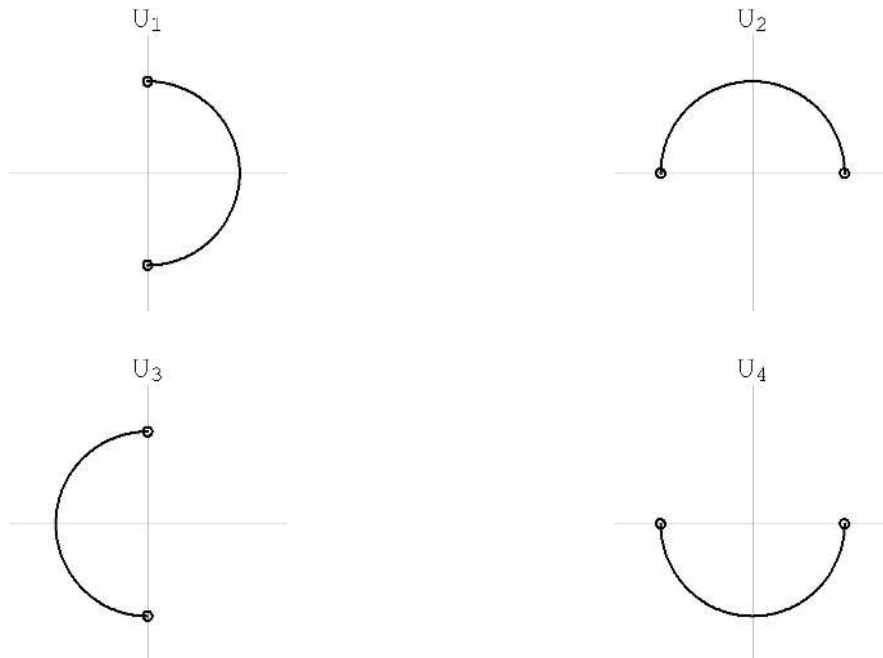
Ezek az elnevezések szemléletesen mutatják, hogy mihez hasonlítható mindez. Képzeljük el, hogy egy lapozható autóatlaszt használunk. Ekkor a térkép lapjai és az elénk táruló táj pontjai között egy-egy értelmű leképezés van. Az összes térképlap tájbeli megfelelőjének uniója az M tájat teljesen lefedi. Az egyes térképlapok jobb szélső sávján található terület megtalálható a szomszédos térképlap bal szélén is, és így tovább. Amikor felnézünk a térképről a tájra, akkor az egyik lap széléről a ϕ_α leképezéssel „átmegyünk” az $U_\alpha \cap U_\beta \in M$ valóságos területre, ahonnan a ϕ_β^{-1} segítségével visszajövünk a másik térképlap másik szélére.

9. Példa.



S^1 -gyel jelöljük a síkbeli egységkörvonalat, mely egy dimenziós sokaság.

Ehhez először egy nyílt lefedést kell megadnunk. Két félkör uniója nem lenne nyílt lefedés, mert ha a két görbe a végpontjait is tartalmazza, akkor nem nyílt halmazok. Ha pedig nem tartalmazza, akkor nem fedtük le az egész egységkört.



Ezért vegyük a felső félkört (U_1), az alsó félkört (U_2), a jobb félkört (U_3) és a bal félkört (U_4) és ezeknek metszeteiből építsük fel az egységkört! A térképekhez tartozó

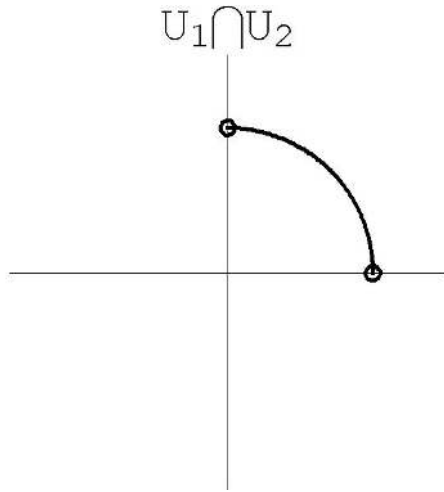
$\phi_{1,2,3,4} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezések:

$$\phi_2(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$$

$$\phi_1(x) = (\sqrt{1-x^2}, x)$$

$$\phi_4(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$$

$$\phi_3(x) = (-\sqrt{1-x^2}, x)$$



Ekkor például az $U_1 \cap U_2$ halmazon, azaz a jobb felső síknegyedben azt írhatjuk fel, hogy

$$\phi_2^{-1}(\phi_1(x)) = \phi_2^{-1}(x, \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2},$$

és ez a leképezés valóban differenciálható.

5. Feladat. Hasonló módon igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^3$ -ban az S_2 egységgömb felülete kétdimenziós sokaság.

10. **Példa.** Ebben a példában a valós projektív teret fogjuk definiálni. Tekintsünk az $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ halmazon egy relációt:

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (y_0, y_1, \dots, y_n), \quad \text{ha} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} : y_k = \lambda x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Tehát például $n = 2$ esetén

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) &\sim (2, 4, 6) \\ &\sim (-2, -4, -6) \\ &\not\sim (2, 1, 3) \end{aligned}$$

Ez ekvivalencia reláció. Az n -dimenziós projektív tér P^n az ekvivalenciaosztályokat jelenti. Az $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ -nel ekvivalens elemeket így jelöljük:

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n).$$

Igazolható, hogy P^n n -dimenziós sokaság.

A módszert $n = 2$ esetben mutatjuk be. P^2 egy nyílt lefedését kapjuk az alábbi halmazzal

$$U_0 = (1 : x : y), \quad U_1 = (x : 1 : y), \quad U_2 = (x : y : 1),$$

tehát pl. U_0 -ban lesznek azok az elemek, melyek első koordinátája nem 0, stb. A megfelelő leképezések $\phi_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $k = 0, 1, 2$, így adhatók meg:

$$\phi_0(x, y) = (1 : x : y), \quad \phi_1(x, y) = (x : 1 : y), \quad \phi_2(x, y) = (x : y : 1).$$

Ezek kompatibilitását le kell ellenőriznünk. $U_0 \cap U_1$ lesz azon elemek halmaza, melyek első és második eleme különbözik 0-tól. Ekkor

$$\phi_1^{-1}\phi_0(x, y) = \phi_1^{-1}(1 : x : y) = \phi_1^{-1}\left(\frac{1}{x} : 1 : \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right),$$

ezért $\phi_1^{-1}\phi_0$ Jacobi mátrixa

$$D\phi_1^{-1}\phi_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ \frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix},$$

és ez valóban mindig teljes rangú az $\{x \neq 0\}$ halmazon. $\square$

5. Gyakorlat. Igazoljuk, hogy a feti példában szereplő $\sim$ valóban ekvivalencia reláció.

2.1.3. Implicit megadás

Definíció 2.1.9 (Implicit megadású sokaság). $M \in \mathbb{R}^n$ k dimenziós sokaság, ha megadható $n - k$ darab n -változós függvény, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, melyek előállítják a halmazt: M a ρ_i függvények nulltereinek metszete:

$$M = \bigcap_{i=1}^{n-k} \{\rho_i = 0\}.$$

Feltesszük, hogy a ρ_i függvények gradiensei lineárisan függetlenek, azaz gradiensvektorokból képzett mátrix teljes rangú:

$$\begin{pmatrix} \text{grad } \rho_1 \\ \text{grad } \rho_2 \\ \vdots \\ \text{grad } \rho_{n-k} \end{pmatrix}$$

Példa: Az egységkör egy dimenziós sokaság $\mathbb{R}^2$ -ben. Ennek implicit megadása:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

Példa: Adott két háromváltozós függvény, $\rho_1(x, y, z)$ és $\rho_2(x, y, z)$. Tekintsük az alábbi halmazt:

$$\{(x, y, z) : \rho_1(x, y, z) = 0, \quad \rho_2(x, y, z) = 0\}.$$

Mindkét függvény nulltere egy-egy felület a térben ("szintfelületek"). Ezek valóban egy görbe mentén metszik egymást. Eddigi ismereteink alapján ez valóban 1-dimenziós sokaság.

11. *Példa.* Legyen az S^1 görbe olyan $\mathbb{R}^3$ -beli egységkör, mely az (x, y) síkba esik. A görbét impliciten megadó függvények:

$$\rho_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \text{ (gömb)} \quad \rho_2(x, y, z) = z \text{ (sík)}$$

$$S^1 = \{\rho_1 = 0\} \cap \{\rho_2 = 0\}.$$

Ekkor $\text{grad } \rho_1 = (2x, 2y, 2z)$ és $\text{grad } \rho_2 = (0, 0, 1)$, valóban függetlenek.

Definíció 2.1.10. Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ k dimenziós, impliciten megadott sokaság. Ekkor a $p \in M$ ponthoz tartozó N_p normáltérnek a ρ_i függvények gradiensei által az adott pontban kifeszített vektorteret nevezzük. Ezért $\dim N_p = n - k$. A p -hez tartozó tangenstér vagy érintőtér $T_p = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \perp N_p\}$, $\dim T_p = k$.

12. *Példa.* Ha $S^1 = \{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ és $p = (x_0, y_0) \in S^1$, akkor $\text{grad } \rho = (2x_0, 2y_0)$. Tehát N_p az (x_0, y_0) helyvektorral párhuzamos vektorokat jelenti. Ezért T_p bázisának vehetjük az $(y_0, -x_0)$ vektort.

Az előző példában T_p bázisának az ellentétes $(-y_0, x_0)$ vektort is választhattuk volna. Így T_p kétféle irányítását kapjuk. Ezért beszélnünk kell az irányításokról.

2.1.4. Sokaság irányítása

Legyen V egy k dimenziós vektortér. Ebben kiválasztunk egy bázist, jelölje $[v] = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$. Ekkor minden másik $[w] = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ bázisra

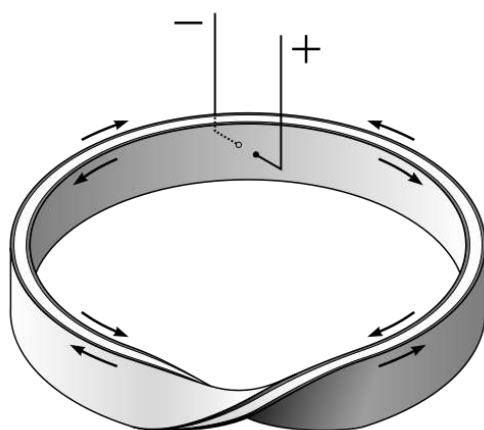
$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} \mathbf{w}_j, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Az $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = (a_{ij})$ mátrix nem szinguláris, azaz $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} \neq 0$. Ezért V -ben egy bázist rögzítve a vektortér minden bázisát két osztályra oszthatjuk aszerint, hogy az áttérési mátrix determinánsa pozitív vagy negatív. Ezzel a bázisoknak egy partícióját adjuk, így az egy osztályba került bázisok között ekvivalencia reláció van: egymáshoz képest mindannyian a

pozitív determinánsú osztályba kerülnek. Ekkor aszerint, hogy melyik osztályt választjuk ki, a vektortér kétféle irányítását különböztetjük meg.

Definíció 2.1.11 (Vektortér irányítása). Legyen a V vektortérben vett $[v]$ és $[w]$ bázis közötti áttérési mátrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, azaz egy $\mathbf{x} \in V$ vektorra $\mathbf{x}_{[w]} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x}_{[v]}$. Ekkor $[v]$ és $[w]$ azonos irányítású, ha $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} > 0$.

Definíció 2.1.12. Egy sokaság irányítható, ha minden pontban megválsztható a normál-tér irányítása úgy, hogy az folytonosan változzon a sokaság mentén.



A Möbius-szalag például nem irányítható.

2.2. Differenciálformák

2.2.1. Bevezetés és ismételés

Szeretnénk $\mathbb{R}^n$ -ben egy k dimenziós sokaságon integrálni. Hasonlóan ahhoz, ahogy vonal mentén vagy felületen már integráltunk. Ehhez szükség van arra, hogy k -dimenziós mértéket használjunk a sokaságon. Erre szolgálnak majd a differenciálformák. Ezek bevezetését fokozatosan fogjuk megtenni.

Ismételés. A síkon a $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ és a $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe $T = x_1 y_2 - y_1 x_2$, ami felírható úgy, mint a következő determináns:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Állítás 2.2.1. Adottak a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok, ezeket egy $n \times k$ dimenziós mátrixba rendezzük

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_k \end{pmatrix}$$

Ekkor az általuk kifeszített k -dimenziós paralelotóp k dimenziós mértéke:

$$V = \sqrt{\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}})}.$$

Példa: Ha $k = 1$, azaz csak egy vektorunk van, akkor ennek hossza (mértéke):

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n v_j^2} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}},$$

tehát a fenti képletet kapjuk.

Bizonyítás. (Vázlat) Ha $k = n$ (azaz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ négyzetes mátrix), akkor $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \det \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$, és a determináns multiplikatív tulajdonsága alapján

$$\sqrt{\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}})} = \sqrt{\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \cdot \det \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \sqrt{(\det \underline{\underline{\mathbf{A}}})^2} = |\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}|,$$

tehát a tétel igaz. Ha $k < n$, akkor kiindulunk $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}})$ felírásából:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \begin{pmatrix} |v_1|^2 & \langle v_1, v_2 \rangle & \dots & \langle v_1, v_k \rangle \\ \langle v_2, v_2 \rangle & |v_2|^2 & \dots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \dots & \langle v_{k-1}, v_k \rangle & |v_k|^2 \end{pmatrix}$$

A fenti mátrix elemei – vektorok hossza és vektorok skaláris szorzata – nem változnak meg térbeli forgatás hatására. Tehát a vektorokat elforgatva úgy, hogy csak az első k db koordinátájuk legyen 0-tól különböző, visszajutunk az $n = k$ speciális esethez. $\square$

2.2.2. Elemi formák

Elemi formák $\mathbb{R}^3$ -ban. A könnyebb érthetőség kedvéért azzal kezdjük, ami "látható".

Az elemi 1-forma egy olyan leképezés, ami a vektorhoz hozzárendeli az egyes koordinátatengelyekre vett vetületének hosszát. Ennek megfelelően három különböző elemi 1-forma van, ezeket dx_1 , dx_2 , dx_3 jelöli. Nevezetesen, $dx_1, dx_2, dx_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, és ha $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, akkor

$$dx_1(\mathbf{v}) = v_1, \quad dx_2(\mathbf{v}) = v_2, \quad dx_3(\mathbf{v}) = v_3.$$

Az elemi 2-forma egy olyan leképezés, ami két vektorhoz hozzárendeli az egyes koordináta síkokra vett vetületek által meghatározott paralelogramma területét. Ennek megfelelően

három különböző elemi 2-forma van, ezeket $dx_1 \wedge dx_2$, $dx_2 \wedge dx_3$, $dx_1 \wedge dx_3$ jelöli. Nevezetesen, ha $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, akkor

$$dx_1 \wedge dx_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \quad dx_1 \wedge dx_3(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \quad dx_2 \wedge dx_3(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Elemi formák $\mathbb{R}^n$ -ben. A továbbiakban az n -dimenziós vektorokat és koordinátáikat így fogjuk jelölni: $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Elemi 1-formákból n különböző létezik: $dx_1, \dots, dx_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $dx_j(\mathbf{v}) = v_j$. Ezek a $\mathbf{v}$ vektorhoz a j -edik koordináta irányába eső vetületének hosszát adják meg.

Elemi 2-forma megadja a két vektor által kifeszített paralelogramma (x_i, x_j) síkra eső vetületének területét.

$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad dx_i \wedge dx_j(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} v_i & w_i \\ v_j & w_j \end{vmatrix}, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a két oszlopvektorból képzett mátrixból fogjuk az i -edik és j -edik sort, és az ebből a két sorból alkotott mátrixnak vesszük a determinánsát. A definícióból következik, hogy elemi 2-formából $\binom{n}{2}$ féle van.

Az elemi k -formák definiálásához először választunk egy $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ indexhalmazt, melyre teljesül, hogy $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Ekkor a dx_I elemi k -forma:

$$dx_I : \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{R}, \quad dx_I(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \det \begin{pmatrix} A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_k} \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbb{R}^{n \times k}$ az $n \times k$ dimenziós mátrixok tere, és A_{i_j} jelöli az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix i_j -edik sorvektorát. Azaz a $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_k \end{pmatrix}$ mátrixból kivesszük az i_j indexeknek megfelelő sorokat, és az ezekből képzett $k \times k$ dimenziós mátrixnak számítjuk ki a determinánsát.

2.2.3. Általános formák. Külső szorzat

Definíció 2.2.2. 1-formának egy $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezést nevezünk.

Könnyen látható, hogy minden ω 1-forma előállítható az elemi 1-formák lineáris kombinációjaként:

$$\omega(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n a_j v_j \quad \implies \quad \omega = \sum_{j=1}^n a_j dx_j.$$

Definíció 2.2.3. Az $\omega : \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés k -forma, ha multilineáris és alternáló. Ez azt jelenti, hogy minden változójára $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ nézve lineáris és két változót felcserélve értéke -1 -szeresre változik.

Az n dimenziós k -formák vektorteret alkotnak, amit $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ -nel jelölünk. Ebben a vektortérben az elemi k formák bázist alkotnak.

6. Feladat. Igazoljuk, hogy $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ -an az elemi k -formák valóban bázist alkotnak, és ezért dimenziója $\binom{n}{k}$.

Legyen τ egy k -forma és λ egy l -forma. Definálni fogjuk ezek külső szorzatát: $\tau \wedge \lambda$, ami egy $k + l$ -forma lesz. Ezt következőképpen kapjuk meg:

1 és $k+l$ között kiválasztunk k darab indexet növekvő sorrendben, ezek $\sigma_1, \dots, \sigma_k$. Ezután a kihagyott l darab indexet növekvő sorrendben elnevezzük $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{k+l}$ -nak. Ezzel az 1-től $k+l$ -ig tartó indexek egy (σ_j) sorbarendezeit - permutációját - kapjuk, amelyre igaz, hogy $1 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_k \leq k+l$, továbbá $\sigma_{k+1} \leq \dots \leq \sigma_{k+l}$.

Definíció 2.2.4. τ és λ külső szorzata (más szóval ékszorzata) $\tau \wedge \lambda : \mathbb{R}^{n \times (k+l)} \rightarrow \mathbb{R}$, melyet így definiálunk:

$$\tau \wedge \lambda(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+l}) = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \tau(\mathbf{v}_{\sigma_1}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma_k}) \cdot \lambda(\mathbf{v}_{\sigma_{k+1}}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma_{k+l}})$$

A fenti szummában σ végigfut az összes lehetséges permutáción, és $|\sigma|$ a permutáció inverzióinak számát jelenti (tehát azt, hogy hány darab cserével érhető el az adott sorrend az eredeti sorrendből kiindulva).

13. Példa. Legyen $\tau = dx_1$ és $\lambda = dx_2$. Azt várjuk, hogy e két formának az ékszorzata megegyezik a 2.2.2 Definícióval. Lehetséges permutációk (a szumma tagjai):

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2: |\sigma| = 0 \implies dx_1(\mathbf{v}) \cdot dx_2(\mathbf{w})$$

$$\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1: |\sigma| = 1 \implies -1 \cdot dx_1(\mathbf{w}) \cdot dx_2(\mathbf{v})$$

Tehát $\tau \wedge \lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v_1 w_2 - w_1 v_2$, ami valóban egyezik a korábban használt determináns értékével.

Állítás 2.2.5. Az ékszorzat tulajdonságai.

1. Két 1-forma ék szorzata antikommutatív: $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$,

2. ill. az általános eset: $\tau \wedge \lambda = (-1)^{k \cdot l} \lambda \wedge \tau$.
3. Asszociatív: $\omega \wedge (\lambda \wedge \tau) = (\omega \wedge \lambda) \wedge \tau$.
4. Disztributív: $\omega \wedge (\lambda + \tau) = \omega \wedge \lambda + \omega \wedge \tau$.

Az antikommutativitás következményei, hogy $dx_i \wedge dx_i = 0$ és $\omega \wedge \omega = 0$, ha k páratlan.

2.2.4. Differenciálformák

A differenciálformák „helytől függő” formák, azaz a tér minden pontjában más formát határoznak meg.

- differenciál 0-forma: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható skalármező
- differenciál 1-forma:

$$\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_j,$$

ahol dx_j elemi 1-forma, és $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény.

- differenciál k -forma:

$$\omega = \sum_I f_I dx_I,$$

ahol I a lehetséges k elemű indexhalmazokon fut végig. dx_I egy elemi k -forma, és $f_I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényeket jelöl.

Definíció 2.2.6. *Differenciálformák külső deriváltját fogjuk értelmezni.*

1. Ha f egy differenciál 0-forma, akkor külső deriváltja

$$df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

2. Ha $\omega = f dx_I$ egyetlen tagból álló differenciál k -forma. Külső deriváltja $d\omega$ egy differenciál $k+1$ -forma, és pedig

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (dx_i \wedge dx_I).$$

3. Egy differenciál k -forma külső deriváltja:

$$d\omega = \sum_I df_I \wedge dx_I.$$

Általános esetben, ha $\omega = \sum_i \omega_i$, akkor $d\omega = \sum_i d\omega_i$.

Lemma 2.2.7 (Poincaré lemma). Minden ω differenciálformára $d(d\omega) = 0$.

14. Példa. Legyen

$$f(x, y) = x^2y + 2y^3$$

$$df = 2xy \, dx + (x^2 + 6y^2) \, dy$$

Kiszámoljuk $d(df)$ -et. Tagonként deriválva:

$$d(2xy \, dx) = \underbrace{2y \, dx \wedge dx}_{\text{ékszorzat tulajdonságai miatt 0}} + 2x \, dy \wedge dx = -2x \, dx \wedge dy$$

$$d((x^2 + 6y^2) \, dy) = 0 + 2x \, dx \wedge dy$$

$$df = d(2xy \, dx) + d((x^2 + 6y^2) \, dy) = 0$$

7. Feladat. Igazoljuk a Poincaré lemmát differenciál 1-forma esetén.

2.2.5. Differenciálformák $\mathbb{R}^3$ -ban

$\mathbb{R}^3$ -ban a formák használatára néhány konvenciót vezetünk be, amelyekkel összefüggést teremtünk a formák absztrakt világa, valamint a skalár- és vektormezőkről korábban tanultak között. Az elemi 1-formákat jelölje dx , dy , dz . Az ékszorzat jelét mostantól nem írjuk ki, hasonlóan ahhoz, ahogy az egyszerű szorzat jelét is rendszerint elhagyjuk. Definiáljuk a következő hozzárendeléseket:

0. T_0 egy 0-formához egy skalármezőt rendel. Mivel egy 0-forma önmagában is egy egyszerű skalármező, ezért egyszerűen saját magát rendeljük hozzá:

$$\omega = f(x, y, z) : \quad T_0(\omega) = f(x, y, z)$$

1. T_1 egy 1-formához vektormezőt rendel a következőképpen:

$$\omega = f \, dx + g \, dy + h \, dz : \quad T_1(\omega) = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

2. T_2 egy 2-formához szintén vektormezőt rendel:

$$\omega = f \, dx \, dy + g \, dx \, dz + h \, dy \, dz : \quad T_2(\omega) = \begin{pmatrix} h \\ -g \\ f \end{pmatrix}$$

3. T_3 egy 3-formához skalármezőt rendel:

$$\omega = f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz : \quad T_3(\omega) = f$$

Ezek a hozzárendelések lehetővé teszik, hogy a korábban definiált vektoroperátorokat visszavezessük a formák deriválására.

Állítás 2.2.8. *A formák külső deriválása, valamint a gradiens, a divergencia és a rotáció között a következő összefüggések állnak fenn:*

1. Ha $\omega \in \bigwedge^0$, $\omega = f$, akkor $T_1(\,d\omega) = \text{grad } T_0(\omega) = \text{grad } f$.

2. Ha $\omega \in \bigwedge^1$, $\omega = f \, dx + g \, dy + h \, dz$, akkor

$$\begin{aligned} T_2(\,d\omega) &= T_2\left((g'_x - f'_y) \, dx \, dy + (h'_x - f'_z) \, dx \, dz + (h'_y - g'_z) \, dy \, dz\right) \\ &= \begin{pmatrix} h'_y - g'_z \\ f'_z - h'_x \\ g'_x - f'_y \end{pmatrix} = \text{rot } T_1(\omega). \end{aligned}$$

3. Ha $\omega \in \bigwedge^2$, $\omega = h \, dx \, dy - g \, dx \, dz + f \, dy \, dz$, akkor

$$T_3(\,d\omega) = T_3\left((h'_z + g'_y + f'_x) \, dx \, dy \, dz\right) = \text{div } T_2(\omega)$$

Következmény 2.2.9. *Abból, hogy $d^2\omega = d(\,d\omega) = 0$, a fentieket figyelembe véve egyenesen következik, hogy $\text{rot grad } f = 0$, és $\text{div rot } F = 0$, ahogy azt a 1.3.5-ban már beláttuk.*

6. Gyakorlat. Igazoljuk, hogy a differenciál 1-formák ékszorzata megfeleltethető a vektoriális szorzatnak:

$$T_2(\omega \wedge \tau) = T_1(\omega) \times T_1(\tau)$$

2.2.6. Formák integrálása sokaságokon

Tegyük fel, hogy $M \subset \mathbb{R}^n$ k dimenziós sokaság, $\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ pedig differenciál k -forma. Ekkor szeretnénk értelmezni az $\int_M \omega$ mennyiséget. Ehhez először két speciális esetet nézünk meg.

1. Ha $n = k = 3$, akkor M egy térrész, és $\omega = f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$. Ebből egy közönséges hármas integrált kapunk:

$$\int_M \omega = \iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

2. Ha $n = 2$ és $k = 1$, akkor M egy görbe: $M = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)) : t \in [a, b]\}$. Az 1-formák terének dimenziója $\binom{n}{k} = 2$, tehát két lineárisan független differenciálformánk van: $\omega_1 = f(x, y) \, dx$, $\omega_2 = g(x, y) \, dy$.

$$\int_M f(x, y) \, dx = \int_a^b f(\gamma(t)) x'(t) \, dt,$$

$$\int_M g(x, y) \, dy = \int_a^b g(\gamma(t)) y'(t) \, dt.$$

Emlékezzünk vissza, hogy korábban is értelmeztük az integrálási változót koordinátatranszformációnál így: $dx = x'(t) \, dt$. Most használjuk fel a sokaságok absztrakt definícióját (2.1.7). A V nyílt gömb most az $[a, b]$ intervallum, a ϕ leképezésnek pedig a $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ felel meg. Ennek Jacobi-mátrixából ($D\gamma = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$) az első esetben az első sort vesszük ki úgy, hogy behelyettesítünk egy elemi formába: $dx(D\gamma) = x'(t)$, a második esetben pedig a második sort. Ennek megfelelően

$$\int_M \omega_1 = \int_M f(x, y) \, dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \, dx(D\gamma) \, dt$$

$$\int_M \omega_2 = \int_M g(x, y) \, dy = \int_a^b g(\gamma(t)) \, dy(D\gamma) \, dt$$

Definíció 2.2.10. Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ k dimenziós sokaság, $\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ differenciál k -forma. A sokaság paraméteres megadásában $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ olyan nyílt gömb, hogy $\phi(V) = M$, valamint $D\phi \in \mathbb{R}^{n \times k}$ teljes rangú mátrix. Ekkor ω M -en vett integrálját a következőképpen definiáljuk:

$$\int_M \omega = \int_V \omega(D\phi) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

Tétel 2.2.11 (Általános Stokes-tétel). *Tegyük fel, hogy ω differenciál $(k-1)$ -forma, és M k dimenziós irányítható sokaság. Ekkor $d\omega$ differenciál k -forma, ∂M pedig $(k-1)$ dimenziós irányítható sokaság, és feltéve, hogy M és ∂M irányítása megfelel egymásnak, igaz az, hogy*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Speciális esetek.

1. Legyen $n = k = 1$, azaz a valós számok halmazán (a számegyenesen) tekintünk egy $M = (a, b)$ intervallumot. Ekkor $\partial M = \{b, a\}$. Legyen $\omega = f(x)$, azaz $d\omega = f'(x) dx$. Ekkor

$$\int_M d\omega = \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a), \quad \int_{\partial M} \omega = \int_{\{b,a\}} f = f(b) - f(a).$$

Az első esetben a Newton-Leibniz-formulát használtuk fel, a második esetben az $f(a)$ előjele azért negatív, hogy M és ∂M „irányítása” megegyezzen. Azt látjuk, hogy a *Newton-Leibniz-formula az általános Stokes-tétel speciális esete*.

2. Legyen $n = k = 2$. Ekkor M egy tartomány a síkon, ∂M pedig az őt határoló görbe; $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ és $d\omega = (g'_x - f'_y) dx dy$. Ebből Green tétele következik:

Tétel 2.2.12 (Green-tétel). *A fenti feltételekkel*

$$\oint_{\partial M} f dx + g dy = \iint_M (g'_x - f'_y) dx dy$$

Speciális esetben $f(x, y) = -y$, $g(x, y) = x$. Ekkor a Green-tételt felírva ki tudjuk számolni M területét:

$$\oint_{\partial M} (x dy - y dx) = \iint_M 1 + 1 dx dy = 2 \iint_M dx dy = 2 \cdot A(M)$$

8. Feladat. Lássuk be, hogy a Divergencia tétel az általános Stokes-tétel speciális esete.

9. Feladat. Lássuk be, hogy a klasszikus Stokes tétel az általános Stokes-tétel speciális esete.