

Matematikai Analízis III.

egyetemi jegyzet¹

2014. január 10.

¹Az előadásokat lejegyezte: Marczell Márton

Tartalomjegyzék

1. Vektoranalízis	1
1.1. Vektormezők. Bevezetés	2
1.2. A vektormezők speciális jellemzői	3
1.3. Potenciál	5
1.4. Vonal- és felületi integrál.	6
1.5. Vektormezőkre vonatkozó tételek	7
1.5.1. Divergencia tétel	7
1.5.2. Stokes tétel	10
1.5.3. Green tétel	11
2. Differenciálgeometria	14
2.1. Sokaságok	15
2.1.1. Paraméteres megadás	15
2.1.2. Topologikus térben	16
2.1.3. Implicit megadás	20
2.1.4. Sokaság irányítása	21
2.2. Differenciálformák	22
2.2.1. Bevezetés és ismételés	22
2.2.2. Elemi formák	23

2.2.3.	Általános formák. Külső szorzat	24
2.2.4.	Differenciálformák	26
2.2.5.	Differenciálformák $\mathbb{R}^3$ -ban	27
2.2.6.	Formák integrálása sokaságokon	28
3.	Variációszámítás	31
3.1.	Bevezető példák	32
3.2.	Alapfeladat	32
3.2.1.	Speciális esetek	35
3.2.2.	Forgástest felszín minimalizálás	36
3.2.3.	Bernoulli-feladat	37
3.3.	Több függvényt keresünk	38
3.3.1.	Példa: geodetikus görbe	38
3.3.2.	Legrövidebb út forgástest felszínén	40
3.3.3.	Feltételes szélsőérték	41
3.3.4.	Egy mechanikai alkalmazás	42
3.4.	Magasabbrendű deriváltak	42
3.5.	Kétváltozós függvény keresése	43
4.	Parciális differenciálegyenletek	45
4.1.	Bevezető	46
4.2.	Elsőrendű PDE: Transzport egyenlet	48
4.2.1.	Transzport egyenlet, homogén eset	48
4.2.2.	Inhomogén eset	49
4.3.	Másodrendű PDE I: Laplace egyenlet	50

4.3.1.	Téglalap alakú tartomány	51
4.3.2.	Megoldás körlapon	53
4.3.3.	A Laplace egyenlet megoldásának néhány tulajdonsága	55
4.4.	Másodrendű PDE II: Hővezetés egyenlete	56
4.4.1.	Hővezetés végtelen hosszú rúdban	57
4.4.2.	Hővezetés véges rúdban	60
4.4.3.	Hővezetés visszafelé	63
4.5.	Másodrendű PDE III: Hullámegyenlet.	64
4.5.1.	Hullámmozgás végtelen húrban	64
4.5.2.	Gyenge megoldás. Néhány tanulságos példa	66

1. fejezet

Vektoranalízis

1.1. Vektormezők. Bevezetés

Definíció 1.1.1. Az $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ típusú (többváltozós, vektorértékű) függvényeket vektormezőnek nevezzük. Ezek 'koordinátafüggvények függvényrendszere'-ként is felírhatók:

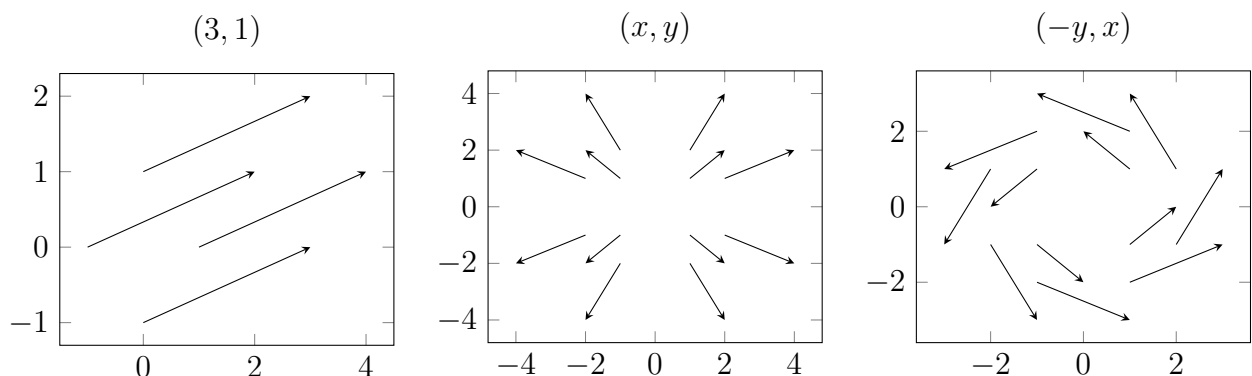
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

ahol $f_1, \dots, f_m$ $\mathbb{R}^n$ -ből $\mathbb{R}$ -be képező függvények.

Egy $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vagy $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektormező könnyen elképzelhető úgy, hogy a tér minden pontjához egy vektort rendel, amely az ábrázoláson az adott pontból indul ki. Ennek fizikai értelme pl. a tér egyes pontjaiban ható erő. A többváltozós valós függvényeket ezért nevezzük skalármezőnek is: a tér minden pontjához egy skalárt rendelnek. Konvenció szerint a skalármezőket kisbetűvel, a vektormezőket nagybetűvel jelöljük.

Példák.

1. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F(x, y) = (3, 1)$: konstans mező
2. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F(x, y) = (x, y)$: az origóból „kifelé mutató” vektorok
3. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F(x, y) = (-y, x)$: „forgatás”
4. $F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F(t) = (\cos t, \sin t)$: az egységkör



1.1. ábra. Vektormezők

Definíció 1.1.2. *Vektormező folytonos, ha koordinátafüggvényei folytonosak.*

Definíció 1.1.3. *Az $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektormező differenciálható az $\mathbf{x} \in D_F$ pontban, ha létezik olyan $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, hogy ha F megváltozását a következőképpen közelítjük: $F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx F(\mathbf{x}) + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \Delta \mathbf{x}$, akkor a közelítés hibájának nagyságrendje kisordó, azaz*

$$\lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \left(\frac{\|F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) - \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \Delta \mathbf{x}\|}{\|\Delta \mathbf{x}\|} \right) = 0.$$

Ekkor a vektormező derivált- (Jacobi-) mátrixának a következő mátrixot nevezzük:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = D F = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1 \\ \vdots \\ \text{grad } f_m \end{pmatrix}$$

Differenciálási szabályok

- Linearitás és homogenitás
- Kompozíció differenciálása: Tegyük fel, hogy $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ pedig az $F(a)$ pontban differenciálhatóak. Ekkor $G \circ F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ is differenciálható a -ban, és $D(G \circ F) = D G(F(a)) \cdot D F(a)$. (Ez utóbbi mátrix-mátrix szorzás.)
- Inverz deriváltja: Tegyük fel, hogy $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható az $a \in D_f$ helyen, és a derivált-mátrix nem szinguláris. Ekkor F^{-1} differenciálható $F(a)$ -ban, és $D F^{-1}(F(a)) = (D F(a))^{-1}$ (az inverz deriváltja a derivált-mátrix inverze).
- Szorzási szabály:

$$\text{grad } (fg) = f \text{ grad } (g) + g \text{ grad } (f)$$

A további deriválás a tenzorokhoz vezet, amelyekkel most nem foglalkozunk.

1.2. A vektormezők speciális jellemzői

Definíció 1.2.1. *A ∇ (nabla) operátor alatt három dimenzióban a $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ formális vektort értjük.*

Ebből következik, hogy egy $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\text{grad } f = \nabla f$.

Definíció 1.2.2. Tegyük fel, hogy $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható. Ekkor a vektormező divergenciáját így definiáljuk:

$$\text{div } (F) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \langle \nabla, F \rangle$$

Definíció 1.2.3. A fenti F vektormező rotációja

$$\text{rot } (F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = \nabla \times F (= \text{curl } (F)).$$

A rotációvektor fizikai értelmezése: hossza az erőter örvénylésének sebességét adja meg, iránya merőleges az örvénylésre.

1. Példa. Jellemezzük egy folyó áramlását vektormezővel. Az x tengely a folyás irányába mutat és a folyó közepén fekszik. Az y tengely a folyás irányára merőleges. A folyó szélessége d , ezért $y \in [-d; d]$. A z tengely felfelé mutat. Természetes közelítés lehet, hogy a folyó áramlását a

$$\mathbf{v} = \left(v_0 \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{d^2} \right), 0, 0 \right)$$

vektormező jellemzi. Mit tudunk mondani az áramlás örvényességéről?

Megoldás:

$$\text{rot } (\mathbf{v}) = \left(0, 0, \frac{8yv_0}{d^2} \right),$$

azaz az örvénylés erőssége y -nal egyenesen arányos: annál nagyobb, minél közelebb vagyunk a parthoz. A folyó közepén tehát nincs örvénylés. Az örvénylés iránya mindig merőleges a z tengelyre.

1. Gyakorlat. Vajon mi lehet a fenti példa fizikai háttere?

Állítás 1.2.4. A deriválás szorzási szabályai, melyek az újonnan bevezetett speciális jellemzőket tartalmazzák az alábbiak:

$$\begin{aligned} \text{div } (fF) &= f \text{div } F + \langle F, \text{grad } f \rangle \\ \text{rot } (fF) &= \langle \text{grad } f, F \rangle + f \text{rot } F \\ \text{div } (F \times G) &= \langle G, \text{rot } F \rangle - \langle F, \text{rot } G \rangle \end{aligned}$$

1. Feladat. Igazoljuk ezeket a szorzat-deriválási szabályokat.

1.3. Potenciál

Definíció 1.3.1. Az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező potenciális, - más szóval skalárpotenciális - ha létezik olyan $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező, melyre $F = \text{grad } f$.

Állítás 1.3.2. A következő állítások ekvivalensek:

1. F skalárpotenciális.
2. $\text{rot } (F) = 0$.
3. $\forall \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ zárt görbére

$$\oint_{\Gamma} F(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = 0.$$

Definíció 1.3.3. $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező vektorpotenciális, ha létezik olyan $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező, amelyre $\text{rot } (G) = F$.

Állítás 1.3.4. A következő állítások ekvivalensek:

1. F vektorpotenciális
2. $\text{div } (F) = 0$
3. $\forall S \subset \mathbb{R}^3$ zárt felületre

$$\oiint_S F \, dS = 0.$$

Következmény 1.3.5. A fenti két állítás alapján tehát:

1. $\text{rot } (\text{grad } (f)) = 0$.
2. $\text{div } (\text{rot } (F)) = 0$.
3. Könnyen belátható az is, hogy $\text{div } (\text{grad } (f)) = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} = \Delta f$.

Megjegyzés 1.3.6. A rotáció lineáris operátor. Ezért ha $\text{rot } (G_1) = 0$, azaz G_1 skalárpotenciális, akkor egy tetszőleges G vektormezőre $\text{rot } (G + G_1) = \text{rot } (G) + 0 = \text{rot } (G)$. Ez azt jelenti, hogy a vektorpotenciál nem egyértelmű: ha $F = \text{rot } (G)$, akkor F -nek G és $G + G_1$ is vektorpotenciálja.

Ha F vektorpotenciális, akkor egy vektorpotenciálját megkaphatjuk a következő módon:

$$G(x, y, z) = \int_0^1 tF(tx, ty, tz) \times (x, y, z) \, dt$$

1.4. Vonal- és felületi integrál.

Ebben a fejezetben átvisszautalunk az első évben megtanultakat, majd kibővítjük.

Definíció 1.4.1. Az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény (skalármező) vonalintegrálja a $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$; $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ görbe mentén:

$$\int_{\Gamma} f(x_1, \dots, x_n) \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| \, dt$$

Megjegyzés 1.4.2. A fenti képletben $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))$ a görbe érintővektorát adja meg az adott pontban. A vonalintegrál értéke független a görbe paraméterezésétől.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény. $S \subset \mathbb{R}^3$ egy felület, melyet így adunk meg:

$$S = \{s(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2\}; \quad s : D \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad s(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}.$$

Definíció 1.4.3. Az f függvény felületi integrálja az S felület mentén:

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(s(u, v)) |s'_u \times s'_v| \, d(u, v) \quad (1.1)$$

Megjegyzés 1.4.4. A fenti képletben $s'_u \times s'_v$ a felület érintősíkjának normálvektora az adott pontban. Az integrál értéke független a felület paraméterezésétől.

2. Példa. Speciális esetben a felület egy kétváltozós valós függvény felülete: $s(u, v) = (u, v, t(u, v))$, ahol $t : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható kétváltozós függvény. Ekkor

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(u, v, t(u, v)) \sqrt{1 + (t'_u)^2 + (t'_v)^2} \, d(u, v).$$

Igazoljuk ezt. Számoljuk ki (1.1) jobb oldalán szereplő vektoriális szorzatot:

$$s'_u \times s'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & t'_u \\ 0 & 1 & t'_v \end{vmatrix} = (-t'_u, -t'_v, 1),$$

és ennek a vektornak a hossza valóban $\sqrt{1 + (t'_u)^2 + (t'_v)^2}$.

Definíció 1.4.5. Az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező felületi integrálja a fenti S felület mentén

$$\iint_S F \, dS = \iint_D \langle F(s(u, v)), s'_u \times s'_v \rangle \, d(u, v)$$

A vektormező felületi integrálját egy skalárszorozattal definiáltuk, azaz visszavezettük egy skalármező integráljára. Tehát ha a felület egységnyi normálvektorait $\mathbf{n}$ -nel jelöljük, akkor látszik, hogy

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_D F(s(u, v)) \cdot \frac{s'_u \times s'_v}{|s'_u \times s'_v|} \cdot |s'_u \times s'_v| \, d(u, v) = \\ &= \iint_D F(s(u, v)) \cdot (s'_u \times s'_v) \, d(u, v) = \iint_S F \, dS \end{aligned}$$

Definíció 1.4.6. Az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező vonalintegrálja a $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ görbe mentén

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} &= \\ &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt \end{aligned}$$

A fentiek alapján látható, hogy ezt is visszavezettük az $F \cdot T$ skalármező vonalintegráljára, ahol T a görbe egységnyi érintővektorait adja meg.

1.5. Vektormezőkre vonatkozó tételek

1.5.1. Divergencia tétel

Definíció 1.5.1. Adott egy $S \subset \mathbb{R}^3$ sima felület, ennek minden pontjában $\mathbf{n}(x, y, z) = (n_1(x, y, z), n_2(x, y, z), n_3(x, y, z))$ egység hosszú normálvektor. Egy $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezőrefelületi integrálját:

$$\oiint_{\partial M} F \, dS = \oiint_{\partial M} F \cdot \mathbf{n} \, dS$$

vektormezőnek a felületre vett fluxusának nevezzük.

2. Gyakorlat. Legyen $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ és S az origó középpű, r sugarú gömb felszíne. Számoljuk ki F fluxusát S -re nézve.

3. Gyakorlat. Legyen $F(x, y, z) = \mathbf{i}$, és S az $x + y + z = 1$ sík első tér-nyolcadba eső része. Határozzuk meg a vektortér fluxusát.

Értelmezhetjük egy kétdimenziós $F(x, y)$ vektormező fluxusát is, egy Γ síkgörbére nézve: $\phi = \int_{\Gamma} F \, ds$

Tétel 1.5.2 (Divergenciatétel/Gauss-Osztrogradszkij-tétel). Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ egy zárt tér-rész, és ∂M a tér-részt határoló (zárt) felület. Tegyük fel, hogy ∂M pontjaiban adottak az $\mathbf{n}(x, y, z) = (n_1(x, y, z), n_2(x, y, z), n_3(x, y, z))$ egység hosszú, a térrészből kifelé mutató normálvektorok. Ekkor az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezőre

$$\iint_M \operatorname{div} F(x, y, z) \, d(x, y, z) = \oiint_{\partial M} F \, dS = \oiint_{\partial M} F \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Azaz a térrészen vett térfogati integrál megegyezik a vektormezőnek a határoló felületre vett felületi integráljával (ld. 1.4.5).

Bizonyítás. (vázlat): Tegyük fel, hogy M egyszerű térrész, azaz minden, valamelyik tengellyel párhuzamos egyenessel vett metszése csak egyetlen szakasz, vagy egy pont. Azt kell belátnunk, hogy

$$\begin{aligned} \iiint_M \operatorname{div} F &= \iiint_M \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) d(x, y, z) = \\ &= \oiint_{\partial M} (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3) \, dS \end{aligned}$$

Ez pedig tagonkénti egyenlőséggel bizonyítható. Ebből most a harmadik tagot fogjuk belátni. Írjuk fel M -et az (x, y) sík szerinti normáltartományként: $b(x, y) < z < t(x, y)$ ahol $(x, y) \in D$. Írjuk fel a határhalmazt három tartomány uniójaként n_3 előjelének megfelelően:

$$n_3 > 0 : M_{top}, \quad n_3 = 0 : M_{side}, \quad n_3 < 0 : M_{bottom},$$

így $\partial M = \partial M_{top} \cup \partial M_{side} \cup \partial M_{bottom}$. Számoljuk ki a résztartományokra vett felületi integrálokat:

$$n_3 > 0 : \partial M_{top} = \{(u, v, t(u, v)) : (u, v) \in D\}:$$

$$\mathbf{n} = (-t'_u, -t'_v, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (t'_u)^2 + (t'_v)^2}} \Rightarrow n_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + (t'_u)^2 + (t'_v)^2}}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\partial M_{top}} f_3 n_3 \, dS &= \iint_D f_3(u, v, t) n_3(u, v, t) \sqrt{1 + (t'_u)^2 + (t'_v)^2} \, d(u, v) = \\ &= \iint_D f_3(u, v, t(u, v)) \, d(u, v) \end{aligned}$$

$n_3 = 0 : \partial M_{side}$: Itt $n_3 = 0$, ezért az integrál is 0.

$n_3 < 0 : \partial M_{bottom} = \{(u, v, b(u, v))\}$:

$$\iint_{\partial M_{bottom}} f_3 n_3 \, dS = \dots = - \iint_D f_3(u, v, b(u, v)) \, d(u, v)$$

Tehát a teljes tartományon vett integrál az egyes résztartományokon vett integrál összege:

$$\iint_{\partial M} f_3 n_3 \, dS = \iint_D f_3(u, v, t(u, v)) - f_3(u, v, b(u, v)) \, d(u, v)$$

A teljes M -re vett térfogati integrált pedig normáltartományon való integrálással számoljuk:

$$\begin{aligned} \iiint_M \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \iint_D \int_{b(x, y)}^{t(x, y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) \, dz \, d(x, y) = \\ &= \iint_D f_3(x, y, t(x, y)) - f_3(x, y, b(x, y)) \, d(x, y) \end{aligned}$$

a Newton-Leibniz-formula miatt. Ez láthatóan megegyezik a felületi integrálok összegével.
□

3. **Példa.** $F(x, y, z) = (x, y, z)$ divergenciája $\operatorname{div} F = 3$. Legyen M az origó körüli r sugarú gömb felső fele. A térfogati integrál:

$$\iiint_M 3 \, d(x, y, z) = 3 \frac{2}{3} r^3 \pi = 2r^3 \pi$$

A felületet két részre osztjuk: $S = S_1 \cup S_2$, ahol S_1 a félgömb felülete és S_2 az alsó körlap. Ekkor az S_1 felületen $\mathbf{n}_1(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, z)$ és az S_2 felületen $\mathbf{n}_2(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Az S_1 -en vett integrál:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (x, y, z) \cdot \frac{1}{r}(x, y, z) \, dS &= \iint_{S_1} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} \, dS = \\ &= \iint_{S_1} r \, dS = r A(S_1) = r 2r^2 \pi = 2r^3 \pi. \end{aligned}$$

Az S_2 -n vett integrál:

$$\iint_{S_2} (x, y, z) \cdot (0, 0, -1) \, dS = \iint_{S_2} -z \, dS = 0.$$

A két integrál összege pedig valóban megegyezik a térfogati integrállal:

$$\iint_{S_1 \cup S_2} F \, dS = 2r^3\pi$$

1.5.2. Stokes tétel

Tétel 1.5.3 (Klasszikus Stokes-tétel). Vegyünk egy $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezőt és egy $M \subset \mathbb{R}^3$ felületet, amelyet egy $\partial M = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3 : t \in [a, b]\}$ sima, zárt görbe határol. A felület normálvektorait jelölje $\mathbf{n}$. Ekkor

$$\iint_M \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial M} F(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \oint_{\partial M} F \cdot T \, ds. \quad (1.2)$$

Itt T jelöli a görbe egységnyi hosszú érintővektorait, amelyeket úgy is számolhatunk, hogy

$$T = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

Megjegyzés 1.5.4. Később látni fogjuk, hogy a Newton-Leibniz formula, a Divergencia- és a Stokes-tétel ugyanazon absztrakt tétel speciális esetei. Annyit azonban már most észrevehetünk, hogy mindhárom tétel megfogalmazható nagy vonalakban így: „A függvény deriváltjának integrálja egy tartományon egyenlő a függvénynek a tartomány határán vett megváltozásával”.

Definíció 1.5.5. A fenti integrállal megadott mennyiséget az F vektormező cirkulációjának nevezzük.

4. Példa. Legyen $F := (y, z, x)$, M az egységgömb felső fele:

$$M := \{s(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} : \varphi \in [0, \pi/2], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Ekkor tehát $\partial M = \{\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) : t \in [0, 2\pi]\}$ egységkör az (x, y) síkon. A (1.2) egyenlet bal oldala:

$$\oint_{\partial M} F(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle (\sin t, 0, \cos t), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle dt = - \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\pi.$$

(1.2) egyenlet jobb oldalán a normálvektor $\mathbf{n} = (x, y, z)$ (jelen esetben azért nem kell a hosszával elosztani, mert az egységgömb felületén vagyunk). A jobb oldal:

$$\begin{aligned} \iint_M \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_M \langle (-1, -1, -1), (x, y, z) \rangle dS = - \iint_M (x + y + z) dS = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\sin \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta + \cos \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi = -\pi \end{aligned}$$

A $\sin \varphi$ szorzó a polárkoordinátás áttérés Jacobi-determinánsa.

1.5.3. Green tétel

A harmadik klasszikus tétel speciális esetként levezethető a Stokes tételből.

Tétel 1.5.6 (Green tétel). *Adottak a P és Q kétváltozós valós függvények valamely $D \subset \mathbb{R}^2$ tartományon. Feltesszük, hogy D határa sima, ez a C zárt görbe. Ekkor*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y) = \oint_C (P dx + Q dy). \quad (1.3)$$

2. Feladat. Igazoljuk a fenti tételt a Stokes tétel alapján. Javasolt "szereposztás": $F(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$, valamint

$$S = \{(x, y, 0) : (x, y) \in D\}, \quad \mathbf{n} = (0, 0, 1), \quad C = \{(x(t), y(t), 0) : t \in [a, b]\}.$$

5. **Példa.** Két speciális esetet tekintünk. Legyen elsőként $P(x, y) = -y$ és $Q(x, y) = 0$, majd $P(x, y) = 0$ és $Q(x, y) = x$. Ekkor a (1.3) egyenlet így írható

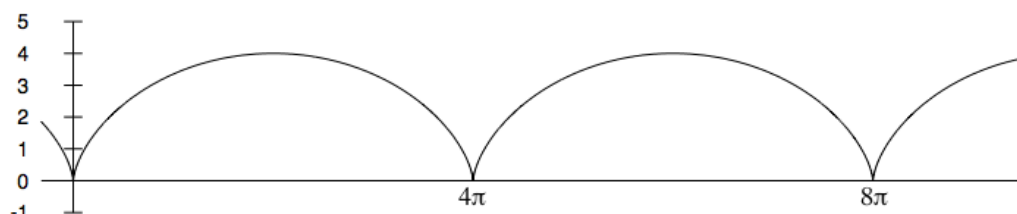
$$\begin{aligned} \iint_D 1 d(x, y) &= \oint_C -y dx \\ \iint_D 1 d(x, y) &= \oint_C x dy \end{aligned}$$

A baloldalon mindkét egyenletben a C görbe által közrezárt tartomány területe van. Ezért

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx) = \oint_C x dy = - \oint_C y dx \quad (1.4)$$

6. Példa. Határozzuk meg egy cikloid ív alatti területet. A görbét meghatározó egyenletek:

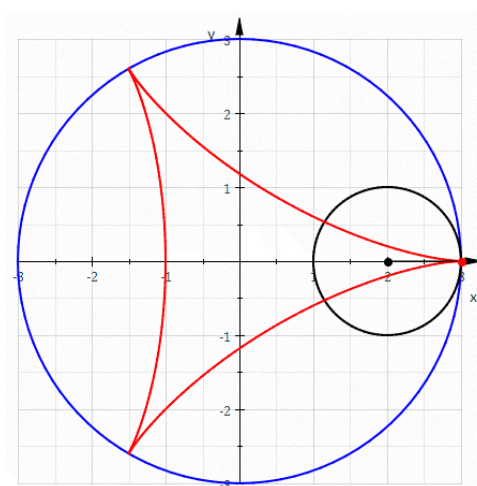
$$\begin{aligned}x(t) &= r(t - \sin(t)) \\ y(t) &= r(1 - \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$



Az ábrán látható cikloid esetén $r = 2$. A teületszámításra az $A(D) = -\oint_C y \, dx$ képletet fogjuk használni. Mivel a területet határoló vízszintes szakaszon $y = 0$, ezért csak az ív mentén kell integrálnunk. Felhasználjuk, hogy itt $dx = r(1 - \cos(t)) \, dt$. Ezért

$$\begin{aligned}A(D) &= -\oint_C y \, dx = \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos(t))^2 \, dt = \\ &= r^2 \left(\int_0^{2\pi} 1 \, dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos(t) \, dt + \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \, dt \right) = r^2 (2\pi + 0 + \pi) = 3\pi r^2.\end{aligned}$$

3. Feladat. Számoljuk ki a (1.4) képlet alapján egy deltoid területét:



A deltoidot határoló görbe egyenlete:

$$\begin{aligned}x(t) &= 2 \cos(t) + \cos(2t) \\y(t) &= 2 \sin(t) - \sin(2t)\end{aligned}$$

2. fejezet

Differenciálgeometria

2.1. Sokaságok

2.1.1. Paraméteres megadás

Definíció 2.1.1 (Paraméteresen megadott sokaság). Az $M \subset \mathbb{R}^n$ részhalmaz k -dimenziós sokaság ($k \leq n$), ha

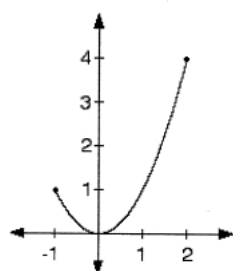
- $\forall p \in M$ -nek $\exists U$ környezete,
- és $\exists F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés
- és $\exists V \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz,

hogy $F(V) = U \cap M$ és a DF Jacobi mátrix teljes rangú, azaz a leképezés egy-egy értelmű.

Ezt úgy lehet értelmezni, hogy az M halmaz lokálisan úgy viselkedik, mintha k dimenziós volna. Erre példa egy síkbeli vagy térbeli görbe, amely egydimenziós (egy paraméterű) sokaság, vagy egy térbeli felület, amely kétdimenziós (két paraméterű) sokaság. Láthatjuk, hogy a sokaság dimenziója megegyezik a paraméterezéskor használt paraméterek számával.

Fontos megjegyeznünk, hogy V mindig nyílt halmaz. Ebből következik, hogy pl. csak olyan görbe lehet sokaság, amely nem tartalmazza a végpontjait, mert azok már nem úgy viselkednek, mint egy egydimenziós intervallum. Ugyanígy csak a határoló görbét nem tartalmazó felület számít sokaságnak.

7. Példa. Egy síkbeli görbe pontjai 1 dimenziós sokaságot adnak $\mathbb{R}^2$ -ben.

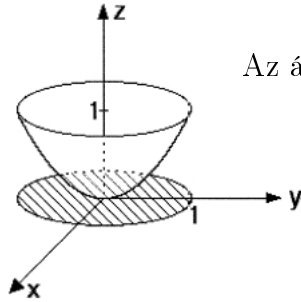


Az ábrán látható vonal esetén:

$$F : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(t) = (t, t^2), \quad V = (-1, 2).$$

A Jacobi mátrix $\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ valóban teljes rangú.

8. Példa. Egy térbeli felület pontjai 2-dimenziós sokaságot adnak $\mathbb{R}^3$ -ban.



Az ábrán látható felület esetén:

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y) = (x, y, x^2 + y^2),$$

$$V = \{x^2 + y^2 < 1\}.$$

A Jacobi mátrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{pmatrix}$ mindig teljes rangú.

Definíció 2.1.2. $M \subset \mathbb{R}^n$ lezárása a torlódási pontjainak halmaza:

$$\overline{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists (x_n) \subset M, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \right\}.$$

Megjegyzés 2.1.3. Egy halmaz lezárása tartalmazza a halmaz pontjait: $M \subset \overline{M}$, hiszen minden $x \in M$ esetén az $x_n \equiv x$ sorozat határértéke x .

Definíció 2.1.4. A k -dimenziós M sokaság határa $\partial M = \overline{M} \setminus M$.

4. Gyakorlat. Mi lesz a fenti két Példa-beli sokaság határa?

4. Feladat. A fenti definíció értelmében hogyan tudjuk az egységgör-vonalat egydimenziós sokasgként reprezentálni? Mi lesz a határa?

Igazolható, hogy ha M k -dimenziós sokaság, akkor ∂M vagy $k - 1$ dimenziós sokaság, vagy üres halmaz.

Megjegyzés 2.1.5. Itt kell megjegyeznünk, hogy 0 dimenziós sokaságnak egy véges elemszámú diszkrét pontokból álló halmazt nevezünk. Tehát az egy dimenziós sokaság (görbe) határa 0 dimenziós sokaság lesz, ha a görbe nem zárt.

2.1.2. Topologikus térben

A sokaságok absztraktabb, általánosabb definíciójának megfogalmazásához legalább érintőlegesen beszélnünk kell a topológikus terekről.

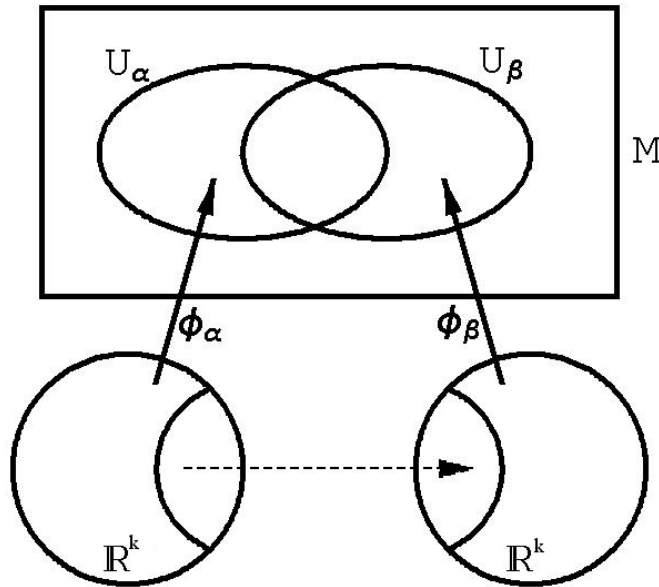
Topologikus terek - kitérő. A topológikus tér egy absztrakt fogalom. Hallhattunk már olyan terekről, amelyekben létezik metrika (metrikus tér), vagy létezik norma (normált tér), vagy skalárszorzat (euklideszi tér). A topologikus terekben egyiknek a létezése sincs feltéve. A topologikus térben csupán az van feltéve, hogy a T halmazon létezik egy $\mathcal{U} \subset 2^T$ halmazrendszer, amely a T -beli nyílt halmazokat tartalmazza. Az $\mathcal{U} \subset 2^T$ halmazrendszer bizonyos axiómáknak eleget tesz (melyeket nyílt halmazoktól 'elvárunk').

Definíció 2.1.6. Egy M halmaz nyílt lefedése az U_α nyílt halmazokból álló (U_α) halmazrendszer, ha minden $p \in M$ -re van olyan α , hogy $p \in U_\alpha$.

Definíció 2.1.7. $M \subset \mathbb{R}^n$ egy k dimenziós sokaság, ha létezik egy nyílt (U_α) lefedése, továbbá minden α -hoz

- $\exists \phi_\alpha : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, melyre
- $\exists V \in \mathbb{R}^k$ nyílt gömb, hogy $\phi_\alpha(V) = U_\alpha$
- ϕ_α bijekció V és U_α között (egy-egy értelmű)

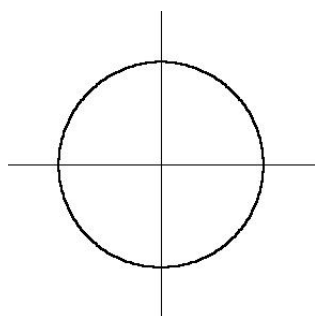
Feltesszük továbbá, hogy ezek a leképezések "simán" változnak, azaz ha $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, akkor a $\phi_\alpha^{-1} \Big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ megszorítást véve a $\phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenciálható, egy-egy értelmű leképezés. Ekkor a $p \in U_\alpha$ pont lokális koordinátái (k dimenzióban) $\phi_\alpha^{-1}(p) \in \mathbb{R}^k$.



Definíció 2.1.8. Az (U_α, ϕ_α) párt lokális térképnek, az egész M -et lefedő térképek rendszerét $(\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in I \text{ indexhalmaz}\})$ atlasznak nevezzük.

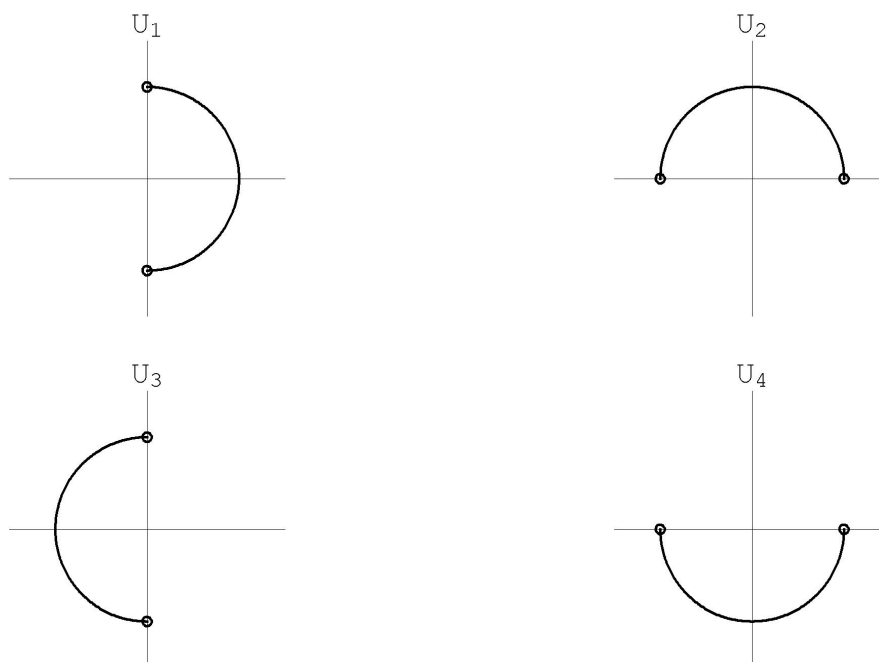
Ezek az elnevezések szemléletesen mutatják, hogy mihez hasonlítható mindez. Képzeljük el, hogy egy lapozható autóatlaszt használunk. Ekkor a térkép lapjai és az elénk táruló táj pontjai között egy-egy értelmű leképezés van. Az összes térképlap tájbeli megfelelőjének uniója az M tájat teljesen lefedi. Az egyes térképlapok jobb szélső sávján található terület megtalálható a szomszédos térképlap bal szélén is, és így tovább. Amikor felnézünk a térképről a tájra, akkor az egyik lap széléről a ϕ_α leképezéssel „átmegyünk” az $U_\alpha \cap U_\beta \in M$ valóságos területre, ahonnan a ϕ_β^{-1} segítségével visszajövünk a másik térképlap másik szélére.

9. Példa.



S^1 -gyel jelöljük a síkban vett egységgörte. Belátjuk, hogy S^1 egy dimenziós sokaság.

Ehhez először egy nyílt lefedését kell megtaláljuk. Két félgörte uniója nem lenne nyílt lefedés, mert ha a két görbe a végpontjait is tartalmazza, akkor nem nyílt halmazok. Ha pedig nem tartalmazza, akkor nem fedtük le az egész egységgörte.



Ezért vegyük a felső félgörte (U_1), az alsó félgörte (U_2), a jobb félgörte (U_3) és a bal félgörte (U_4) és ezeknek metszeteiből építsük fel az egységgörte! A térképekhez tartozó

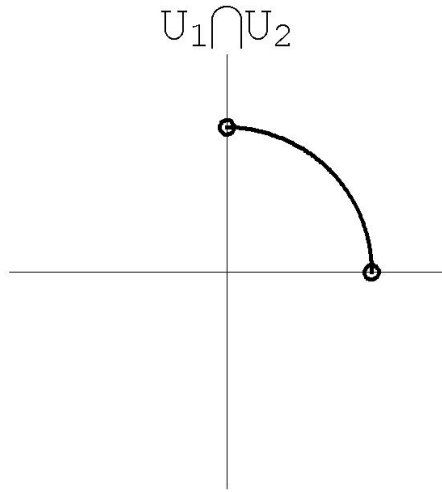
$\phi_{1,2,3,4} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezések:

$$\phi_1(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$$

$$\phi_2(x) = (\sqrt{1-x^2}, x)$$

$$\phi_3(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$$

$$\phi_4(x) = (-\sqrt{1-x^2}, x)$$



Ekkor például az $U_1 \cap U_2$ halmazon, azaz a jobb felső síknegyedben azt írhatjuk fel, hogy

$$\phi_2^{-1}(\phi_1(x)) = \phi_2^{-1}(x, \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2},$$

és ez a leképezés valóban differenciálható.

5. Feladat. Hasonló módon igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^3$ -ban az S_2 egységgömb kétdimenziós sokaság.

10. Példa. Ebben a példában a valós projektív teret fogjuk definiálni sokaságként. Tekintsünk az $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ halmazon egy relációt:

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (y_0, y_1, \dots, y_n), \quad \text{ha} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} : y_k = \lambda x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Tehát például $n = 2$ esetén

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) &\sim (2, 4, 6) \\ &\sim (-2, -4, -6) \\ &\not\sim (2, 1, 3) \end{aligned}$$

Ez ekvivalencia reláció. Az n -dimenziós projektív tér P^n az ekvivalenciaosztályokat jelenti. Az $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ -nel ekvivalens elemeket így jelöljük:

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n).$$

Igazolható, hogy P^n n -dimenziós sokaság.

A módszert $n = 2$ esetben mutatjuk be. P^2 egy nyílt lefedését kapjuk az alábbi halmazzal

$$U_0 = (1 : x : y), \quad U_1 = (x : 1 : y), \quad U_2 = (x : y : 1),$$

tehát pl. U_0 -ban lesznek azok az elemek, melyek első koordinátája nem 0, stb. A megfelelő leképezések $\phi_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $k = 0, 1, 2$, így adhatók meg:

$$\phi_0(x, y) = (1 : x : y), \quad \phi_1(x, y) = (x : 1 : y), \quad \phi_2(x, y) = (x : y : 1).$$

Ezek kompatibilitását le kell ellenőriznünk. $U_0 \cap U_1$ lesz azon elemek halmaza, melyek első és második eleme különbözik 0-tól. Ekkor

$$\phi_1^{-1}\phi_0(x, y) = \phi_1^{-1}(1 : x : y) = \phi_1^{-1}\left(\frac{1}{x} : 1 : \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right),$$

ezért $\phi_1^{-1}\phi_0$ Jacobi mátrixa

$$D\phi_1^{-1}\phi_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ \frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix},$$

és ez valóban mindig teljes rangú az $\{x \neq 0, y \neq 0\}$ halmazon. $\square$

5. Gyakorlat. Igazoljuk, hogy a feti példában szereplő $\sim$ valóban ekvivalencia reláció.

2.1.3. Implicit megadás

Definíció 2.1.9 (Implicit megadású sokaság). $M \in \mathbb{R}^n$ k dimenziós sokaság, ha $\exists \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, hogy M a ρ_i függvények nulltereinek metszete:

$$M = \bigcap_{i=1}^{n-k} \{\rho_i = 0\}.$$

Feltesszük azt is, hogy a ρ_i függvények gradiensei lineárisan függetlenek, a belőlük képzett mátrixteljes rangú:

$$\begin{pmatrix} \text{grad } \rho_1 \\ \text{grad } \rho_2 \\ \vdots \\ \text{grad } \rho_{n-k} \end{pmatrix}$$

Példa: Az egységkör $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho_1 = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ egy dimenziós sokaság $\mathbb{R}^2$ -ben.

Példa: Két háromváltozós függvényt vegyünk és tekintsük az alábbi halmazt:

$$\{(x, z, y) : \rho_1(x, y, z) = 0, \quad \rho_2(x, y, z) = 0\}$$

A két függvény nulltere két felület a térben ("szintfelületek"). Ezek valóban egy görbe mentén metszik egymást. Eddigi ismereteink alapján ez valóban 1-dimenziós sokaság.

11. *Példa.* Legyen a görbe S^1 egy egységkör $\mathbb{R}^3$ -ban, mely az (x, y) síkba esik. A görbét impliciten megadó függvények:

$$\rho_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \text{ (gömb)} \quad \rho_2(x, y, z) = z \text{ (sík)}$$

$$S^1 = \{\rho_1 = 0\} \cap \{\rho_2 = 0\}.$$

Ekkor $\text{grad } \rho_1 = (2x, 2y, 2z)$ és $\text{grad } \rho_2 = (0, 0, 1)$, valóban függetlenek.

Definíció 2.1.10. Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ k dimenziós, impliciten megadott sokaság. Ekkor a $p \in M$ ponthoz tartozó N_p normáltérnek a ρ_i függvények gradiensei által az adott pontban kifeszített vektorteret nevezzük. Ezért $\dim N_p = n - k$. A p -hez tartozó tangenstér vagy érintőtér $T_p = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \perp N_p\}$, $\dim T_p = k$.

12. *Példa.* Ha $S^1 = \{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ és $p = (x_0, y_0) \in S^1$, akkor $\text{grad } \rho = (2x_0, 2y_0)$. Tehát N_p az (x_0, y_0) helyvektorral párhuzamos vektorokat jelenti. Ezért T_p bázisának vehetjük az $(y_0, -x_0)$ vektort.

Az előző példában T_p bázisának az ellentétes $(-y_0, x_0)$ vektort is választhattuk volna. Így T_p kétféle irányítását kapjuk. Ezért beszélnünk kell az irányításokról.

2.1.4. Sokaság irányítása

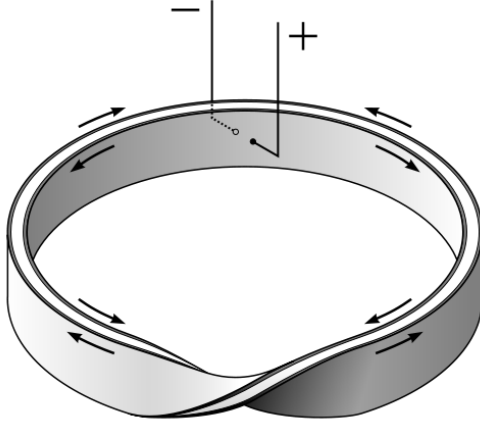
Legyen V egy k dimenziós vektortér. Ebben kiválasztunk egy bázist, jelölje $[v] = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$. Ekkor minden másik $[w] = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ bázisra

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} \mathbf{w}_j, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Az $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = (a_{ij})$ mátrix nem szinguláris, azaz $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} \neq 0$. Ezért V -ben egy bázist rögzítve a vektortér minden bázisát két osztályra oszthatjuk aszerint, hogy az áttérési mátrix determinánsa pozitív vagy negatív. Ezzel a bázisoknak egy partícióját adjuk, így az egy osztályba került bázisok között ekvivalencia reláció van: egymáshoz képest mindannyian a pozitív determinánsú osztályba kerülnek. Ekkor aszerint, hogy melyik osztályt választjuk ki, a vektortér kétféle irányítását különböztetjük meg.

Definíció 2.1.11 (Vektortér irányítása). Legyen a V vektortérben vett $[v]$ és $[w]$ bázis közötti áttérési mátrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, azaz egy $\mathbf{x} \in V$ vektorra $\mathbf{x}_{[w]} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x}_{[v]}$. Ekkor $[v]$ és $[w]$ azonos irányítású, ha $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} > 0$.

Definíció 2.1.12. Egy sokaság irányítható, ha minden pontban megválsztható a normál-tér irányítása úgy, hogy az folytonosan változzon a sokaság mentén.



A Möbius-szalag például nem irányítható.

2.2. Differenciálformák

2.2.1. Bevezetés és ismételés

Szeretnénk $\mathbb{R}^n$ -ben egy k dimenziós sokaságon integrálni. Hasonlóan ahhoz, ahogy vonal mentén vagy felületen már integráltunk. Ehhez szükség van arra, hogy k -dimenziós mértéket használjunk a sokaságon. Erre szolgálnak majd a differenciálformák. Ezek bevezetését fokozatosan fogjuk megtenni.

Ismételés. A síkon a $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ és a $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe $T = x_1 y_2 - y_1 x_2$, ami felírható úgy, mint a következő determináns:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Állítás 2.2.1. Adottak a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok, ezeket egy $n \times k$ dimenziós mátrixba rendezzük

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_k \end{pmatrix}$$

Ekkor az általuk kifeszített k -dimenziós paralelotóp k dimenziós mértéke:

$$V = \sqrt{\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}})}.$$

Példa: Ha $k = 1$, azaz csak egy vektorunk van, akkor ennek hossza (mértéke):

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n v_j^2} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}},$$

tehát a fenti képletet kapjuk.

Bizonyítás. (Vázlat) Ha $k = n$ (azaz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ négyzetes mátrix), akkor $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \det \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$, és a determináns multiplikatív tulajdonsága alapján

$$\sqrt{\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}})} = \sqrt{\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \cdot \det \underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \sqrt{(\det \underline{\underline{\mathbf{A}}})^2} = |\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}|,$$

tehát a tétel igaz. Ha $k < n$, akkor kiindulunk $(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}})$ felírásából:

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \begin{pmatrix} |v_1|^2 & \langle v_1, v_2 \rangle & \dots & \langle v_1, v_k \rangle \\ \langle v_2, v_2 \rangle & |v_2|^2 & \dots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \dots & \langle v_{k-1}, v_k \rangle & |v_k|^2 \end{pmatrix}$$

A fenti mátrix elemei – vektorok hossza és vektorok skaláris szorzata – nem változnak meg térbeli forgatás hatására. Tehát a vektorokat elforgatva úgy, hogy csak az első k db koordinátájuk legyen 0-tól különböző, visszajutunk az $n = k$ speciális esethez. $\square$

2.2.2. Elemi formák

Elemi formák $\mathbb{R}^3$ -ban. A könnyebb érthetőség kedvéért azzal kezdjük, ami "látható".

Az elemi 1-forma egy olyan leképezés, ami a vektorhoz hozzárendeli az egyes koordináta-tengelyekre vett vetületének hosszát. Ennek megfelelően három különböző elemi 1-forma van, ezeket dx_1 , dx_2 , dx_3 jelöli. Nevezetesen, $dx_1, dx_2, dx_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, és ha $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, akkor

$$dx_1(\mathbf{v}) = v_1, \quad dx_2(\mathbf{v}) = v_2, \quad dx_3(\mathbf{v}) = v_3.$$

Az elemi 2-forma egy olyan leképezés, ami két vektorhoz hozzárendeli az egyes koordináta síkokra vett vetületek által meghatározott paralelogramma területét. Ennek megfelelően három különböző elemi 2-forma van, ezeket $dx_1 \wedge dx_2$, $dx_2 \wedge dx_3$, $dx_1 \wedge dx_3$ jelöli. Nevezetesen, ha $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, akkor

$$dx_1 \wedge dx_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \quad dx_1 \wedge dx_3(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \quad dx_2 \wedge dx_3(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Elemi formák $\mathbb{R}^n$ -ben. A továbbiakban az n -dimenziós vektorokat és koordinátáikat így fogjuk jelölni: $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Elemi 1-formákból n különböző létezik: $dx_1, \dots, dx_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $dx_j(\mathbf{v}) = v_j$. Ezek a $\mathbf{v}$ vektorhoz a j -edik koordináta irányába eső vetületének hosszát adják meg.

Elemi 2-forma megadja a két vektor által kifeszített paralelogramma (x_i, x_j) síkra eső vetületének területét.

$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad dx_i \wedge dx_j(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} v_i & w_i \\ v_j & w_j \end{vmatrix}, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a két oszlopvektorból képzett mátrixból fogjuk az i -edik és j -edik sort, és az ebből a két sorból alkotott mátrixnak vesszük a determinánsát. A definícióból következik, hogy elemi 2-formából $\binom{n}{2}$ féle van.

Az elemi k -formák definiálásához először választunk egy $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ indexhalmazt, melyre teljesül, hogy $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Ekkor a dx_I elemi k -forma:

$$dx_I : \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{R}, \quad dx_I(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \det \begin{pmatrix} A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_k} \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbb{R}^{n \times k}$ az $n \times k$ dimenziós mátrixok tere, és A_{i_j} jelöli az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix i_j -edik sorvektorát. Azaz a $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_k \end{pmatrix}$ mátrixból kivesszük az i_j indexeknek megfelelő sorokat, és az ezekből képzett $k \times k$ dimenziós mátrixnak számítjuk ki a determinánsát.

2.2.3. Általános formák. Külső szorzat

Definíció 2.2.2. 1-formának egy $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezést nevezünk.

Könnyen látható, hogy minden ω 1-forma előállítható az elemi 1-formák lineáris kombinációjaként:

$$\omega(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n a_j v_j \quad \implies \quad \omega = \sum_{j=1}^n a_j dx_j.$$

Definíció 2.2.3. Az $\omega : \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés k -forma, ha multilineáris és alternáló. Ez azt jelenti, hogy minden változójára $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ nézve lineáris és két változót felcserélve értéke -1 -szeresre változik.

Az n dimenziós k -formák vektorteret alkotnak, amit $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ -nel jelölünk. Ebben a vektortérben az elemi k formák bázist alkotnak.

6. Feladat. Igazoljuk, hogy $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ -an az elemi k -formák valóban bázist alkotnak, és ezért dimenziója $\binom{n}{k}$.

Legyen τ egy k -forma és λ egy l -forma. Definálni fogjuk ezek külső szorzatát: $\tau \wedge \lambda$, ami egy $k + l$ -forma lesz. Ezt következőképpen kapjuk meg:

1 és $k+l$ között kiválasztunk k darab indexet növekvő sorrendben, ezek $\sigma_1, \dots, \sigma_k$. Ezután a kihagyott l darab indexet növekvő sorrendben elnevezzük $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{k+l}$ -nak. Ezzel az 1-től $k + l$ -ig tartó indexek egy (σ_j) sorbarendezeit - permutációját - kapjuk, amelyre igaz, hogy $1 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_k \leq k + l$, továbbá $\sigma_{k+1} \leq \dots \leq \sigma_{k+l}$.

Definíció 2.2.4. τ és λ külső szorzata (más szóval ékszorzata) $\tau \wedge \lambda : \mathbb{R}^{n \times (k+l)} \rightarrow \mathbb{R}$, melyet így definiálunk:

$$\tau \wedge \lambda(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+l}) = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \tau(\mathbf{v}_{\sigma_1}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma_k}) \cdot \lambda(\mathbf{v}_{\sigma_{k+1}}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma_{k+l}})$$

A fenti szummában σ végigfut az összes lehetséges permutáción, és $|\sigma|$ a permutáció inverzióinak számát jelenti (tehát azt, hogy hány darab cserével érhető el az adott sorrend az eredeti sorrendből kiindulva).

13. Példa. Legyen $\tau = dx_1$ és $\lambda = dx_2$. Azt várjuk, hogy e két formának az ékszorzata megegyezik a 2.2.2 Definícióval. Lehetséges permutációk (a szumma tagjai):

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2: |\sigma| = 0 \implies dx_1(\mathbf{v}) \cdot dx_2(\mathbf{w})$$

$$\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1: |\sigma| = 1 \implies -1 \cdot dx_1(\mathbf{w}) \cdot dx_2(\mathbf{v})$$

Tehát $\tau \wedge \lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v_1 w_2 - w_1 v_2$, ami valóban egyezik a korábban használt determináns értékével.

Állítás 2.2.5. Az ékszorzat tulajdonságai.

1. Két 1-forma ék szorzata antikommutatív: $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$,
2. ill. az általános eset: $\tau \wedge \lambda = (-1)^{k \cdot l} \lambda \wedge \tau$.
3. Asszociatív: $\omega \wedge (\lambda \wedge \tau) = (\omega \wedge \lambda) \wedge \tau$.
4. Disztributív: $\omega \wedge (\lambda + \tau) = \omega \wedge \lambda + \omega \wedge \tau$.

Az antikommutativitás következményei, hogy $dx_i \wedge dx_i = 0$ és $\omega \wedge \omega = 0$, ha k páratlan.

2.2.4. Differenciálformák

A differenciálformák „helytől függő” formák, azaz a tér minden pontjában más formát határoznak meg.

- differenciál 0-forma: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható skalármező
- differenciál 1-forma:

$$\omega = \sum_{j=1}^n f_j \, dx_j,$$

ahol dx_j elemi 1-forma, és $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény.

- differenciál k -forma:

$$\omega = \sum_I f_I \, dx_I,$$

ahol I a lehetséges k elemű indexhalmazokon fut végig. dx_I egy elemi k -forma, és $f_I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényeket jelöl.

Definíció 2.2.6. *Differenciálformák külső deriváltját fogjuk értelmezni.*

1. Ha f egy differenciál 0-forma, akkor külső deriváltja

$$df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i.$$

2. Ha $\omega = f \, dx_I$ egyetlen tagból álló differenciál k -forma. Külső deriváltja $d\omega$ egy differenciál $k+1$ -forma, éspedig

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (dx_i \wedge dx_I).$$

3. Egy differenciál k -forma külső deriváltja:

$$d\omega = \sum_I df_I \wedge dx_I.$$

Általános esetben, ha $\omega = \sum_i \omega_i$, akkor $d\omega = \sum_i d\omega_i$.

Lemma 2.2.7 (Poincaré lemma). *Minden ω differenciálformára $d(d\omega) = 0$.*

14. Példa. Legyen

$$f(x, y) = x^2 y + 2y^3$$

$$df = 2xy \, dx + (x^2 + 6y^2) \, dy$$

Kiszámoljuk $d(df)$ -et. Tagonként deriválva:

$$d(2xy \, dx) = \underbrace{2y \, dx \wedge dx}_{\text{ékszorzat tulajdonságai miatt 0}} + 2x \, dy \wedge dx = -2x \, dx \wedge dy$$

$$d((x^2 + 6y^2) \, dy) = 0 + 2x \, dx \wedge dy$$

$$df = d(2xy \, dx) + d((x^2 + 6y^2) \, dy) = 0$$

7. Feladat. Igazoljuk a Poincaré lemmát differenciál 1-forma esetén.

2.2.5. Differenciálformák $\mathbb{R}^3$ -ban

$\mathbb{R}^3$ -ban a formák használatára néhány konvenciót vezetünk be, amelyekkel összefüggést teremtünk a formák absztrakt világa, valamint a skalár- és vektormezőkről korábban tanultak között. Az elemi 1-formákat jelölje dx , dy , dz . Az ékszorzat jelét mostantól nem írjuk ki, hasonlóan ahhoz, ahogy az egyszerű szorzat jelét is rendszerint elhagyjuk. Defináljuk a következő hozzárendeléseket:

0. T_0 egy 0-formához egy skalármezőt rendel. Mivel egy 0-forma önmagában is egy egyszerű skalármező, ezért egyszerűen saját magát rendeljük hozzá:

$$\omega = f(x, y, z) : \quad T_0(\omega) = f(x, y, z)$$

1. T_1 egy 1-formához vektormezőt rendel a következőképpen:

$$\omega = f \, dx + g \, dy + h \, dz : \quad T_1(\omega) = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

2. T_2 egy 2-formához szintén vektormezőt rendel:

$$\omega = f \, dx \, dy + g \, dx \, dz + h \, dy \, dz : \quad T_2(\omega) = \begin{pmatrix} h \\ -g \\ f \end{pmatrix}$$

3. T_3 egy 3-formához skalármezőt rendel:

$$\omega = f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz : \quad T_3(\omega) = f$$

Ezek a hozzárendelések lehetővé teszik, hogy a korábban definiált vektoroperátorokat visszavezessük a formák deriválására.

Állítás 2.2.8. *A formák külső deriválása, valamint a gradiens, a divergencia és a rotáció között a következő összefüggések állnak fenn:*

1. Ha $\omega \in \bigwedge^0$, $\omega = f$, akkor $T_1(\, d\omega) = \text{grad } T_0(\omega) = \text{grad } f$.

2. Ha $\omega \in \bigwedge^1$, $\omega = f \, dx + g \, dy + h \, dz$, akkor

$$\begin{aligned} T_2(\, d\omega) &= T_2\left((g'_x - f'_y) \, dx \, dy + (h'_x - f'_z) \, dx \, dz + (h'_y - g'_z) \, dy \, dz\right) \\ &= \begin{pmatrix} h'_y - g'_z \\ f'_z - h'_x \\ g'_x - f'_y \end{pmatrix} = \text{rot } T_1(\omega). \end{aligned}$$

3. Ha $\omega \in \bigwedge^2$, $\omega = h \, dx \, dy - g \, dx \, dz + f \, dy \, dz$, akkor

$$T_3(\, d\omega) = T_3\left((h'_z + g'_y + f'_x) \, dx \, dy \, dz\right) = \text{div } T_2(\omega)$$

Következmény 2.2.9. *Abból, hogy $d^2\omega = d(\, d\omega) = 0$, a fentieket figyelembe véve egyenesen következik, hogy $\text{rot grad } f = 0$, és $\text{div rot } F = 0$, ahogy azt a 1.3.5-ban már beláttuk.*

6. Gyakorlat. Igazoljuk, hogy a differenciál 1-formák ékszorzata megfeleltethető a vektoriális szorzatnak:

$$T_2(\omega \wedge \tau) = T_1(\omega) \times T_1(\tau)$$

2.2.6. Formák integrálása sokaságokon

Tegyük fel, hogy $M \subset \mathbb{R}^n$ k dimenziós sokaság, $\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ pedig differenciál k -forma. Ekkor szeretnénk értelmezni az $\int_M \omega$ mennyiséget. Ehhez először két speciális esetet nézünk meg.

1. Ha $n = k = 3$, akkor M egy térrész, és $\omega = f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$. Ebből egy közönséges hármas integrált kapunk:

$$\int_M \omega = \iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

2. Ha $n = 2$ és $k = 1$, akkor M egy görbe: $M = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)) : t \in [a, b]\}$. Az 1-formák terének dimenziója $\binom{n}{k} = 2$, tehát két lineárisan független differenciálformánk van: $\omega_1 = f(x, y) \, dx$, $\omega_2 = g(x, y) \, dy$.

$$\int_M f(x, y) \, dx = \int_a^b f(\gamma(t)) x'(t) \, dt,$$

$$\int_M g(x, y) \, dy = \int_a^b g(\gamma(t)) y'(t) \, dt.$$

Emlékezzünk vissza, hogy korábban is értelmeztük az integrálási változót koordinátatranszformációnál így: $dx = x'(t) \, dt$. Most használjuk fel a sokaságok absztrakt definícióját (2.1.7). A V nyílt gömb most az $[a, b]$ intervallum, a ϕ leképezésnek pedig a $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ felel meg. Ennek Jacobi-mátrixából ($D\gamma = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$) az első esetben az első sort vesszük ki úgy, hogy behelyettesítünk egy elemi formába: $dx(D\gamma) = x'(t)$, a második esetben pedig a második sort. Ennek megfelelően

$$\int_M \omega_1 = \int_M f(x, y) \, dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \, dx(D\gamma) \, dt$$

$$\int_M \omega_2 = \int_M g(x, y) \, dy = \int_a^b g(\gamma(t)) \, dy(D\gamma) \, dt$$

Definíció 2.2.10. Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ k dimenziós sokaság, $\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ differenciál k -forma. A sokaság paraméteres megadásában $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ olyan nyílt gömb, hogy $\phi(V) = M$, valamint $D\phi \in \mathbb{R}^{n \times k}$ teljes rangú mátrix. Ekkor ω M -en vett integrálját a következőképpen definiáljuk:

$$\int_M \omega = \int_V \omega(D\phi) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

Tétel 2.2.11 (Általános Stokes-tétel). Tegyük fel, hogy ω differenciál $(k-1)$ -forma, és M k dimenziós irányítható sokaság. Ekkor $d\omega$ differenciál k -forma, ∂M pedig $(k-1)$ dimenziós irányítható sokaság, és feltéve, hogy M és ∂M irányítása megfelel egymásnak, igaz az, hogy

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Speciális esetek.

1. Legyen $n = k = 1$, azaz a valós számok halmazán (a számegyenesen) tekintünk egy $M = (a, b)$ intervallumot. Ekkor $\partial M = \{b, a\}$. Legyen $\omega = f(x)$, azaz $d\omega = f'(x) dx$. Ekkor

$$\int_M d\omega = \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a), \quad \int_{\partial M} \omega = \int_{\{b,a\}} f = f(b) - f(a).$$

Az első esetben a Newton-Leibniz-formulát használtuk fel, a második esetben az $f(a)$ előjele azért negatív, hogy M és ∂M „irányítása” megegyezzen. Azt látjuk, hogy a *Newton-Leibniz-formula az általános Stokes-tétel speciális esete*.

2. Legyen $n = k = 2$. Ekkor M egy tartomány a síkon, ∂M pedig az őt határoló görbe; $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ és $d\omega = (g'_x - f'_y) dx dy$. Ebből Green tétele következik:

Tétel 2.2.12 (Green-tétel). *A fenti feltételekkel*

$$\oint_{\partial M} f dx + g dy = \iint_M (g'_x - f'_y) dx dy$$

Speciális esetben $f(x, y) = -y$, $g(x, y) = x$. Ekkor a Green-tételt felírva ki tudjuk számolni M területét:

$$\oint_{\partial M} (x dy - y dx) = \iint_M 1 + 1 dx dy = 2 \iint_M dx dy = 2 \cdot A(M)$$

8. Feladat. Lássuk be, hogy a Divergencia tétel az általános Stokes-tétel speciális esete.

9. Feladat. Lássuk be, hogy a klasszikus Stokes tétel az általános Stokes-tétel speciális esete.

3. fejezet

Variációszámítás

3.1. Bevezető példák

Bernoulli-feladat (avagy brachisztokron probléma.)

Adott $A(x_0, y_0)$ és $B(x_1, y_1)$, két pont a síkon. Az A pontból elengedünk egy pontszerű testet. Állandó nagyságú, lefelé irányuló gravitációt és nulla súrlódást feltételezve milyen az a görbe, amelyen a test a legrövidebb idő alatt ér le B -be? A görbét az $y = \phi(x)$ függvény írja le. $\phi : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x_0) = y_0$, $\phi(x_1) = y_1$. Ekkor a leéréshez szükséges idő

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \phi'^2(x)}}{\sqrt{\phi(x) - y_0}} dx$$

Ennek az integrálnak a minimumát keressük a ϕ függvények halmazán.

Forgástest felszín minimalizálás. Adott $A(x_0, y_0)$ és $B(x_1, y_1)$, két pont a síkon az x tengely felett. Ezeket a pontokat összekötjük egy folytonos görbével, melyet $y = f(x)$ ad meg. A görbét megforgatva az x tengely körül az így keletkezett forgástest felszíne mikor lesz a legkisebb, feltéve hogy a görbe két végpontja $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ rögzített?

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \rightarrow \min?$$

Geodetikus görbék. Adott egy felület $\mathbb{R}^3$ -ban, és rajta két pont. A két pontot összekötő, a felületen haladó görbék közül melyik a legrövidebb?

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \rightarrow \min?$$

3.2. Alapfeladat

Egyváltozós feladat matematikai megfogalmazása

Definíció 3.2.1. Adott a síkon két pont, (x_0, y_0) és (x_1, y_1) . Megengedhető függvények halmaza $\mathcal{C}$, melyet így definiálunk:

$$\mathcal{C} = \{ \phi : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ kétszer folytonosan differenciálható, } \phi(x_0) = y_0, \phi(x_1) = y_1 \} \quad (3.1)$$

Adott egy $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ integrál-operátor (funkcionál), amely a megengedett függvények halmazán van értelmezve, és speciális alakú. Nevezetesen,

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x)) dx, \quad (3.2)$$

ahol az F egy adott, kétszer folytonosan differenciálható három változós függvény. Keressük azon $u(x) \in \mathcal{C}$ függvényeket, amelyekre $I(u)$ minimális.

Szeretnénk tudatosítani, hogy itt egy szokatlan jelölést fogunk használni. Az (3.2) funkcionál értékének kiszámításakor F első argumentuma (a megszokott) x , a második argumentumba az $u(x)$ függvényt helyettesítünk, míg a harmadik argumentumba ennek deriváltját. Ennek megfelelően F argumentumait (x, y, z) helyett (x, u, u') -vel jelöljük:

$$F = F(x, u, u').$$

Erre akkor kell nagyon figyelni, amikor u vagy u' , mint változó szerint deriválunk.

Ezek után megfogalmazhatjuk a VARIÁCIÓ SZÁMÍTÁS ALAPFELADATÁT:

$$\min_{\phi \in \mathcal{C}} I(\phi) = ?$$

ahol a funkcionált (3.1) és (3.2) egyenletek definiálják.

A optimalizálási feladat megoldását visszavezetjük a már jól ismert egyváltozós függvény szélsőérték meghatározására.

Tegyük fel, hogy valamely $u = u(x) \in \mathcal{C}$ függvény minimalizálja I -t:

$$I(u) \leq I(y) \quad \forall y \in \mathcal{C}. \quad (3.3)$$

Tekintsük a következő halmazt:

$$\mathcal{C}_0 = \{ \eta : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ kétszer differenciálható, } \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \}$$

Amennyiben u -t egy $\eta \in \mathcal{C}_0$ függvénnyel perturbáljuk, akkor a perturbált függvény is a megengedhető halmazban lesz, mert a peremfeltételeken a perturbáció nem változtatott, azaz $(u + \eta) \in \mathcal{C}$.

Rögzített $\eta \in \mathcal{C}_0$ -ra definiáljuk a következő függvényt

$$G(\varepsilon) := I(u + \varepsilon \eta).$$

Tehát $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy valós függvény, mindenütt differenciálható. A (3.3) feltételből az következik, hogy

$$\forall \varepsilon : \quad G(0) \leq G(\varepsilon) \quad \implies \quad G'(0) = 0.$$

Határozzuk meg $G'(\varepsilon)$ -t. $G(\varepsilon)$ így írható:

$$G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u(x) + \varepsilon \eta(x), u'(x) + \varepsilon \eta'(x)) \, dx.$$

Deriváljuk G -t a láncszabály alapján! (F és parciális deriváltjainak argumentumaiban $(x, u(x) + \varepsilon\eta(x), u'(x) + \varepsilon\eta'(x))$ áll, amit most nem írunk ki.)

$$G'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} (F'_u\eta(x) + F'_{u'}\eta'(x)) \, dx.$$

A második tagot parciálisan integráljuk:

$$\int_{x_0}^{x_1} F'_{u'}\eta'(x) \, dx = \underbrace{[F'_{u'}\eta]_{x_0}^{x_1}}_{\eta(x_0)=\eta(x_1)=0} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \cdot \frac{d}{dx} F'_{u'} \, dx \quad (3.4)$$

Az egész integrál tehát:

$$G'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \left(F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} \right) \cdot \eta(x) \, dx.$$

Ezért minden $\eta \in \mathcal{C}_0$ -ra teljesülnie kell, hogy

$$G'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \cdot \left(F'_u(x, u, u') - \frac{d}{dx} F'_{u'}(x, u, u') \right) \, dx = 0.$$

Ez viszont csak akkor teljesülhet, ha

$$F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0.$$

Így beláttuk a következő szükséges feltételt:

Tétel 3.2.2 (Szélsőérték szükséges feltétele). *Tegyük fel, hogy valamely $u = u(x) \in \mathcal{C}$ függvény minimalizálja I -t. Ekkor az u függvény kielégíti az alábbi összefüggést:*

$$L[u] := \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} = F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0$$

*Ez az **Euler-egyenlet**. Az ezt kielégítő megoldásokat stacionárius megoldásnak nevezzük.*

Az Euler-egyenletben szereplő $\frac{d}{dx} F'_{u'}$ kifejtése a láncszabály alapján:

$$\frac{d}{dx} F'_{u'}(x, u(x), u'(x)) = \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial u} u' + \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial u'} u''$$

Ezt visszahelyettesítve az egyenletbe:

$$F'_u - F''_{u'x} - u' F''_{u'u} - u'' F''_{u'u'} = 0$$

A kapott másodrendű differenciálegyenletben az u függvényt keressük, nincs általános megoldása. (Nem parciális DE, mert az u -t keressük.)

15. Példa. Igazoljuk variációszámítással, hogy két pont között a legrövidebb út az egyenes. Legyen a két pont $P_0(x_0, y_0)$ és $P_1(x_1, y_1)$, az őket összekötő görbét pedig írja le egy $y = y(x)$ függvény, melyre $y(x_0) = y_0$ és $y(x_1) = y_1$. A görbe hossza:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} \, dx, \text{ tehát } F(x, u, u') = \sqrt{1 + u'^2}$$

F nem függ expliciten x -től és u -tól, tehát $F'_u = 0$. Így az Euler-egyenlet:

$$\frac{d}{dx} F'_{u'} = 0 \implies F'_{u'} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2}} 2u' = c \text{ konstans}$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy $u'(x)$ szintén konstans, tehát $y(x) = u(x)$ egy egyenes.

3.2.1. Speciális esetek

1. Amennyiben F nem függ expliciten u' -től, $F = F(x, u)$, akkor $F'_{u'} = 0$, így az Euler-egyenlet egy implicitfüggvény-feladatot ad:

$$F'_u(x, u) = 0$$

2. Ha F nem függ u -tól, akkor $F = F(x, u')$ alakú. Az Euler-egyenlet:

$$-\frac{d}{dx} F'_{u'} = 0,$$

amiből egy integrálással adódik, hogy $F'_{u'} = c$ konstans. Ez azt jelenti, hogy

$$F(x, u') = cu'.$$

Ebből az implicit alakból u' -t kifejezhetjük, majd integrálunk:

$$u'(x) = f(x, c), \implies u = \int f(x, c) \, dx + d, \quad d \text{ konstans.}$$

Ebben az esetben a c és d konstansok megfelelő megválasztásával lehet kielégíteni a peremfeltételeket.

3. A legfontosabb eset az, amikor F nem függ x -től, $F = F(u, u')$. Ekkor definiáljuk a következő függvényt

$$E(x) := F(u(x), u'(x)) - u'(x) F'_{u'}(u(x), u'(x)). \quad (3.5)$$

Ennek deriváltja:

$$E' = u' F'_u + u'' F'_{u'} - u'' F'_{u'} - u'(u' F''_{u'u} + u'' F'_{u'u'}) =$$

$$= u'(F'_u + u'F''_{u'u} + u''F'_{u'u'}) = u'L[u].$$

Ha u stacionárius megoldás, akkor ez alapján

$$\frac{dE}{dx} = u'L[u] = 0,$$

tehát $E(x) = c$ konstans. Ezt a függvényt értelmezhetjük egy *energia mennyiségnek*, ami optimális esetben nem változik.

3.2.2. Forgástest felszín minimalizálás

Az $(x, y(x))$ görbe x_1 és x_2 abszcisszájú pontjai közötti darab megforgatásával kapott forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} \, dx \quad \implies \quad F(u, u') = u\sqrt{1 + u'^2}$$

Tehát ez a fenti 3. speciális eset, amikor F közvetlenül nem függ x -től. Kiszámítjuk a (3.5)-ben definiált energia jellegű függvényt:

$$\begin{aligned} E &= u\sqrt{1 + u'^2} - u' \left(u \frac{1}{2\sqrt{1 + u'^2}} 2u' \right) = \\ &= \frac{u}{\sqrt{1 + u'^2}} (1 + u'^2 - u'^2) = \frac{u}{\sqrt{1 + u'^2}} \end{aligned}$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{u}{\sqrt{1 + u'^2}} = c,$$

ami egy közöséges differenciálegyenlet.

Némi átrendezéssel adódik, hogy ez egy szeparábilis DE:

$$u' = \sqrt{\frac{u^2 - c^2}{c^2}} \quad \implies \quad \int \left(\sqrt{\left(\frac{u}{c}\right)^2 - 1} \right)^{-1} du = \int 1 \, dx.$$

A megoldás tehát

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u}{c}\right)^2 - 1}} du = \int 1 \, dx \quad \implies \quad c \cdot \operatorname{arch} \frac{u}{c} = x + d \quad \implies \quad u = c \cdot \operatorname{ch} \frac{x + d}{c}$$

A feladat megoldása tehát a ch függvény megfelelő lineáris transzformáltja.

Megjegyzés. A ch függvény másik neve a *lánCGörbe*. Ez az a görbe, amit a két végén felfüggesztett lánc felvesz.

3.2.3. Bernoulli-feladat

A minimalizálandó funkcionál, illetve az ezt megadó $F(x, u, u')$ függvény:

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + u'^2(x)}}{\sqrt{u(x)}} dx, \quad \Rightarrow \quad F(u, u') = \frac{\sqrt{1 + u'^2}}{\sqrt{u}},$$

ahol a (megszokott) függvény-változó $u = y - y_0$. Tehát most is az egyik speciális esettel találkozunk, és az Euler egyenlet felírása helyett elegendő a (3.5)-ben megadott E függvényt kiszámolni. Ehhez első lépés

$$F'_{u'} = \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}},$$

majd maga az E függvény:

$$E = F - u' F'_{u'} = \dots = \frac{1}{\sqrt{u} \sqrt{1 + u'^2}} = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ebből az egyenletből kifejezzük u'

$$u' = \sqrt{\frac{1}{c^2 u} - 1}.$$

Ez ismét egy szeparábilis DE lesz, melynek megoldásakor az alábbi integrál adódódik:

$$\int \sqrt{\frac{c^2 u}{1 - c^2 u}} du = \int dx.$$

$\tau := c^2 u$ helyettesítést végzünk, amiből $du = \frac{1}{c^2} d\tau$. Így folytathatjuk:

$$\frac{1}{c^2} \int \sqrt{\frac{\tau}{1 - \tau}} d\tau = x - b, \quad (3.6)$$

ahol b egy újabb szabad paraméter. Még egy helyettesítés: $\tau =: \sin^2(\varphi)$. Ekkor $d\tau = 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi$, és a bal oldali integrál

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{\tau}{1 - \tau}} d\tau &= \int \frac{\sqrt{\sin^2(\varphi)}}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi)}} 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi = \\ &= \int 2 \sin^2(\varphi) d\varphi = \int (1 - \cos(2\varphi)) d\varphi = \varphi - \frac{1}{2} \sin(2\varphi). \end{aligned}$$

Helyettesítsük vissza ezt az eredményt (3.6) egyenletbe:

$$x - b = \frac{1}{2c^2} (\theta - \sin(\theta)), \quad (3.7)$$

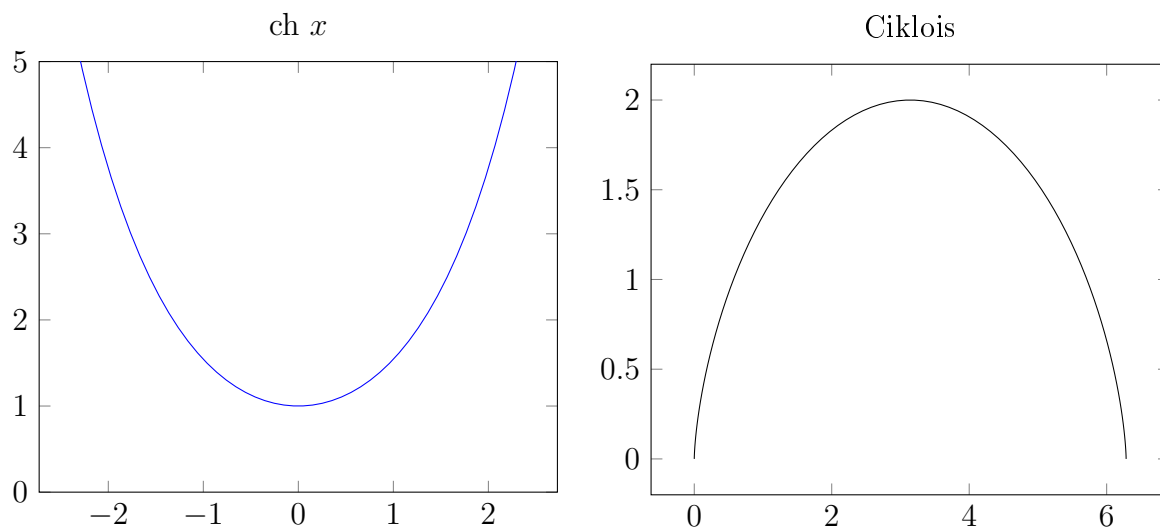
ahol $\theta = 2\varphi$. Másrészt az u függvényt is visszaszámoljuk a sok-sok helyettesítésből:

$$u = \frac{1}{c^2} \tau = \frac{1}{c^2} \sin^2(\varphi) = \frac{1}{c^2} \frac{1 - \cos(\theta)}{2},$$

végül a keresett y függvény:

$$y - y_0 = \frac{1}{2c^2} (1 - \cos(\theta)). \quad (3.8)$$

Megérdemelt jutalomként láthatjuk, hogy a (3.7) és (3.8) épp egy ciklois darab paraméteres leírását adják.



3.1. ábra. A láncgörbe és a ciklois

3.3. Több függvényt keresünk

3.3.1. Példa: geodetikus görbe

Példa: Az egységgör felszínén keressük két adott pont között a legrövidebb összekötő görbét. A görbe pontjainak paraméterezése:

$$(x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [0, 1], \quad \text{ahol} \quad z(t) = \sqrt{1 - x^2(t) - y^2(t)}.$$

Feltesszük, hogy a kezdő és végpontok, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, adottak. Minimalizálni szeretnénk az alábbi ív hosszát:

$$s(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \, dt.$$

Figyelembe véve, hogy $z(t)$ függ $x(t)$ -től és $y(t)$ -től, ilyen típusú függvényt kell minimalizálni:

$$s(\Gamma) = \int_0^1 F(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) \, dt.$$

Az eddigiektől eltérően most két függvényt keresünk: $x(t)$ és $y(t)$, rögzített peremfeltételek mellett.

Feladat kitűzése

Ebben az esetben a megengedett függvények halmaza n koordinátából áll:

$$\mathcal{C} = \{ \phi_1, \dots, \phi_n : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}, \forall j \, \phi_j(x_0) = y_{0j}, \phi_j(x_1) = y_{1j} \},$$

adott $y_{0j}, y_{1j}, j = 1, 2, \dots, n$ mellett.

A funkcionál, aminek szélsőértékét keressük:

$$I(\phi_1, \dots, \phi_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi_1(x), \dots, \phi_n(x), \phi_1'(x), \dots, \phi_n'(x)) \, dx,$$

ahol F adott $(2n + 1)$ változós differenciálható függvény.

Optimalitás szükséges feltétele

Tegyük fel, hogy $u = (u_1, \dots, u_n)$ minimalizálja a költségfüggvényt. Ekkor a j -dik koordinátát perturbáljuk egy $\eta(x) \in \mathcal{C}_0$ függvénnyel, és legyen

$$G(\varepsilon) := I(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j + \varepsilon \eta, u_{j+1} \dots u_n).$$

Most is elmondhatjuk, hogy $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy valós függvény, mindenütt differenciálható. A minimum feltételből az következik, hogy

$$\forall \varepsilon : \quad G(0) \leq G(\varepsilon) \quad \implies \quad G'(0) = 0.$$

Az egyváltozós esettel azonos számolással n darab Euler-egyenletet kapunk.

Tétel 3.3.1 (Szélsőérték szükséges feltétele). *Tegyük fel, hogy valamely $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{C}$ vektor értékű függvény minimalizálja I -t. Ekkor az u függvény kielégíti az alábbi **Euler-egyenleteket**:*

$$L_k[u] = F'_{u_k} - \frac{d}{dx} F'_{u'_k} = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Az ezt kielégítő megoldásokat stacionárius megoldásnak nevezzük.

Speciális esetben F nem függ x -től. Ekkor az előzőekhez hasonlóan igazolható az alábbi állítás:

Állítás 3.3.2. *Tegyük fel, hogy a feladat kitűzésében megadott F függvény nem függ x -től. Ekkor minden stacionárius megoldáshoz van olyan c konstans, hogy a megfelelően definiált energiafüggvényre:*

$$E := F(u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_n) - \sum_{k=1}^n u'_k F'_{u'_k}(u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_n) = c.$$

3.3.2. Legrövidebb út forgástest felszínén

Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt az x tengely körül megforgatva a forgástest felszínének minden pontja két paraméterrel adható meg:

$$P = (x, f(x) \cdot \cos \varphi, f(x) \cdot \sin \varphi),$$

ahol x az alappont, és φ a forgatási szög. Tehát a felületen egy görbe koordinátáit így lehet megadni:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ f(x(t)) \cos \varphi(t) \\ f(x(t)) \sin \varphi(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

A görbe hossza:

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \, dt.$$

Kiszámoljuk az integrál mögött álló mennyiséget:

$$\dot{y} = f'(x)\dot{x} \cos \varphi + f(x)(-\sin \varphi)\dot{\varphi}, \quad \dot{z} = f'(x)\dot{x} \sin \varphi + f(x) \cos \varphi \dot{\varphi}.$$

A két keresett függvény $x = x(t)$ és $\varphi = \varphi(t)$. Rövid számolással azt kapjuk, hogy

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + f'^2(x)\dot{x}^2 + f^2(x)\dot{\varphi}^2} \, dt = (*)$$

A keresett két függvényt úgy redukáljuk, hogy *egymásra vonatkozó változásukat* határozzuk meg. Formálisan számolva:

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (1 + f'^2(x)) + f^2(x) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (1 + f'^2(x)) + f^2(x) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \left(\frac{dt}{dx}\right) \left(\frac{dx}{dt}\right) \, dt = \end{aligned}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'^2(x) + f^2(x)\varphi'^2} \, dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi, \varphi') \, dx,$$

ahol $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$. Így a már megszokott - egy függvényt tartalmazó - funkcionálhoz jutunk, melyből a kifejezést minimalizáló $\varphi = \varphi(x)$ -et kell meghatározni. Ráadásul $F(x, \varphi, \varphi')$ nem függ φ -től. Ennek alapján Euler-egyenlet az alábbira egyszerűsödik:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \equiv c \quad \text{ahol } c \in \mathbb{R}.$$

Azaz:

$$\frac{1}{2\sqrt{1 + f'^2(x) + f^2(x)\varphi'^2}} \cdot 2\varphi' f^2(x) = \frac{\varphi' f^2(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x) + f^2(x)\varphi'^2}} \equiv c$$

Ebből kifejezzük φ' -t. Rövid számolással

$$\varphi'^2 = \frac{c^2(1 + f'^2(x))}{f^2(x)(f^2(x) - c^2)} \implies \varphi' = c \cdot \frac{\sqrt{1 + f'^2(x)}}{f(x)\sqrt{f^2(x) - c^2}}.$$

10. Feladat. Speciális esetként mit ad a fenti számolás, ha $f(x) = k$ konstans függvényt forgatjuk meg? Hogyan értelmezhetjük a kapott optimális megoldást?

3.3.3. Feltételes szélsőérték

Az eddig ismertetett feladatok egy kombinációja, amikor a (3.2) funkcionál szélsőértékét keressük az (3.1) függvények közt, melyek valamely egyéb korlátozó feltételt is kielégítenek, mely ilyen alakú:

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, u(x), u'(x)) \, dx = 0. \quad (3.9)$$

A jól ismert Lagrange féle multiplikátor módszert itt is lehet alkalmazni.

Tétel 3.3.3 (Szélsőérték szükséges feltétele korlátozás mellett). *Tegyük fel, hogy valamely $u = u(x) \in \mathcal{C}$ függvény minimalizálja (3.2) funkcionált a (3.9) feltétel teljesülése mellett. Ekkor van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ konstans, melyre u függvény kielégíti az alábbi összefüggést:*

$$L[u] := \frac{\partial F^c}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^c}{\partial u'} = F^c_u - \frac{d}{dx} F^c_{u'} = 0,$$

ahol $F^c = F - \lambda G$.

11. Feladat. Határozzuk meg két pont között a legrövidebb utat, $P_0(x_0, y_0)$ és $P_1(x_1, y_1)$. Azzal a korlátozással együtt, hogy a két pontot összekötő görbe alatti terület előre meg van adva, T .

3.3.4. Egy mechanikai alkalmazás

16. Példa. Vegyünk egy mechanikai rendszert n szabadsági fokkal. (Egy szabadon mozgó részecske (atom) szabadsági foka például 3, egy kétatomos molekuláé pedig 5.) Jellemezzük a rendszert a q_j mennyiségekkel, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tegyük fel, hogy a rendszer helyzete időben változó, a következő vektor jellemzi:

$$\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)),$$

míg sebessége

$$\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

Ismerjük a kiindulási állapotot $\mathbf{q}(t_0)$, és a végállapotot $\mathbf{q}(t_1)$. A rendszer helyzeti energiáját jelölje $U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, mozgási energiáját pedig $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Azzal a természetes feltétellel élünk, hogy a helyzeti energia valójában nem függ a sebességtől, a mozgási energia pedig nem függ az elmozdulás helyszínétől. Feltesszük, hogy a mozgási energiát egy kvadratikus alak adja meg:

$$T(\dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}} \dot{\mathbf{q}}$$

A fizikai rendszerek vizsgálatában gyökerező **Hamilton-elv** kimondja, hogy optimális mozgás (azaz a valóságban létrejövő folyamat) során a

$$H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

integrál értéke minimális.

Alkalmazzuk a variációszámítás módszerét. Most $F(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$, ezért az optimalitás szükséges feltétele:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = (T - U)'_{\dot{q}_j} = T'_{\dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Belátható, hogy egy $T(\dot{\mathbf{q}})$ kvadratikus alak esetén $\dot{q}T' = 2T$ (az $x(x^2)' = 2x^2$ analógiájára). Emiatt

$$E = F(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}F'_{\dot{\mathbf{q}}} = (T - U) - 2T = -U - T$$

Ebből következik, hogy optimális esetben $U + T \equiv c$ konstans.

3.4. Magasabbrendű deriváltak

Újra egyetlen függvényt keresünk, de az optimalizálandó funkcionálban az ismeretlen függvény második deriváltja is szerepel. A megengedett függvények halmaza ezért kicsit le-

szűkül:

$$\mathcal{C} = \left\{ \phi : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ négyszer folytonosan diff-ható, } \phi(x_0) = y_0, \phi(x_1) = y_1 \text{ adott} \right\}$$

Keressük az alábbi funkcionál szélsőértékeit:

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi', \phi'') \, dx.$$

A 3.2.2 bizonyításához teljesen hasonló levezetéssel (a (3.4)-nek megfelelő helyen két parciális integrálással) következik, hogy a szélsőérték szükséges feltétele:

$$F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{u''} = 0.$$

3.5. Kétváltozós függvény keresése

A variációszámítási feladat során kétváltozós függvényt keresünk, a megengedett függvények halmaza:

$$\mathcal{C} = \left\{ \phi : S \rightarrow \mathbb{R}, S \subset \mathbb{R}^2, \phi(x, y) = u_0(x, y), \forall (x, y) \in \partial S \right\},$$

ahol a megengedett függvények értéke az S tartomány határán előre megadott, rögzített $u_0(x, y)$. Ezek közül keressük azt, melyre az alábbi integrál értéke minimális (vagy maximális, feladattól f):

$$I(\phi) = \iint_S F(x, y, \phi, \phi'_x, \phi'_y) \, d(x, y).$$

Tegyük fel, hogy valamely $u \in \mathcal{C}$ optimális. Perturbáljuk meg ezt egy olyan függvénnyel, mely a határon 0, azaz tetszőleges eleme $\mathcal{C}_0$ -nak:

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ \eta : S \rightarrow \mathbb{R}, \eta(x, y) = 0, \text{ ha } (x, y) \in \partial S \right\}.$$

A perturbált függvény esetén a funkcionál értéke:

$$G(\varepsilon) = I(u + \varepsilon \eta) \geq I(u) = G(0),$$

tehát most is a feltétel $G'(0) = 0$. Ebben az esetben viszont a szélsőérték feltételének a meghatározásánál *parciális differenciálegyenletekkel* kell számolni, amelyek a következő fejezetben kerülnek tárgyalásra. Az Euler-egyenlet ekkor:

$$L[u] = F'_u - \frac{\partial}{\partial x} F'_{u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} F'_{u'_y} = 0.$$

17. Példa.

$$I(\phi) = \iint_S |\text{grad } \phi(x, y)|^2 \, d(x, y) \quad \Longrightarrow \quad F(x, y, u, u'_x, u'_y) = (u'_x)^2 + (u'_y)^2.$$

Az Euler egyenlet:

$$L[u] = 0 - \frac{\partial}{\partial x} 2u'_x - \frac{\partial}{\partial x} 2u'_y = 0$$

Tehát az optimum feltétele a következő parciális differenciálegyenlet teljesülése:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = \Delta u = 0$$

Ez a Laplace-egyenlet.

18. Példa. (Plateau-feladat) Keressük azt a kétváltozós függvényt, amelynek felülete minimális az adott peremfeltételek mellett. Tehát $u(x, y)$ előre megadott minden $(x, y) \in \partial S$ -re. Kétváltozós függvény felszíne:

$$I(u) = \iint_S \sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2} \, d(x, y)$$

A feladat naiv megoldása $u'_x = u'_y = 0$, tehát u konstans függvény. Ez azonban csak akkor megoldás, ha a konstans függvény megengedett, tehát ha u eleget tesz a peremfeltételeknek. Ha ez nem teljesül, akkor az Euler egyenlethez kiszámítjuk F parciális deriváltjait:

$$F'_{u'_x} = \frac{u'_x}{\sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}}, \quad F'_{u'_y} = \frac{u'_y}{\sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}}.$$

Ezeket felhasználva $L[u]$ -ra egy bonyolult PDE-t kapunk, amelyet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$u''_{yy}(1 + u'^2_x) + u''_{xx}(1 + u'^2_y) - 2u'_x u'_y u''_{xy} = 0.$$

Ha u'_x és u'_y nagyon kicsi, tehát u közelítőleg konstans, akkor ez közelíthető a Laplace-egyenlettel.

4. fejezet

Parciális differenciálegyenletek

4.1. Bevezető

A parciális differenciálegyenlet egy olyan összefüggés, ahol az ismeretlen egy többváltozós valós függvény. Az egyenletben szerepelhet maga a függvény (u), parciális deriváltjai: a függvény gradiense, Hesse-mátrixa, magasabb rendű parciális deriváltjai is.

Az ismeretlen függvény koordinátái között néha van egy kiválasztott – t –, ami az **idő** fizikai mennyiségnek felel meg, a többi pedig – x_k – a **hely** koordinátáit adják meg.

Definíció 4.1.1. Legyen α egy multiindex:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Ekkor a D^α differenciál operátor hatása az $u(x)$ n változós függvényre:

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} u$$

ahol $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. a differenciál operátor rendje

A PDE rendje $\max |\alpha|$, a PDE-ben szereplő $D^\alpha u$ -k rendjének maximuma

Definíció 4.1.2. A Laplace operátor egy speciális differenciál operátor, mely a (helykoordináták szerinti) második deriváltak összege:

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n u''_{x_k x_k}$$

Jelölésben a parciális deriváltat alsó indexbe írjuk, tehát például: $u''_{x_k x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$

Alapkérdések

- Megoldható-e a PDE?
- Ha igen, létezik-e egyértelmű megoldás?

Jelenleg nem áll rendelkezésünkre olyan általános elmélet, melynek segítségével az összes PDE-t meg tudnánk oldani, sőt, úgy sejtjük, hogy ilyen elmélet nem is létezik.

- Stabil-e a megoldás?

Stabil megoldásról akkor beszélünk, ha az folytonosan függ a PDE paramétereitől és a kezdeti feltételektől.

Alap PDE-k

A PDE-ket két nagy csoportra oszthatjuk: lineárisra és nemlineárisra.

Lineáris PDE-k

- Transzport egyenlet, $u = u(x, t) = ?$
 $u'_t + b \cdot u'_x = 0$
- Laplace-egyenlet
 $\Delta u = 0$
- Helmholtz-egyenlet
 $\Delta u = -\lambda u$
 Itt a λ -t is keressük, egyben sajátérték probléma is.
- Hővezetés egyenlete Itt u függ az időtől is:
 $u'_t = \Delta u$
- Schrödinger egyenlet
 $i \cdot u'_t = -\Delta u$
- Hullámeqyenlet
 $u''_{tt} = \Delta u$
- Stb...

Nemlineáris PDE-k

- $|\text{grad } u| = 1$
- Minimális felület

$$\text{div} \left(\frac{\text{grad } u}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} \right) = 0$$

- Stb...

A nemlineáris egyenletek lehetnek jól- és rosszul kondicionáltak ("well- and ill-posed").

Jól kondicionált PDE-ről akkor beszélünk, ha létezik egyértelműen olyan megoldása, amely elegendően sima .

Rosszul kondicionált PDE valamelyik fenti kritériumot nem teljesíti, például a megoldása nem differenciálható(!). Ezek nem "rosszabbak", sőt... Ezek az egyenletek írják le többek között a természetben előforduló ugrásszerű változásokat is.

Definíció 4.1.3. *A másodrendű Lineáris PDE-k típusai, melyeket indoklás és magyarázat nélkül felsorolunk, egy-egy példával együtt:*

1. ELLIPTIKUS: $u(x, [y, z, \dots])$

- Laplace-egyenlet: $\Delta u = 0$. Ennek megoldásai a harmonikus függvények.
- Poisson-egyenlet: $\Delta u = f$.

2. HIPERBOLIKUS: $u(x, [y, z, \dots], t)$.

- Hullámegyenlet: $u''_{tt} = \Delta u$.

3. PARABOLIKUS: $u(x, [y, z, \dots], t)$

- Hővezetés egyenlete: $u'_t = \Delta u$

4.2. Elsőrendű PDE: Transzport egyenlet

A legegyszerűbb esettel kezdjük: olyan $u(x, t)$ kétváltozós függvényt keresünk, melyre az alábbi összefüggés igaz:

$$u'_t(x, t) + b \cdot u'_x(x, t) = f(x, t)$$

Ha $f(x, t) \equiv 0$, akkor homogén egyenletről beszélünk, egyébként inhomogénról.

4.2.1. Transzport egyenlet, homogén eset

Tekintsük az alábbi egyenlet

$$u'_t(x, t) + b \cdot u'_x(x, t) = 0,$$

ahol b ismert paraméter.

7. Gyakorlat. Vajon hogyan lehet ezt az összefüggést értelmezni?

Adott továbbá egy $u(x, 0) = g(x)$ kezdeti feltétel, ahol g ismert függvény.

Legyen (x, t) rögzített pont. Definiáljuk az alábbi függvényt, amely az (x, t) ponton áthaladó egyenest mentén adja meg a megoldást:

$$z(s) := u(x + bs, t + s), \quad s \in \mathbb{R}$$

Deriváljuk z -t:

$$z'(s) = u'_x(x + bs, t + s) \cdot b + u'_t(x + bs, t + s) = 0,$$

hiszen u kielégíti a PDE-t. Tehát $z(s)$ konstans. Speciálisan $s = -t$ -re:

$$\begin{aligned} u(x - bt, 0) &= u(x, t) \\ u(x - bt, 0) &= g(x - bt) = u(x, t) \end{aligned}$$

Tehát a PDE-nek létezik egyértelmű megoldása, ha a g kezdeti feltétel deriválható függvény.

Ha a kezdeti érték függvénynek szingularitása van, például egy pontban nem differenciálható, akkor is az egyetlen "értelmes" megoldás $u(x, t) = g(x - bt)$, amit ebben az esetben *gyenge megoldás*nak nevezünk. A szingularitás nem tűnik el, hanem időben tovább terjed.

4.2.2. Inhomogén eset

Tekintsük a transzport egyenlet inhomogén változatát:

$$u'_t(x, t) + bu'_x(x, t) = f(x, t) \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad (4.2)$$

ahol f és g adott függvények.

Ezt az inhomogén feladatot két egyszerűbb részre bontjuk, és u -t a két, egyszerűbb feladat megoldásainak összegeként állítjuk elő. Legyen v a homogén transzport egyenlet megoldása, amely a (4.2) kezdetiértéket kielégíti, w pedig az inhomogén egyenlet megoldása 0 kezdetiértékkel:

$$\begin{aligned} v'_t + bv'_x &= 0, & w'_t + bw'_x &= f(x, t) \\ v(x, 0) &= g(x) & w(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Ekkor $u = v + w$ megoldása lesz a (4.1)-(4.2) feladatnak.

A homogén rész megoldását ismerjük.

A nulla kezdeti feltételű, inhomogén transzportegyenlet megoldása

Ezt is a homogén résznél ismertetett módszerhez hasonlóan oldhatjuk meg. Rögzített (x, t) mellett definiáljuk a $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következőképp:

$$z(s) := w(x + bs, t + s).$$

A függvény deriváltja

$$z'(s) := w_x(x + bs, t + s)b + w_t(x + bs, t + s) = f(x + bs, t + s).$$

Meg akarjuk határozni $z(0) = w(x, t)$ -t. Ehhez integráljuk $z'(s)$ -et a $[-t, 0]$ intervallumon:

$$\int_{-t}^0 z'(s) ds = z(0) - z(-t) = z(0)$$

hiszen $z(-t) = w(x + bt, 0) = 0$. Ez alapján a megoldás:

$$w(x, t) = z(0) = \int_{-t}^0 z'(s) ds = \int_{-t}^0 f(x + bs, t + s) ds = \int_0^t f(x + b(s - t), s) ds$$

A (4.1)-(4.2) feladat teljes megoldása:

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + b(s - t), s) ds.$$

4.3. Másodrendű PDE I: Laplace egyenlet

Ez az egyik leggyakrabban előforduló PDE.

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy n -változós függvény, melyet valamely $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, sima határu tartományon keresünk. A tartomány belsejében:

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n u''_{x_k x_k} = 0. \quad (4.3)$$

A fenti (4.3) egyenlettel együtt adott egy peremfeltétel is. Peremfeltétel alatt azt értjük, amikor $u(x)$ -ről valami ismert, ha $x \in \partial\Omega$.

Három fajta peremfeltételt különböztetünk meg:

1. Dirichlet feltétel

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Példa: Ha egy rugalmas membránt kifeszítünk egy keretre és tudni akarjuk, hogy a membránnak mi lesz a felülete, akkor $f(x)$ a keretet leíró függvény.

2. Neumann feltétel

$$\frac{\partial u}{\partial \underline{n}} = \langle \text{grad } u, \underline{n} \rangle = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad \underline{n} \perp \partial\Omega,$$

azaz megadjuk, hogy u -nak mennyi a határra merőleges iránymenti deriváltja.

Az előző példát folytatva itt nem a keretet leíró függvényt ismerjük, hanem azt, hogy a membránt milyen erővel húzzuk.

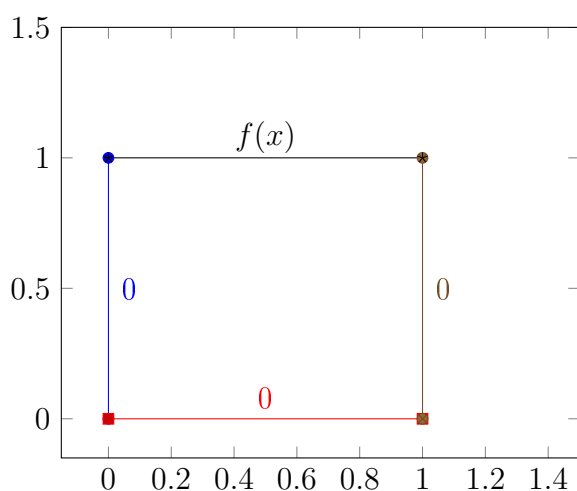
3. Harmadik típusú vagy kevert (mixed) peremfeltétel

$$\alpha u(x) + \beta u'_{\underline{n}}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

A fentiek mind jól kondicionált feladatok, ha a peremfeltételben szereplő függvények eleghőn simák. *Nem létezik általános megoldás.* Bizonyos típusú Ω -k esetén tudunk megoldásról beszélni. Ebben e kurzusban csak az $n = 2$ esettel fogunk foglalkozni.

4.3.1. Téglalap alakú tartomány

Legyen Ω a nyílt egységnyízet a síkon: $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Legyenek a peremfeltételek a következők:



$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0 \\ u(1, y) &= 0 \\ u(x, 0) &= 0 \\ u(x, 1) &= f(x) \end{aligned}$$

4.1. ábra.

Keressük a megoldást szeparábilis $u(x, y) = X(x)Y(y)$ alakban! (Ez nagyon bátor feltételezés, de látni fogjuk, hogy működik.) Ekkor az egyenlet $X''Y + XY'' = 0$. Átrendezve:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} =: \lambda$$

Az egyenlet két oldala, mivel különböző változók függvényei, csak akkor lehetnek egyenlők, ha mindkét oldal konstans. Két közönséges, egyváltozós differenciálegyenletet kapunk. A peremfeltételekből a két egyenletre nézve kezdeti feltételeket vezethetünk le:

$$\left. \begin{array}{l} \forall y : X(0)Y(y) = 0 \\ \forall y : X(1)Y(y) = 0 \\ \forall x : X(x)Y(0) = 0 \\ \forall x : X(x)Y(1) = f(x) \end{array} \right\} \implies Y(0) = X(0) = X(1) = 0$$

Az első egyenlet $X'' = \lambda X$. Ennek megoldása:

1. Tegyük fel, hogy $\lambda > 0$, $\lambda = \alpha^2$. Ekkor az általános megoldás

$$X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

A kezdeti feltételek miatt ekkor

$$X(0) = A + B = 0 \implies B = -A$$

$$X(1) = Ae^{\alpha} + Be^{-\alpha} = 2A \operatorname{sh} \alpha = 0$$

Ez csak akkor lesz igaz, ha $\alpha = 0$ vagy $A = 0$. Mindkét esetben $X \equiv 0$, tehát a feltételezés rossz volt.

2. $\lambda = -\alpha^2$ esetén az általános megoldás

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

A kezdeti feltételekből $A = 0$, $B \sin \alpha = 0$, tehát $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ebből $\lambda = -(k\pi)^2$.

A második egyenlet megoldása:

$$Y'' = (k\pi)^2 Y$$

$$Y(y) = Ae^{k\pi y} + Be^{-k\pi y}$$

A kezdeti feltételből

$$B = -A \implies Y = 2A \operatorname{sh}(k\pi y).$$

Az eredeti kétváltozós egyenlet alapmegoldásai tehát

$$u_n(x, y) = \sin(n\pi x) \operatorname{sh}(n\pi y), \quad n = 1, 2, \dots$$

Az általános megoldás ezek összege:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x) \operatorname{sh}(k\pi y)$$

Felhasználjuk az utolsó peremfeltételt ($u(x, 1) = f(x)$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x) \operatorname{sh}(k\pi) = f(x)$$

A baloldalon egy Fourier-sort kaptunk, ahol csak szinuszos tagok szerepelnek, együttthátjuk pedig

$$b_k = A_k \operatorname{sh}(k\pi)$$

Következésképpen

$$A_k = \frac{1}{\operatorname{sh}(k\pi)} \int_0^1 f(x) \sin(k\pi x) \, dx.$$

(Mivel f csak a $(0, 1)$ intervallumon van megadva, ezért vehetjük olyan kiterjesztését, hogy páratlan függvény legyen, s így Fourier-sorában valóban csak szinuszos tagok szerepeljenek.)

Megjegyzés 4.3.1. *A Variációszámítás fejezetben láttuk, hogy a következő integrál minimumának feltétele a Laplace-egyenlet teljesülése:*

$$\iint_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 \, d(x, y)$$

Ha tehát valamilyen módszerrel megoldást tudunk adni erre a variációszámítási feladatra, akkor egyben megoldást adunk a Laplace-egyenletre is, természetesen az adott peremfeltételek mellett.

4.3.2. Megoldás körlapon

(A fejezet anyaga idén nem szerepelt előadáson.)

Oldjuk meg a Laplace-egyenletet az a sugarú, origó középpontú körlapon!

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2\}, \quad \partial\Omega = \{x^2 + y^2 = a^2\}$$

Legyen W a megoldás polárkoordinátás alakja:

$$W(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin(\theta) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \cos^2(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \sin^2(\theta) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \frac{\partial W}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot r(-\sin(\theta)) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot r \cos(\theta) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot r^2 \sin^2(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot r(-\cos(\theta)) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot r^2 \cos^2(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot r(-\sin(\theta))\end{aligned}$$

Az egyenlet az új koordinátákban:

$$W''_{rr} + \frac{W'_r}{r} + \frac{W''_{\theta\theta}}{r^2} = 0$$

12. Feladat. Igazoljuk a fenti egyenletet.

Keressük a megoldást szeparábilis alakban: $W(r, \theta) = R(r)T(\theta)$. A peremfeltétel ekkor:

$$R(a)T(\theta) = g(\theta)$$

A polárkoordináták természetéből adódóan szükségképpen teljesülnek a következő feltételek:

$$T(0) = T(2\pi) \quad T'(0) = T'(2\pi)$$

Az egyenlet szeparábilis formában:

$$R''T + \frac{R'T}{r} + \frac{RT''}{r^2} = 0.$$

Átrendezve:

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} =: \lambda$$

13. Feladat. Igazoljuk, hogy a fenti egyenletben szereplő konstans nem lehet negatív.

Tehát $\lambda = n^2$. Oldjuk meg a T -re vonatkozó egyenletet:

$$T'' + n^2 T = 0.$$

Ekkor

$$T = A \cos n\theta + B \sin n\theta$$

A kezdeti feltételekből

$$\cos 0 = \cos(2\pi n) \implies n \in \mathbb{Z}$$

Az R -re vonatkozó egyenlet ekkor

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0$$

Az alapmegoldások:

$$R_n(r) = \begin{cases} C_0 + D_0 \ln r & n = 0 \\ C_n r^n + D_n r^{-n} & n \neq 0 \end{cases}$$

Tudjuk, hogy R az egész körlapon differenciálható. Ez az origóban nem teljesülne az $\ln r$ és az r^{-n} függvényekre, amiből következik, hogy jelen esetben minden n -re $D_n = 0$. Tehát $R_n = C_n r^n$. A megoldásba visszahelyettesítve az R -re és T -re kapott függvényeket:

$$W_n(r, \theta) = r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

A peremfeltétel felhasználása:

$$W(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = g(\theta)$$

Az A_n és B_n együtthatókat tehát g Fourier-sorfejtéséből határozhatjuk meg.

4.3.3. A Laplace egyenlet megoldásának néhány tulajdonsága

(A fejezet anyaga idén nem szerepelt előadáson.)

Érdekességgépp felsorolunk a kétváltozós harmonikus függvények néhány jellemző tulajdonságát, bizonyítás nélkül. Emlékeztetek arra, hogy az u függvény harmonikus, ha $\Delta u = 0$.

Állítás 4.3.2. *Ha u harmonikus az Ω tartományon, akkor szélsőértékeit $\partial\Omega$ -n veszi fel.*

Tétel 4.3.3. *Legyen $B \subset \Omega$ egy a sugarú kör (x_0, y_0) körül, u pedig harmonikus függvény. Ekkor*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_B u(x, y) \, ds$$

Tétel 4.3.4 (Green-függvény). *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nyílt tartomány. Vegyük $\partial\Omega$ egy paraméterezését:*

$$\partial\Omega = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in I \},$$

ahol $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum. Ekkor létezik olyan $G(x, y, t) : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy a

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad u(x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$$

feladat megoldása:

$$u(x, y) = \int_I G(x, y, t) f(\gamma(t)) \, dt$$

Mivel a Laplace-egyenlet megoldása mindig az Ω tartománytól függ, a G függvény minden tartományra egyedi. Meghatározásának módszereit most nem tárgyaljuk. Ha például

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},$$

akkor az $u(x, 0) = g(x)$ feltétel mellett

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} \, d\xi$$

A kapott u függvény kielégíti a peremfeltételt, mivel belátható, hogy

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = g(x)$$

4.4. Másodrendű PDE II: Hővezetés egyenlete

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt tartomány, $\Omega_t^+ = \Omega \times (0, \infty)$. Az $u : \Omega_t^+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *megoldása a hővezetési feladatnak*, ha

$$u'_t(\mathbf{x}, 0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(\mathbf{x}, 0).$$

$u(x, t)$ jelenti az adott pontban mért hőmérséklet a t időpontban.

A feladathoz tartozó *kezdeti feltétel*:

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}).$$

A feladathoz tartozó *peremfeltétel*:

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Megállapodás szerint a Laplace-operátorban nem deriválunk a t változó szerint, ezért egyenlet így is írható:

$$u'_t = \Delta u.$$

Most csak az egy-dimenziós, $n = 1$ esettel foglalkozunk. Két alapeladatot fogunk tekinteni: véges ill végtelen tartományon keressük a megoldást.

4.4.1. Hővezetés végtelen hosszú rúdban

Legyen $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$. Ekkor az egyenlet (egy picit általánosabban):

$$u'_t(x, t) = ku''_{xx}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (4.4)$$

ahol $k > 0$ a rúd fizikai konstansa. Legyen a kezdeti érték feltétel $u(x, 0) = f(x)$, megadja a rúd hőmérsékletét a kiindulási időpillanatban. Tegyük fel továbbá, hogy a kezdeti összes hőmennyiség véges:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty.$$

Peremfeltételként azt tesszük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Ennek a feladatnak megoldását két egészen különböző módon is meghatározzuk.

1. Megoldás a frekvencia tartományban

A feladatot a frekvenciatartományban oldjuk meg. Vegyük (4.4) egyenlet Fourier transzformáltját az x változó szerint:

$$\mathcal{F}(u'_t(x, t), s) = k\mathcal{F}(u''_{xx}(x, t), s),$$

ami a Fourier transzformáció alaptulajdonságai szerint így írható:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(u(x, t), s) = -ks^2 \mathcal{F}(u(x, t), s).$$

A t szerinti deriválásnál a frekvenciatartomány s változója konstans. A fenti egyenlet egy ODE-t ad, ahol az ismeretlen függvény $y(t) := \mathcal{F}(u(x, t), s)$ kielégíti az alábbi differenciálegyenletet

$$\dot{y} = -ks^2 y.$$

Ebben az egyenletben s egy külső paraméter. Megoldása:

$$y(t) = C(s)e^{-ks^2 t} = \mathcal{F}(u(x, t), s),$$

ahol $C(s)$ független t -től.

A kezdeti feltételből:

$$\mathcal{F}(f(x), s) = \mathcal{F}(u(x, 0), s) = C(s),$$

ezért f ismeretéből $C(s)$ is meghatározható.

Analízis 2-ből tanultuk, hogy

$$\mathcal{F}(e^{-x^2/2}, s) = e^{-s^2/2},$$

így könnyen felíhatjuk azt a függvényt, aminek Fourier traszformáltja e^{-ks^2t} :

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{\frac{-x^2}{4kt}}, s\right) = e^{-ks^2t}$$

Összegezve azt kaptuk, hogy a keresett függvény Fourier transzformáltjára teljesül, hogy

$$\mathcal{F}(u(x, t), s) = \mathcal{F}(f(x), s) \cdot \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{-x^2/4kt}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f(x) * e^{\frac{-x^2}{4kt}}, s)$$

A konvolúció Fourier transzformáltjáról azt tanultuk, hogy

$$\mathcal{F}(f * g, s) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f, s) \cdot \mathcal{F}(g, s)$$

Tehát a hővezetési feladat megoldása a végtelen hosszú rúdban:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x) * \left(\frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{\frac{-x^2}{4kt}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{2kt}}e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}dy. \quad (4.5)$$

2. Megoldás a változók szétválasztásával

Az egyszerűség kedvéért legyen az egyenletben szereplő konstans $k = 1$. Újra felírjuk a feladatot:

$$\begin{aligned} u'_t(x, t) &= u''_{xx}(x, t), & x \in \mathbb{R}, & t > 0. \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A megoldást szeparált alakban keressük:

$$u(x, t) = T(t)X(x).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} u'_t(x, t) &= T'(t)X(x) \\ u''_{xx}(x, t) &= T(t)X''(x), \end{aligned}$$

így átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -s^2.$$

8. Gyakorlat. Lássuk be, hogy a fenti egyenlet jobboldalán szereplő konstans csak negatív lehet.

Tehát két közönséges DE-t kell megoldani:

$$T'(t) = -s^2 T(t), \quad X''(x) = -s^2 X(x),$$

ahol s tetszőlegesen megválasztható paraméter. A megoldás:

$$u(x, t) = e^{ixs-s^2t}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ennek értéke a peremen: $u(x, 0) = e^{ixs}$.. Ezekből fogjuk 'kikeverni' azt a megoldást, amit keresünk.

Mivel f abszolút integrálható függvény, ezért előállítható

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \widehat{f}(s) ds$$

alakban, ahol $\widehat{f}$ a függvény Fourier transzformáltja.

Állítás 4.4.1. *A fenti peremérték feladat megoldása*

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs-s^2t} \widehat{f}(s) ds. \quad (4.6)$$

14. Feladat. Igazoljuk a fenti állítást.

Határozzuk meg a megoldást most f függvényében, – hiszen ez adott, nem pedig Fourier transzformáltja. $\widehat{f}$ előállítható a Fourier transzformáció segítségével:

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iys} f(y) dy.$$

Ezt behelyettesítve a (4.6) kifejezésbe azt kapjuk, hogy

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t, y) f(y) dy,$$

ahol $K(t, x, y)$ a megfelelő magfüggvény, és pedig

$$K(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(x-y)-s^2t} ds.$$

Ennek megoldása:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy.$$

Megoldás speciális kezdeti feltételek mellett.

Első speciális esetként legyen a hővezető rúd kezdeti eloszlása Dirac delta függvény, $\delta(x)$. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy a rúd a $t = 0$ időpontban aközéppontjában egységnyi hőmennyiséget kap. A PDE azt írja le, hogy ilyen impulzust adva milyen módon fog időben szétoszlani a hő. Ekkor

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

ami egy 0 várható értékű és $\sqrt{2t}$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye.

Második speciális esetként legyen a hővezető rúd kezdeti eloszlása:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{ha } x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Ekkor

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

Újra valószínűségi számításos szemmel ránézve azt kapjuk, hogy

$$u(x, t) = P(-1 \leq \xi \leq 1), \quad \text{ahol } \xi \sim \mathcal{N}(x, \sqrt{2t}).$$

Mindkét példában azt tapasztaljuk, hogy a kezdeti egyenetlen hőeloszlás az idő múlásával egyre inkább egyenletessé válik.

4.4.2. Hővezetés véges rúdban

Legyen $n = 1$, $\Omega = (0, 1)$, $\partial\Omega = \{0, 1\}$. Az egyszerűség kedvéért $k = 1$ -t tekintünk. Ekkor az egyenlet:

$$u'_t = u''_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0. \quad (4.7)$$

A kezdeti érték feltétel

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (4.8)$$

és a peremfeltétel

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Ezt is a változók szétválasztásával oldhatjuk meg. A megoldást $u(x, t) = X(x)T(t)$ szorzat alakban keressük.

A (4.7) egyenlet ilyen alakú lesz:

$$T'(t)X(x) = X''(x)T(t),$$

ahonnan átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Mivel a két oldalon a függvények változói különbözöek, egyenlőség csak akkor fordulhat elő, ha mindkét oldal konstans. Ezért $\exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda = \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

ami két közönséges DE-t ad.

$$T'(t) = \lambda T(t) \tag{4.9}$$

$$X''(x) = \lambda X(x). \tag{4.10}$$

(4.9) általános megoldása $T(t) = ce^{\lambda t}$, $c \in \mathbb{R}$.

A peremfeltételeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(1, t) = X(1)T(t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

Ezért

$$X(1) = X(0) = 0. \tag{4.11}$$

Ha λ pozitív, azaz $\lambda = \alpha^2$, akkor (4.10) általános megoldása

$$X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}.$$

Így

$$X(0) = A + B = 0, \quad X(1) = Ae^{\alpha} + Be^{-\alpha} = 0.$$

Ebből $A = B = 0$ adódik, ezért ebben az esetben nincs nem-triviális megoldás.

Tehát λ negatív, $\lambda = -\alpha^2$. Ekkor A (4.10) általános megoldása

$$X(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x).$$

Így

$$X(0) = A = 0, \quad X(1) = B \sin(\alpha) = 0.$$

Ez csak akkor lehet nem-triviális, ha $\alpha = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

Azt kaptuk, hogy $\lambda = -n^2\pi^2$ alakú. A (4.10) DE hozzátartozó alapmegoldása pedig $X(x) = \sin(n\pi x)$. Az eredeti (4.7) számú PDE $\lambda = -n^2\pi^2$ -hez tartozó alapmegoldása:

$$u(x, t) = Ae^{-n^2\pi^2 t} \cdot \sin(n\pi x).$$

Az általános megoldás a különböző lehetséges λ -k hoz tartozó alapmegoldások lineáris kombinációjaként áll elő.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t} \cdot \sin(n\pi x)$$

A_n -et f Fourier-sorából tudjuk meghatározni. Mivel a $[0, 1]$ intervallumban mozgunk, ez lehet tisztán szinuszos, vagy tisztán koszinuszos is. A $[0, 1]$ intervallumon $\{\sin(nx), n \in \mathbb{N}\}$ és $\{\cos(nx), n \in \mathbb{N}\}$ önállóan is bázist alkot. Nekünk most a tiszta szinuszos előállítás a célra vezet.

15. Feladat. Az idő múltával az alapmegoldásokra

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(k\pi)^2 t} \sin(k\pi x) = 0$$

Igazoljuk, hogy a rúd hőmérséklete is tart a 0-hoz.

16. Feladat. A rúd hőenergiájaként értelmezhető függvény

$$E(t) := \int_0^1 u^2(x, t) \, dx.$$

Bizonyítsuk be, hogy ez időben monoton fogyó.

Következő példaként újra egy véges rúd hőmérséklet változását nézzük. A rúd pontjai: $\{x : 0 \leq x \leq 1\}$. Tegyük fel, hogy $u : [0, 1] \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ megoldása az alábbi feladatnak:

$$\begin{aligned} u'_t(x, t) &= u''_{xx}(x, t), & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u'_x(0, t) &= u'_x(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

A fenti feladatban *Neumann típusú peremfeltétel* van. Definiáljuk a rúd hőenergiáját a t időpontban kicsit másképp, és pedig:

$$\mathcal{T}(t) := \int_0^1 u(x, t) \, dx.$$

Igazoljuk, hogy ekkor ez a hőenergia időben állandó. Valóban, a fenti mennyiség deriváltja t szerint

$$\mathcal{T}'(t) = \int_0^1 u'_t(x, t) \, dx = \int_0^1 u''_{xx}(x, t) \, dx,$$

felhasználva a hővezetés egyenletét. Ebből következik, hogy

$$\mathcal{T}'(t) = \int_0^1 u''_{xx}(x, t) \, dx = [u'_x(x, t)]_{x=0}^{x=1} = 0.$$

Ezért $\mathcal{T}(t)$ konstans, és pedig a kiinduló értékkel egyezik meg:

$$\mathcal{T}(t) = \mathcal{T}(0) = \int_0^1 f(x) \, dx =: \mathcal{T}.$$

Fizikai és matematika intuíciónk alapján azt "várjuk", hogy a rúd hőmérséklete homogén lesz, azaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \mathcal{T}, \quad \forall x \in (0, 1). \quad (4.12)$$

17. Feladat. Igazoljuk, hogy a fenti intuíció nem csal, és igaz a (4.12) határátmenet.

4.4.3. Hővezetés visszafelé

Oldjuk meg az előző feladatot úgy is, hogy az időben nem előre, hanem visszafelé haladunk úgy, hogy a 0. időpillanatban a rúd hőmérsékletét az $f(x) \neq 0$ függvény írja le.

Először is, mit várunk?

A rúd végtelen ideig hűlt, hiszen a két végéről hűtjük (a peremfeltételek nullák) és mégis nullától különböző a hőmérséklete. Ez azt jelenti, hogy kezdetben végtelenül forrónak kellett lennie, vagyis a megoldásnak a $-\infty$ -ben fel kell robbannia. Nézzük meg, mit mond a matematikai megoldás!

Legyen $U(x, t) = u(x, -t)$. Az inverz hővezetést leíró egyenlet így néz ki:

$$U'_t = -U''_{xx}.$$

Látható, hogy bejött egy negatív előjel. Ennek megoldását levezetve az előzőek szerint, ugyanúgy megkapjuk a végtelen szummát, de a hatványkitevőben egy pozitív szám lesz:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{+n^2 \pi^2 t} \cdot \sin(n\pi x)$$

Ebből látszik, hogy ez a megoldás valóban felrobban minden x -re $t \rightarrow \infty$ esetén.

4.5. Másodrendű PDE III: Hullámegyenlet.

4.5.1. Hullámmozgás végtelen húrban

Tekintsünk egy végtelen hosszú rugalmas hűrt, és legyen $u(x, t)$ a t időpontban a húr x pontjának kitérése. Ha a húr hullámmozgást végez, akkor fizikai megfontolások alapján $u(x, t)$ olyan kétszer folytonosan differenciálható függvény, mely kielégíti az alábbi hiperbolikus PDE-t

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.13)$$

ahol c adott konstans. A feladat akkor lesz egyértelműen megoldható, ha megadjuk a kezdeti időpontban a húr helyzetét és az egyes pontokhoz tartozó pillanatnyi sebességet. A kezdetérték feltételek tehát

$$u(x, 0) = f(x), \quad u'_t(x, 0) = g(x), \quad (4.14)$$

ahol f és g adott folytonosan differenciálható függvények.

A feladat *D'Alembert-féle megoldását* adjuk meg. Alkalmazzunk egy koordináta transzformációt:

$$\xi := x + ct, \quad \eta := x - ct.$$

Az inverz transzformáció

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2c}.$$

Ezt behelyettesítve a keresett függvénybe egy U függvényt kapunk:

$$U(\xi, \eta) := u\left(\frac{\xi - \eta}{2c}, \frac{\xi + \eta}{2}\right)$$

Számoljuk ki ennek vegyes másodrendű parciális deriváltját.

$$\begin{aligned} U'_\xi &= u'_t \frac{1}{2c} + u'_x \frac{1}{2}, \\ U''_{\eta\xi} &= u''_{tt} \frac{1}{2c} \cdot \frac{-1}{2c} + u''_{xt} \frac{1}{2c} \cdot \frac{1}{2} + u''_{tx} \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2c} + u''_{xx} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (u''_{tt} \frac{-1}{c^2} + u''_{xx}) = 0. \end{aligned}$$

Vagyis kiderült, hogy $U'_\xi(\xi, \eta)$ független η -tól, így:

$$U'_\xi(\xi, \eta) = F_0(\xi).$$

Ezért

$$U(\xi, \eta) = \int U'_\xi d\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

valamely alkalmas F és G függvények mellett.

Ezt visszahelyettesítve az eredeti függvénybe beláttuk az alábbi tételt:

Tétel 4.5.1. A (4.13) a hullámegyenlet PDE általános megoldása

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct),$$

ahol F és G kétszer folytonosan differenciálható valós függvények.

9. Gyakorlat. Közvetlen számolással lássuk be, hogy tetszőleges kétszer differenciálható φ valós függvényre $u(x, t) = \varphi(x + ct)$ és $u(x, t) = \varphi(x - ct)$ a hullámegyenlet megoldásai lesznek.

Meghatározzuk a (4.14) peremfeltételeket kielégítő megoldást. Ezt összeg alakban fogjuk keresni:

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t),$$

különválasztva a két kezdeti feltételt. Tehát $u^{(1)}(x, t)$ és $u^{(2)}(x, t)$ megoldásai az eredeti (4.13) egyenletnek, ilyen kezdeti feltételekkel:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x, 0) &= f(x) & (u^{(1)})'_t(x, 0) &= 0 \\ u^{(2)}(x, 0) &= 0 & (u^{(2)})'_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$u^{(1)}(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2},$$

és

$$u^{(2)}(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) ds - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) ds.$$

Állítás 4.5.2. A (4.13) a hullámegyenlet (4.14) kezdetiérték feltételt teljesítő megoldása egyértelmű, és pedig

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

Megjegyzés. Kis magyarázat a D'Alambert féle megoldásról: Az eredeti parciális differenciálegyenlet azt jelenti, hogy meg akarjuk oldani az

$$L[u] = 0$$

egyenletet, ahol L a következő parciális differenciál - operátor

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Ez formálisan szorzattá bontható:

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) = L_1 L_2.$$

Az $L_1[v] = 0$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet egy transzport egyenlet, melynek megoldásai $v(x, t) = F(x + ct)$ alakúak. Az $L_2[w] = 0$ parciális differenciálegyenlet szintén egy transzport egyenlet, ennek megoldásai pedig

$$w(x, t) = G(x - ct)$$

alakúak.

4.5.2. Gyenge megoldás. Néhány tanulságos példa

A D’Alambert féle megoldásban szereplő függvényt akkor is fel tudjuk írni, ha a kezdeti feltételek nem differenciálhatók. Ekkor a kapott $u(x, t)$ függvény nem lesz differenciálható, és *gyenge megoldásról* beszélünk. Érdekes lehet az alábbi példák megoldásával megfigyelni, hogy a kezdeti feltételeben jelen levő "töréspontok" időben kisimulnak-e vagy sokszorozódnak. Mivel hullámegyenlet homogén lineáris, ezért külön vizsgálhatjuk a kezdeti feltételek hatását.

18. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a húr, ha a kezdeti időpontban a kitérés:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases},$$

és a pillanatnyi sebességek $g(x) \equiv 0$.

19. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a húr, ha a kezdeti időpontban a pillanatnyi sebesség:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases},$$

és $f(x) \equiv 0$.

20. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a húr, ha a kezdeti időpontban a kitérés az alábbi alakú:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{ha } x \in [-1, 0] \\ -x + 1 & \text{ha } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{ha } x \notin [-1, 1] \end{cases},$$

továbbá a pillanatnyi sebességek $g(x) \equiv 0$.

21. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a húr, ha a kezdeti időpontban a pillanatnyi sebesség:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{ha } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{ha } x \notin [-1, 1] \end{cases},$$

továbbá kitérés $f(x) \equiv 0$.

Tárgymutató

- atlasz, 17
- Bernoulli-feladat, 32
- brachistokron probléma, 32
 - megoldása, 37
- cirkuláció, 10
- differenciálforma, 26
- divergencia, 4
- Divergencia tétel, 8
- ékszorzat, 25
- érintőtér, 21
- Euler-egyenlet, 34
 - korlátozás melletti optimum keresés, 41
- felületi integrál
 - skalármezőé, 6
 - vektormezőé, 7
- fluxus, 7
- formák
 - általános, 24
 - ékszorzata (külső szorzata), 25
 - differenciál-, 26
 - elemi, 23
 - integrálása sokaságokon, 29
- függvényrendszer, 2
- Gauss-Osztrogradszkij-tétel, 8
- Green tétel, 11
- Green-függvény, 55
- Green-tétel, 30
 - területszámítás, 12
- Hővezetés egyenlet megoldása, 56
- harmonikus függvény, 55
- hullámmozgás egyenlete, 62
- irányítás, 22
- koordinátafüggvény, 2
- külső derivált, 26
- külső szorzat, 25
- Laplace egyenlet megoldása
 - körlapon, 53
 - téglalapon, 51
- lokális térkép, 17
- nabla, 3
- normáltér, 21
- nyílt lefedés, 17
- paralelotóp
 - mértéke, 22
- parciális differenciálegyenlet
 - elliptikus, 50
 - hiperbolikus, 62
 - parabolikus, 56
- permutáció, 25
- Plateau-feladat, 44
- rotáció, 4
- skalármező, 2
- skalárpotenciál, 5
- sokaság
 - határa, 16
 - implicit megadása, 20

- irányíthatósága, 22
- lezárása, 16
- paraméteres megadása, 15
- topologikus térben, 17
- stacionárius megoldás
 - variációszámításban, 34
 - több függvény, 39
- Stokes-tétel
 - általános, 29
 - klasszikus, 10
- tangenstér, 21
- topologikus tér, 17
- transzport egyenlet, 48
- vektormező, 2
 - differentiálási szabályok, 3
 - differentiálhatósága, 2
 - folytonossága, 2
- vektorpotenciál, 5
- vonaltintegrál
 - skalármezőé, 6
 - vektormezőé, 7

Irodalomjegyzék

- [1] Thomas A. Garrity, Chapter 5-6, *All the Mathematics You Missed (But Need To Know For Graduate School)*, Cambridge University Press, 2002.
- [2] R. Courant és F. John, „Calculus of Variations”, *Introduction to Calculus and Analysis, Vol. II/2.*, Springer-Verlag, 1989.
- [3] M. Renardy, R. C. Rogers, Chapter 1, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1993.