

Bohner Gergő

Sokaságok analízise

A topológiai alapok

Források

- *Thomas A. Garrity: All the mathematics you missed... Cambridge University Press, 2002.*
- *Mikio Nakahara: Geometry, Topology and Physics, Second Edition, 2004*

A topológia alapjai

Topologikus terek

A térfogalom legbővebb halmaza. Ennek részhalmazát alkotják a sokaságok, s annak egy részhalmazát pedig a metrikus terek.

Definíció 1.1

Legyen X tetszőleges nemüres halmaz, $T = \{U_i | i \in I\}$ pedig X részhalmazainak halmaza, ahol $\forall U_i \subseteq X$ és I a részhalmazok indexeit tartalmazó (akár végtelen) halmaz.

Az (X, T) rendezett párt topologikus térnek nevezzük, ha

1. $\emptyset, X \in T$
2. Ha J tetszőleges (akár végtelen) részhalmaza I -nek, akkor $\{U_j | j \in J\}$ -re $\bigcup_{j \in J} U_j \in T$
3. Ha K véges részhalmaza I -nek, akkor $\{U_k | k \in K\}$ -re $\bigcap_{k \in K} U_k \in T$

Az $U_i \in T$ halmazokat **nyílt halmazoknak** nevezzük és a teljes T halmaz pedig topológiát határoz meg X -en.

Egy $A \subseteq X$ halmaz **zárt**, ha a komplementere nyílt, azaz $X - A \in T$. A zártság és nyíltság definiálása után, az ismert módon definiálhatók a halmaz **belső**-, **külső**- és **határpontjainak halmaza**.

Egy halmaz **kompakt**, ha tetszőleges nyílt lefedéséből kiválasztható véges zárt lefedés.

Egy $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **metrika** X -en, ha kielégíti az alábbi feltételeket:

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) \geq 0$ és egyenlő akkor és csak akkor, ha $x = y$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

$\forall x, y, z \in X$ -re. A metrikus terek nagy szerepet játszanak a fizikában és a geometriában.

Definíció 1.2

T határozzon meg topológiát X -en. Ekkor N **környezete** egy $x \in X$ pontnak, ha N részhalmaza X -nek és N tartalmaz legalább egy olyan U_i nyílt halmazt, mely tartalmazza x -et.

Definíció 1.3

Egy (X, T) topologikus tér **Hausdorff tér**, ha bármely két $x_1, x_2 \in X$ különböző ponthoz léteznek az U_{x_1}, U_{x_2} környezetek, melyekre $U_{x_1} \cap U_{x_2} = \emptyset$

Definíció 1.4

Legyenek X_1 és X_2 topologikus terek.

Ekkor az $f: X_1 \rightarrow X_2$ leképezés homeomorfizmus, ha az f és az $f^{-1}: X_2 \rightarrow X_1$ leképezések folytonosak.

Ekkor X_1 és X_2 **homeomorfak**.

Ezen definíció által a topologikus tereket ekvivalencia-osztályokba osztottuk a szerint, hogy melyek homeomorfak egymással.

Sokaságok

A sokaságok a görbék és felületek koncepciójának általánosítása. Tehát egy sokaság általában egy olyan topologikus tér, melyre lokálisan minden pont egy környezet R^k -val homeomorf, de ez globálisan nem feltétlenül igaz. Ha globálisan nem homeomorf R^k -val, akkor többféle lokális koordináta bevezetésére van szükség, tehát egy pont több koordinátával is rendelkezhet. Ekkor elvárjuk a különböző koordinátarendszerek közti leképezés simaságát.

Definíció 1.5

M k dimenziós differenciálható sokaság R^n -ben, ha $\forall p \in M, R^n$ pontnak $\exists U$ környezete, melyre

$\exists F: R^k \rightarrow R^n$ és $\exists V \in R^k$ nyílt halmaz

a) $F(V) = U \cap M$

b) F Jacobi-mátrixának rangja V minden pontjára k .

Ekkor F -et a sokaság lokális parametrizációjának nevezzük.

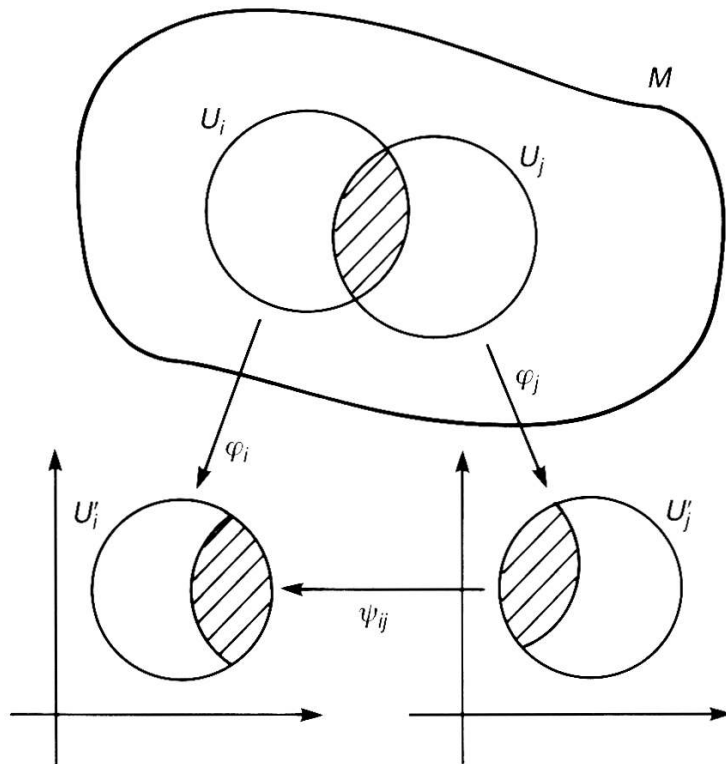
Definíció 1.6

Egy megszámlálható bázisú topológiával rendelkező Hausdorff topologikus tér M , n dimenziós sokaság, ha létezik egy olyan nyílt lefedése, melyre:

Minden U_i nyílt halmazhoz definiálva egy $\phi_i: R^n \rightarrow U_i$ egy-egy értelmű leképezést, a

$$\Psi_{ij} = \phi_i^{-1} \phi_j : \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$$

leképezés differenciálható.



Sokaságok megadása R^n -ben

Parametrikus megadás

A1.6-os definíció alapján látható, hogy egy sokaság megadható paraméteresen, azaz minden pontját definiáljuk egy R^n -beli nyílt halmazból történő leképezés által.

A későbbiekben is látható módon a parametrikusan megadott sokaságok tangens-tere könnyen meghatározható.

Implicit megadás

Egy R^n -beli M -halmaz k -dimenziós sokaság, ha bármely $p \in M$ ponthoz létezik egy U nyílt halmaz és $(n - k)$ differenciálható függvény: $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-k}$, melyekre:

1. $M \cap U = (\rho_1 = 0) \cup (\rho_2 = 0) \cup \dots \cup (\rho_{n-k} = 0)$

2. Bármely $q \in M \cap U$ pontban a

$$\nabla \rho_1(q), \nabla \rho_2(q), \dots, \nabla \rho_{n-k}(q)$$

gradiens vektorok lineárisan függetlenek.

Megmutatható, hogy a gradiens vektorok a sokaság normálvektorai.

Feladat 1.1

Most, hogy már tudjuk, mi a sokaság, a definíció alapján ellenőrizni tudjuk bármely megadott halmazról, hogy sokaság-e.

Definiáljuk az $R^{n+1} - (0)$ halmazon az alábbi ekvivalencia-relációt

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Mutassuk meg a $P^n = R^{n+1} - (0) / \sim$ módon definiált n -dimenziós valós projektív tér n -dimenziós sokaság.

Ennek bizonyítására használjuk a sokaság alábbi parametrikus megadását:

$$\begin{aligned} \phi_i : R^n &\rightarrow P^n \\ \phi_i(u_1, \dots, u_n) &= (u_1 : \dots : u_i : 1 : u_{i+1} : \dots : u_n) \\ i &= 1 \dots n \end{aligned}$$

Ezen leképezésekkel megmutatható, hogy P^n n -dimenziós sokaság.

Válasszuk ki a fent definiált leképezések közül bármely kettő különbözőt (i, j) és mutassuk meg, hogy 1.6-os definíció feltétele alapján felírt leképezés differenciálható lesz.

Legyen $U_i, U_j \subseteq P^n$ a leképezések értékkészlete. Ekkor triviálisan $U_i \cap U_j = \{\vec{y} \in R^{n+1} \mid y_i, y_j \neq 0\}$

Vizsgáljuk a $\phi_i^{-1}\phi_j$ leképezés differenciálhatóságát.

Tekintsük meg, mit csinál a leképezés egy $x \in R^n \mid x' = \phi_j(x) \in U_i \cap U_j$ vektorral a leképezés.

Mivel x' a metszet-halmaz része, ezért x_i nem nulla, tehát leoszthatjuk vele a vektort, mely a projektív téren definiált ekvivalencia miatt ugyanaz a vektor marad ilyenformán. Ekkor viszont értelmezhetjük a ϕ_i^{-1} leképezést az x' vektoron, hisz az i . koordinátája 1.

Ekkor az eredményvektor:

$$x'' = \phi_i^{-1} \phi_j(x) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{1}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Az összetett leképezésnek felírhatjuk a Jacobi-mátrixát, ha a determinánsa nem 0, akkor teljes rangú, azaz a leképezés differenciálható. Az egyszerűség kedvéért az $n=2, i=0, j=1$ esetre felírva a mátrixot:

$$\det J = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_0^2} & 0 \\ \frac{x_1}{x_0^2} & \frac{x_0}{x_0^2} \end{pmatrix} \neq 0$$

Ez láthatóan teljes rangú, tehát megmutattuk, hogy P^2 valóban 2-dimenziós sokaság. Az állítás hasonlóan mutatható meg több dimenziós projektív terekre.

Megjegyzés

A feladat érdekes általánosítását adja az úgy nevezett Grassman-sokaság. Ezt úgy definiálhatjuk, mint egy vektortérbeli alterek halmazát. Specifikusan $G_{k,n}(R)$ a k -dimenziós affin alterek Grassman-sokasága R^n -ben.

Mivel a fent leírt projektív tér az 1 dimenziós alterek sokasága R^{n+1} -ben, így $G_{1,n+1}(R) = P^n$. Érdekes, s a fentihez hasonlóan bizonyítható tétel, hogy $\dim G_{k,n} = k * (n - k)$

Sokaságok szorzata

További, a témához kapcsolódó érdekességet jelenthet, hogy értelmezzük két sokaság szorzatát.

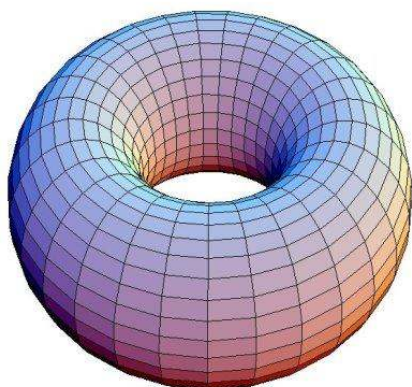
Legyen M m -dimenziós sokaság, $\{U_i, \phi_i\}$ atlisszal, N pedig n -dimenziós, $\{V_j, \psi_j\}$ atlisszal.

Ekkor az $M \times N$ szorzat által definiált térre teljesülnek a következők:

1. $m+n$ dimenziós
2. atlasza $\{(U_i \times V_j), (\phi_i, \psi_j)\}$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az így definiált szorzatra valóban teljesülnek a 1.6-os definíció feltételei, azaz valóban sokaság.

A legjobb példa erre az egység-tórusz: $T^2 = S^1 \times S^1$, mely így két koordinátával leírható (θ_1, θ_2) , melyek a $[0, 2\pi)$ intervallumba eső szögek. Továbbá ez megmutatja azt is, hogy bár R^3 -be is befoglalható a tórusz, R^4 -en azonban síkba foglalható (hisz $S^1 \in R^2$ is sík).



Láthatóan az egyik koordináta a tórusz vízszintes metszete által leírt körön lévő szöget írja le, míg a másik a tórusz egy felnyitása által kivágott körön lévő szöget.

Sokaságokon értelmezett függvények differenciálhatósága

Definíció 1.7

Legyen f valós értékű függvény egy M sokaságon. Ekkor f differenciálható a sokaságon, ha M egy U_α nyílt lefedéséhez és $\phi_\alpha : \{R^n\text{-beli nyílt gömb}\} \rightarrow U_\alpha$ leképezésekre az

$$f \circ \phi_\alpha : \{R^n\text{-beli nyílt gömb}\} \rightarrow R$$

összetett függvény differenciálható.

Sokaságok tangens terei

Implicit sokaságok tangens tere

Legyen M egy R^n -beli k -dimenziós impliciten megadott sokaság. Ekkor a definíció szerint bármely $p \in M$ pontjában létezik egy, a pontot tartalmazó nyílt halmaz (U) és $(n - k)$ valós értékű U -n definiált függvény $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-k}$, melyekre

1. $M \cap U = (\rho_1 = 0) \cup (\rho_2 = 0) \cup \dots \cup (\rho_{n-k} = 0)$

2. Bármely $q \in M \cap U$ pontban a

$$\nabla \rho_1(q), \nabla \rho_2(q), \dots, \nabla \rho_{n-k}(q)$$

gradiens vektorok lineárisan függetlenek.

Definíció 1.8

Egy M sokaság $p \in M$ pontbeli $N_p(M)$ **normál terét** a p -beli gradiens-vektorok feszítik ki.

A sokaság ezen pontbeli $T_p(M)$ **tangens terét** az $v \in R^n \mid v \perp N_p(M)$ vektorok adják, azaz egy $v = (v_1, \dots, v_n)$ vektor a $T_p(M)$ tangens térben van, ha $\forall i = 1, \dots, n - k$ -ra

$$0 = v \cdot \nabla \rho_i(p)$$

Parametrikus sokaságok tangens tere

Legyen M R^n -beli sokaság, a $\phi : \{R^k\text{-beli gömb}\} \rightarrow R^n$ parametrizáló leképezés, melyet n függvény határoz meg: $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$

Ekkor a ϕ leképezés Jacobi mátrixa

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$

Definíció 1.9

Az M sokaság p pontbeli $T_p(M)$ **tangens terét** a Jacobi-mátrix oszlopvektorai feszítik ki.

Általános sokaságok tangens tere

Tekintsünk egy általános (azaz nem vektortérbe ágyazott) M sokaságot. A tangens-terének meghatározásához meg kell vizsgálnunk a differenciálható függvények deriváltjait a $p \in M$ pont környezetében (U). Jelöljük az U -n értelmezett f differenciálható függvényt (f, U) -val, továbbá definiáljunk egy ekvivalencia-relációt, $(f, U) \sim (g, V)$ ha az $U \cap V$ halmazon $f = g$.

Ekkor definiálhatjuk a $C_p^\infty = \{(f, U)\} / \sim$ vektorteret, mely a p ponthoz közeli függvények tulajdonságait írja le.

Ekkor a tangens tér p -ben $T_p(M)$ azon $v : C_p^\infty \rightarrow C_p^\infty$ lineáris leképezések tere, melyekre

$$v(fg) = fv(g) + gv(f)$$

Ebből a definícióból pedig levezethető a parametrikusan és impliciten megadott sokaság tangens tereinek kiszámítása.

Irányítás

Vektorterek irányítása

Legyen $[v]$ és $[w]$ egy V vektortér két bázisa és $A \in R^{n \times n}$ a bázistranszformáció mátrix, melyre $x_{[w]} = Ax_{[v]}$. Mivel a két bázis dimenziója azonos, így A biztosan nem szinguláris, azaz $\det A \neq 0$.

Ekkor azt mondjuk, hogy V két bázisa, azonos irányítású, ha $\det A > 0$, és különböző irányítású, ha $\det A < 0$. Az irányítás láthatóan ekvivalencia-relációt ad a bázisok halmazán.

Sokaságok irányítása

Egy M sokaság akkor rendelkezik irányítással, ha minden $T_p(M)$ tangens térre egy simán változó irányítást tudunk választani, azaz pontról-pontra sima módon mozgathatjuk a bázisunkat.

Legyen X° nyílt, összefüggő halmaz az irányított M sokaságban, s jelölje $\bar{X}$ az X° lezárását.

Ekkor X határa, $\partial(X) = \bar{X} - X^\circ$ egy sima sokaság, mely eggyel kevesebb dimenziós, mint M .

Az X° nyílt halmaz irányítása M -től öröklődik. A cél, hogy megmutassuk, hogy $\partial(X)$ irányítása kanonikus.

Legyen $p \in \partial(X)$. Mivel $\partial(X)$ dimenziója 1-gyel kevesebb, mint M -é, így $\dim N_p(X) = 1$.

Az n normálvektor mutasson X -ből kifelé. Ez az n vektor M -nek tangens-vektora.

Legyen a $T_p(\partial(X))$ egy bázisa $[v] = (v_1, \dots, v_{n-1})$ olyan, hogy a $[v'] = (n, v_1, \dots, v_{n-1})$ bázis irányítása megegyezik M irányításával.

Megmutatható, hogy $T_p(\partial(X))$ ilyen módon választott bázisai azonos irányításúak, tehát a $(v_1, \dots, v_{n-1})$ vektorok irányítást határoznak meg $\partial(X)$ -en.

Integrálás sokaságokon

A cél, hogy értelmezzük a

$$\int_M \omega$$

jelölést, ahol M egy k -dimenziós sokaság és ω egy differenciál k -forma.

Megjegyzés:

Ezen fejezet feltételezi, hogy az olvasó tisztában van az elemi és differenciál formák elméletével. Emlékeztetőül, egy differenciál k -forma R^n -ben az alábbi módon adható meg: Legyen $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ egészek halmaza, melyekre

$$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

továbbá legyen

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Ekkor egy ω differenciál k -forma az alábbi módon adható meg:

$$\omega = \sum_{\text{minden lehetséges } I} f_I dx_I$$

ahol minden $f_I = f_I(x_1, x_2, \dots, x_n)$ differenciálható függvény.

A megértés elősegítése céljából először tekintsünk egy egyszerű példát:

Példa:

Tekintsük R^2 -ben az 1 dimenziós formák integrálását 1 dimenziós sokságon (görbén).

Ezt a $C \subset R^2$ görbét parametrizálja az alábbi leképezés:

$$\sigma : [a, b] \rightarrow R^2$$

$$\sigma(u) = (x(u), y(u))$$

Ha $f(x, y)$ folytonos függvény R^2 -en, akkor definiáljuk a vonalintegrált az alábbi módon:

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(u), y(u)) \frac{dx}{du} du$$

Láthatóan a jobb oldalon egy egyszerű egyváltozós határozott integrál áll.

Definiáljuk hasonlóan a $\int_C f(x, y) dy$ -t képletet is:

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(u), y(u)) \frac{dy}{du} du$$

Vegyük a $\sigma(u)$ parametrizáló leképezés Jacobi mátrixát: $J_\sigma = \begin{pmatrix} dx/du \\ dy/du \end{pmatrix}$ továbbá

legyenek $f(x, y) dx$ és $f(x, y) dy$ differenciál 1-formák. Ekkor definíció szerint $\sigma(u)$ minden pontjában

$$f(x, y) dx (J_\sigma) = f(x, y) dx \left(\begin{pmatrix} dx/du \\ dy/du \end{pmatrix} \right) = f(x(u), y(u)) \frac{dx}{du}$$

$$f(x, y) dy (J_\sigma) = f(x, y) dy \left(\begin{pmatrix} dx/du \\ dy/du \end{pmatrix} \right) = f(x(u), y(u)) \frac{dy}{du}$$

Ekkor az integrálok az alábbi formában írhatók:

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y) dx(J_\sigma) du$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x, y) dy(J_\sigma) du$$

A példában is látható módon a definícióhoz fel fogjuk használni, hogy egy ω k -forma tetszőleges $n \times k$ mátrixhoz valós számot rendel. Tehát parametrizáljuk a sokaságunkat és alkalmazzuk ω -t a parametrizáció Jacobi-mátrixán.

Definíció 1.10

Legyen M k -dimenziós irányított differenciálható sokaság $\mathbb{R}^n$ -ben, melynek parametrizációját a

$$\phi : B \rightarrow M$$

leképezés adja, ahol B az $\mathbb{R}^n$ -beli egységgyömb. Tegyük fel továbbá, hogy a parametrizáló leképezés irányítása megegyezik M -ével. Legyen ω differenciál k -forma $\mathbb{R}^n$ -ben. Ekkor

$$\int_M \omega = \int_B \omega(J_\phi) du_1 \dots du_k$$

A láncszabály segítségével megmutatható, hogy $\int_M \omega$ jól definiált, azaz:

Lemma 1.11

Legyen adva két irányítástartó parametrizációja ϕ_1, ϕ_2 az M k -dimenziós sokaságnak.

Ekkor

$$\int_B \omega(J_{\phi_1}) du_1 \dots du_k = \int_B \omega(J_{\phi_2}) du_1 \dots du_k$$

Azaz $\int_M \omega$ független a parametrizációtól.

Természetesen nem minden sokaság parametrizálható egyetlen egy-egy értelmű leképezéssel.

Azonban (szinte) minden irányítható sokaság (közel) lefedhető diszjunkt nyílt halmazok uniójával, ezek összességét jelölje $\{U_\alpha\}$, melyekre már találhatunk megfelelő egy-egy értelmű parametrizáló leképezéseket:

$$\phi_\alpha : B \rightarrow U_\alpha$$

Úgy, hogy $\dim(M - \cup U_\alpha) < k$.

Ekkor tetszőleges ω differenciál k -formára:

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \omega$$

továbbá ez független az $\{U_\alpha\}$ lefedéstől.

A Stokes-tétel

A tételt bizonyítás nélkül közlöm.

Tétel 1.12

Legyen M egy irányított k -dimenziós differenciálható sokaság $\mathbb{R}^n$ -ben, határa pedig ∂M , egy sima, $(k-1)$ -dimenziós sokaság, melynek irányítását M irányítása indukálja. Legyen ω egy differenciál $(k-1)$ -forma. Ekkor:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$