

## A mechanika elvei

### A variációs számítás alapjai

Mint azt láttuk a klasszikus mechanika egy „axiomatikus” modell a makroszkopikus testek (dinamikai) viselkedésének a megértéséhez. Természetesen itt az „axioma” nem a matematikai szigorúsággal értendő. Pusztán annyit jelent, hogy kísérleti megfigyeléseken alapuló tények sokaságából kiválasztjuk azt a lehető legkisebb számút, amelyek segítségével a többi (lehetőleg összes) mechanikai jelenség logikusan levezethető. A logikusság itt matematikai formalizmusban mutatkozik meg.

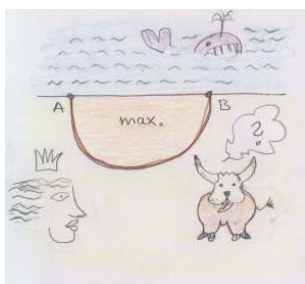
A Newton-törvények (vagy Newton axiómák) adják a klasszikus mechanika alaptörvényeit. Newtonot követő fizikusok (D’alambert, Euler, Lagrange, Hamilton, ) megpróbálták a mozgástörvényt más formában is megfogalmazni. Ezeket ma a „mechanika elvei”-ként tartjuk számon.

Ezek az elvek nem lépnek túl a newtoni mechanika határain, így ebből a szempontból ekvivalens megfogalmazásai a klasszikus mechanikai modelljeinknek. Mégis van egy fontos sajátosságuk, amely a Newton-féle mozgástörvényekkel szemben nagy elvi előnynek bizonyult. Ez pedig az, hogy olyan formában fogalmazzák meg a dinamika alaptörvényét, amely közvetlenül általánosítható a mikrofizika irányába. Mindez természetesen csak utólag derült ki. A kísérleti tapasztalatok hatására, a XX. század első évtizedeiben, ezen elméleti alapok tették lehetővé a kvantummechanika megszületését.

Vizsgálódásunkat látszólag nagyon távolról kezdjük.

A legendás történetet (Julius Caesar kortársa) Publius **Vergilius Maro** eposza az **Aeneis** örökítette meg, a következő képpen.

A mai idősámítás szerint ie 825-ben Dido elszökött szülőhazájából Föníciából. Volt rá oka, hiszen férjét meggyilkolták. A helyzet komolyságát az mutatta, hogy a tettes a városállam „törannosza”, aki egyben Dido bátyja is volt. Az asszonynak nem sok választása lehetett, mert hű embereivel titokban hajóra szállt és meg sem állt amíg biztonságos távolságban nem érezte magát. A mai Tunisznál ért partot. Nem mondhatni, hogy a helybéliek nagyon örültek volna a váratlanul partra lépő új jövevényeknek. De Dido meggyőzte Hiarabas királyt mondván, hogy neki csak annyi terület kell, mint amennyit egy marha bőrével körbe tud keríteni. A királynak tetszetett a képtelen ajánlat és belement az alkuba. Megkönnyebbülése azonban nem tartott sokáig. Dido okosabbnak bizonyult, mint sejtették. A leölt marha bőrért ugyanis vékony csíkokra vágatta, majd egy hosszú kötelet készített belőle. Kisétált a tengerpartra, és fékórt formálva a kötélből hatalmas területet elkerített magának s társainak. Mint az ma már közismert, a kör az a síkidom, amelynek adott kerület mellett a legnagyobb a területe. Nem volt mit tenni, a szerződést a meghökkent királynak is be kellett tartania! Így történt aztán, hogy Dido embereivel letelepedett. Majd ie.814-ben megalapította Karthagot és annak első uralkodója, „királynője” lett. Mint tudjuk a történelemből ez a városállam még sok borsot tört Róma orra alá.



1.ábra

Ez az első leírása egy „izoperimetrikus, integrálvariációs problémának”. Iu 200-ban a görögök sejtették, hogy a helyes megoldás a „kör”. De a matematikai bizonyítás hiányzott. Erre még több mint 1600 évet kellett várni. Weierstraß és Steiner 1841-ben megadták a feladat precíz megoldását.

Hasonló szélsőérték feladatot számtalant tudunk gyártani. Ilyen például a „geodetikus vonal” problémája. Adott (tetszőleges, de elegendően sima) felületen kijelölünk két pontot. Keressük azt a két pontot összekötő vonalat, amelynek a hossza a legkisebb. A síkon a megoldás az egyenes. Mint tudjuk a gömbön a két ponton átmenő főkör.

**MEGJEGYZÉS:** Az elmúlt századokban a matematikai közélet egyik fóruma az volt, hogy valaki kitűzött egy újszerű problémát és a többiek megpróbálták azt megoldani. A leghíresebb ilyen a „nagy Fermat sejtés” volt :  $\{a^n + b^n \neq c^n \mid a, b, c, n = 3, 4, 5, \dots\}$  (Pierre de Fermat 1601-1665.) Ennek a (mindenki által helyesnek elfogadott) bizonyítását csak 1995-re sikerült megalkotni és ez Andrew Wiles angol matematikus nevéhez fűződik. 300 éves, „népszerű fejtörő” megoldására derült fény. Kétségtelen tény, hogy annak az évnek ez volt „A” tudományos szenzációja. Még a bulvárlapok címlapján is megjelent. De mint egy jó krimiben, egy újabb „kognitív talány” merült fel. Ugyanis a Wiles által közölt bizonyítás olyan mélyebb és szerteágazó matematikai részletekre épít, amely Fermat korában még teljességgel ismeretlen volt. De akkor miért írta Fermat „híres/hírheft szavait” a Diophantosz : Aritmetika könyv margójára:

„...dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi.  
*Hanc marginis exiguitas non caperet,*”

Azaz:

„...igazán csodálatos bizonyítást találtam erre a tételre.  
*A margó azonban túlságosan keskeny, semhogy ideírhatnám,*”

Vagy talán az utolsó szó végi (.) írásjel a mondat valamiféle folytatását jelenti, amely enyhítette a leírt szavak súlyát? Ez ma már nem derülhet ki, mert az eredeti kézirat eltűnt. A halottak meg nem beszélnek, hacsak nem a fennmaradt „műveik” által.



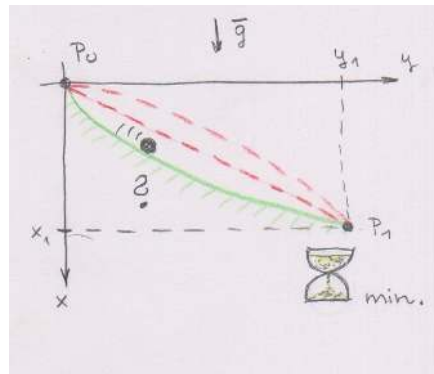
**Johann BERNOULLI**  
(1667-1748)  
Daniel Bernoulli apja

Johann Bernoulli 1696-ban a következő feladatot tűzte ki: „Függőleges síkban kijelölünk két pontot. Milyen vonallal kell összekötni őket ahhoz, hogy a görbén, egy súrlódásmentesen lecsúszó tömegpont a legrövidebb idő alatt érjen le? A feladat a „brachisztochron” (legrövidebb idő) néven került be a Fizika ill. a Matematika történetébe.

A feladatra több megoldás is született. Maga Newton (saját bevallása szerint) egyetlen éjszaka alatt megoldotta. Euler (1744) és Lagrange (1760) által publikált művek a matematika új területét a „variációszámítás” alapjait rakta le mindkettőjüket a „brachisztochron” inspirálta. Ma általában az általuk kitalált utat követjük. És a megoldásul szolgáló differenciálegyenletet „Euler-Lagrange” egyenletnek hívjuk.

Fogalmazzuk meg tehát a feladatot. A függőleges  $(x,y)$  síkban keresett pálya egyenlete legyen az  $y(x)$  függvény. A rögzített végpontokat jelölje  $P_0(0,0)$ ,  $P_1(x_1, y_1)$ . A pálya mentén a tömegpont sebessége  $v(s)$ , ahol „s” az indulási végponttól mért pálya menti úthossz. A lecsúszás ideje ekkor

$$T_{12} = \int_{P_0}^{P_1} \frac{ds}{v(s)}$$



2.ábra

A tömegpont sebessége az energia megmaradás tételéből számítható ki. Ha a tömegpont az origóból, nyugalomból indul, akkor

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx,$$

azaz

$$v = \sqrt{2gx}$$

A pálya menti elmozdulás pedig közismert

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Keresett az az  $y(x)$  függvény, amelyik esetén az alábbi integrál minimális értéket vesz fel.

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{x}} dx = \text{„extrémum”}$$

Ezzel megkaptuk a „brachisztochron” probléma matematikai megfogalmazását.

A „hagyományos” szélsőérték kereséshez képest ez a feladat többféle újdonságot jelent. Láthatóan a „ $T$ ” a függvényfogalomnak egy általánosítása, hiszen az  $\{y(x) \mid y_0(x_0) \text{ és } y_1(x_1)\}$  függvényhalmaz minden eleméhez egy  $T$  valós számot rendelünk. Ezen függvények két végpontja (pl. most) rögzített. Keressük azt a függvényt, amely esetén a „ $T$ ” a legnagyobb/legkisebb értékét veszi fel. Ennek az „általánosított” függvényfogalomnak a neve „fukcionál”. Mivel most a leképezés egy integrálás műveletével történik, ezért a szóban forgó feladatot „integrálvariációs” problémának hívjuk. Általában pedig Variációszámításról beszélünk.

Dido esetében a kissé bonyolultabb a helyzet.  
A körülhatárolt terület könnyen számolható ugyan

$$T = \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx = \text{„extremum”},$$

de a kötéll hossza adott állandó érték

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)} dx .$$

Láthatóan ez egy „feltételes szélsőérték feladat”. Mivel a keresett síkidom kerülete állandó, ezért az ilyen típusú feladatok neve „izoperimetrikus” probléma. A feladatot ún. „Lagrange multiplikátor” módszerrel lehet megoldani. Ekkor a feladatot visszavezetjük egy „feltétel nélküli szélsőérték” keresésre. Ez úgy történik, hogy képezzük az alábbi kifejezést

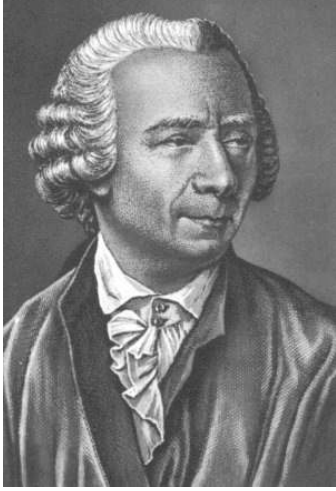
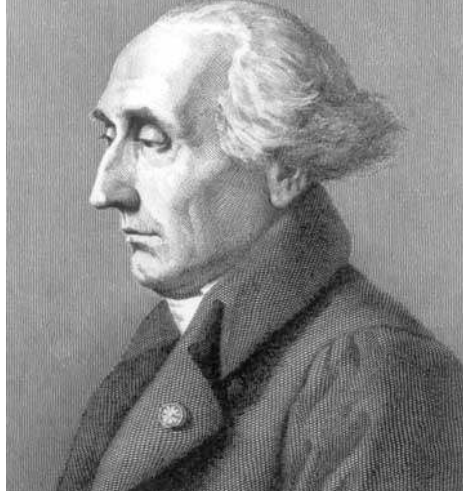

$$F \equiv y(x) + \lambda \cdot \sqrt{1 + y'(x)}$$

És keressük a

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \text{„extremum”}$$

A „ $\lambda$ ” itt egy meghatározandó paraméter.

A feladatot többféle módon és szemlélettel lehet megoldani. Mi az Euler-Lagrange féle megoldást ismertetjük.

		
<b>Leonhard EULER</b> (1707 - 0783)	<b>Joseph-Louis LAGRANGE</b> (1736—1813)	<b>William Rowan HAMILTON</b> (1805–1865)

A funkcionálra a következő jelölést vezetjük be.

Az  $\{y(x) \rightarrow I\}$  leképzést  $I[y]$  -al jelöljük.

A funkcionálok egy része integrál alakjába írható, azaz

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', y'', y''', \dots; x) dx$$

Mi most csak olyan, a Fizikában gyakran előforduló esetekkel foglalkozunk, amikor az integrandus  $f \equiv f(y, y'; x)$  alakú függvény. Mint az látható, mindkét bevezető feladatunk ilyen.

Keressük tehát az  $I[y]$  funkcionál szélső értékét az  $\{y(x)\}$  függvényhalmazon.

Nézzük meg először, hogy hagyományos függvények esetén hasonló esetben mit teszünk.

Ha egy  $g(x)$  függvénynek szélső értéke van az  $x_0$  pontban, akkor annak kis környezetében a „ $g$ ” megváltozása első rendben a következő módon írható:

$$dg \equiv g(x) - g(x_0) = \left[ \frac{dg}{dx} \right]_{x_0} \cdot (x - x_0) + \dots$$

A szélső érték szükséges feltétele az, hogy

$$g'(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \varepsilon) - g(x_0)}{\varepsilon} = 0$$

és ezért írható, hogy

$$dg = 0$$

Azt mondjuk erre, hogy: „A szélső érték (extrémum) kis környezetében a függvény megváltozása (variációja) első rendben zérus. Ennek szükséges feltétele, hogy  $g'(x_0) = 0$  legyen”

Legyen mindez igaz a funkcionálok esetében is.

Próbáljuk meg visszavezetni a feladatot egyváltozós függvény szélsőérték keresésére. Tegyük fel, hogy a  $I[y(x)]$  funkcionál az  $y_0(x)$  függvénynél veszi fel az extrémumát. Ennek egy kis környezete legyen most

$$y(x) \equiv y_0(x) + \varepsilon \cdot \eta(x)$$

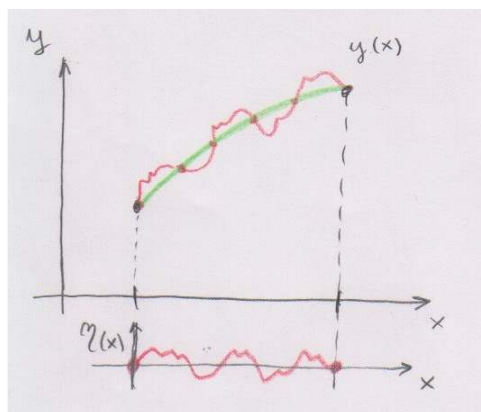
ahol

$$\varepsilon \ll 1$$

és mivel az integrálási határok rögzítettek, ezért

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

$$\eta(x) \neq 0 \text{ ha } x_1 < x < x_2$$



3.ábra

Az  $\eta(x)$  amúgy egy tetszőleges, de jól viselkedő függvény (azaz elegendően sima, mindenhol véges, stb...) Ekkor a funkcionálunk így is írható:

$$I[y_0(x) + \varepsilon \cdot \eta(x)] = I(\varepsilon)$$

Azaz egy közönséges  $I(\varepsilon)$  függvényhez jutottunk, amelynek a változója az „ $\varepsilon$ ”.

Mármost a funkcionál szélsőértékénél (első rendben)

$$\delta I = 0$$

Ennek szükséges feltétele az, hogy

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = 0$$

Végezzük el a deriválást, ügyelve arra, hogy most

$$y(x) \equiv y_0(x) + \varepsilon \cdot \eta(x)$$

és ezért

$$y'(x) \equiv y'_0(x) + \varepsilon \cdot \eta'(x)$$

Ekkor kapjuk, hogy

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{d}{d\varepsilon} f(y, y', x) \right\} dx$$

Az integrandusban az „ $\varepsilon$ ” a változó. Az  $f \equiv f(y, y'; x)$ -ben pedig mind az „ $y(x)$ ” mind pedig az „ $y'(x)$ ” ennek az „ $\varepsilon$ ”-nak a függvénye. Az összetett függvények deriválási szabálya szerint tehát írható, hogy

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(y, y', x) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{d\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \eta'$$

Azaz kapjuk, hogy

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \eta' \right\} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \eta \right\} dx + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \eta' \right\} dx$$

A második tagban parciális integrálást végezhetünk.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \eta' \right\} dx = \left[ \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \cdot \eta \right\} dx$$

A jobboldal első tagja eltűnik, hiszen  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ .

Végülis adódik az, hogy

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \eta \right\} dx + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \cdot \eta \right\} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} \cdot \eta(x) dx = 0$$

Ennek minden, tetszőleges  $\eta(x)$ -nél igaznak kell lennie. Ez csakis úgy lehet, ha az  $\eta(x)$  együtthatója azonosan zérus. Azaz

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Ennek a neve Euler-Lagrange egyenlet. Ez a funkcionál szélső értékének a szükséges feltétele.

Fontos észrevennünk, hogy az egyenletünkben „teles deriválás” ( $d/dx$ ) és „parciális deriválás” ( $\partial/\partial y$ ) is szerepel. Ügyeljünk a kétféle deriválásra!

**MEGJEGYZÉS:**

a.) Az Euler-Lagrange egyenlet csak „szükséges, de nem elégséges” feltétele a megoldásnak. Ez azonban minket nem kell, hogy zavarjon. Ugyanis a minket érdeklő fizikai problémák esetén eleve tudjuk, hogy **van a feladatnak megoldása**. Így a szükséges feltétel egyben elégséges is.

b.) A levezetésünk alapvető elem volt az  $y(x) \equiv y_0(x) + \varepsilon \cdot \eta(x)$  definíciós összefüggés. Ez pedig azt jelenti, hogy csak relatív (lokális) szélső értékeket tudunk így meghatározni. A fizikai problémák nagy részénél ez sem lényeges, mert az abszolút minimum, vagy maximum fizikailag „triviális” szélsőséges megoldásokat jelent, ami számunkra érdektelen.

Szemléltetésképpen oldjuk meg a két kitűzött feladatunkat:

A „brachisztokron” probléma esetén kaptuk, hogy:

$$T_{12}[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}} dx = \text{„extrémum”}$$

Azaz

$$f(y, y', x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}$$

Az Euler-Lagrange egyenlet

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Most azonban láthatjuk, hogy az „ $f$ ” nem függ az „ $y$ ”-től. Azaz  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  és ezért

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

Így aztán

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C = \text{állandó}$$

Tehát

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

Átrendezés után kapjuk, hogy:

$$y' = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}, \quad \text{ahol } a \equiv \frac{1}{C^2}.$$

Integrálás után kapjuk

$$y(x) = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx + C_0 \quad \text{YY...}$$

Ez már a keresett  $y(x)$  függvény. Szemléletes megoldást kapunk, ha új változót vezetünk be a következő definícióval:

$$x \equiv a \cdot \sin^2 \left( \frac{u}{2} \right) \quad \text{XX}$$

Ekkor

$$dx = a \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cdot du$$

Ezt beírva a **YY** egyenletbe adódik, hogy

$$y = \int \frac{\sqrt{a} \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\sqrt{a - a \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}} \cdot a \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cdot du + C_0 = a \cdot \int \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) du + C_0$$

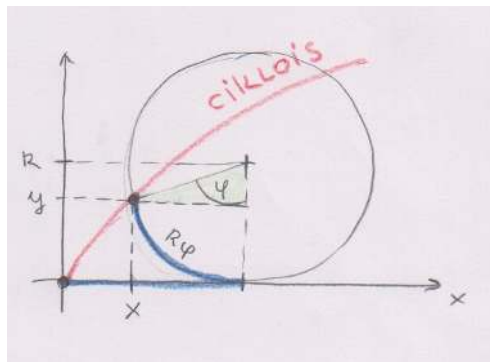
Elvégezve az integrálást azt kapjuk, hogy

$$y = \frac{a}{2}(u - \sin u)$$

és

$$x = \frac{a}{2}(1 - \cos u)$$

Ez utóbbinál átalakítottuk az **XX** definíciós egyenlőséget. Rögton látszik, hogy ez egy ciklois paraméteres egyenlete.



4.ábra

A **Dido** probléma megoldása a következő. Mint azt láttuk

$$F \equiv y(x) + \lambda \cdot \sqrt{1 + y'(x)}$$

Az Euler-Lagrange egyenlet pedig

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Erre adódik, hogy

$$\frac{d}{dx} \left[ \lambda \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] = 1$$

Integrálás után:

$$\lambda \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x + C$$

Átrendezve

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{x+C}{\lambda} \equiv$$

Új változókat bevezetve

$$u \equiv \frac{x+C}{\lambda} \quad \text{és} \quad v \equiv \frac{y}{\lambda}$$

Ekkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} \equiv v'$$

Ezért

$$\frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}} = u$$

valamint átrendezve:

$$v' = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

Azaz

$$v = -\sqrt{1-u^2} + C$$

Átrendezés után kapjuk, hogy

$$(v-C)^2 + u^2 = 1$$

$$\left(\frac{y}{\lambda} - C\right)^2 + \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{C}{\lambda}\right)^2 = 1$$

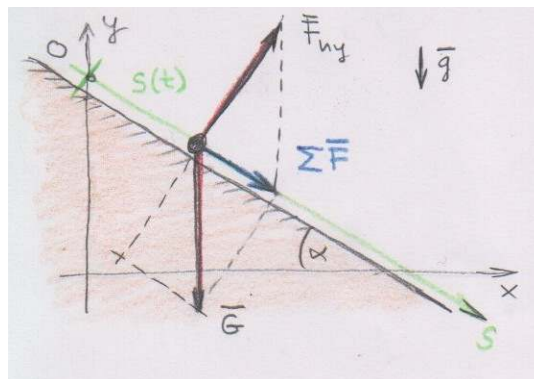
Majd a „ $\lambda^2$ ”-el való szorzás után

$$(y - C\lambda)^2 + (x + C)^2 = \lambda^2$$

Ez egy körnek az egyenlete.

### A Lagrange-féle mozgásegyenlet és a Hamilton-elv

Az eddigi mechanikai tanulmányainkból tudjuk, hogy általános esetben egy tömegpontra ható erők két félek lehetnek, szabad erők és kényszer erők. A legegyszerűbb példa a függőleges síkban lévő lejtőn mozgó tömegpont esete.



5.ábra

A tömegpontra ható  $\vec{G} = m\vec{g}$  erő egy szabad erő és a lejtő által kifejtett  $\vec{F}_n$  egy kényszer erő. Ez utóbbit ugyanis a Newton egyenlet felírásakor még nem ismerjük. Abból a feltételből tudjuk meghatározni, hogy a tömegpont a lejtőre merőlegesen nem tud mozogni. Ez egy „kinematikai feltétel”, hiszen a mozgás jellegére köt ki valamit. Nevezetesen azt, hogy a tömegpont mozgása csak a lejtő mentén történhet. Azaz az „x,y” koordináták nem függetlenek egymástól. A mozgás így valójában „egydimenziós” lesz. Azaz pl. a lejtőn megtett „s(t)” úttal jellemezhető.

**MEGJEGYZÉS:** Sokféle kényszer létezik. Mi csak egyfajtaival, a fenti példához hasonló kényszerekkel foglalkozunk. Ezek neve „holonom, szkleronom” kényszer. Ezek olyan időben állandó (szkleronom) feltételek, amelyeket a pont koordinátái közötti függvénykapcsolattal tudunk megadni (holonom). Ezek pedig csökkentik a rendszert jellemző független skalár adatok (koordináták) számát. Vannak olyan kényszerek is, amelyek „csak” a koordináta megváltozások (pl. dx, dy) közötti kapcsolatokat írják elő. Ezeknek a neve „anholonom kényszer”. Ezek is lehetnek „szkleronomok” (időben állandók) vagy reonomok (időfüggők). A kényszererők pedig azok az erők, amelyek (a fizikai viszonyok által megkövetelt) kényszerfeltételeket biztosítják.

Általában egy „N” db tömegpontból álló rendszer esetén a kényszerek száma és bonyolultsága igen változatos lehet. Ennek megfelelően a kényszererők meghatározása sem olyan triviális, mint azt a „lejtős példánál” láttuk.

A következőkben ezt a kérdéskört fogjuk megvizsgálni.

Egy, „N” db részecskéből álló tömegpontrendszer esetén a mozgásegyenlet tehát a következő

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j^{SZ} + \vec{F}_j^K \quad j = 1, 2, 3, \dots, N$$

Ahol

$\vec{F}_j^{SZ}$  a „j”-ik tömegpontra ható szabad erők összege és

$\vec{F}_j^K$  a „j”-ik tömegpontra ható kényszer erők összege.

A kényszerfeltételek legyenek olyanok, hogy

$$\varphi_l(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N) = 0 \quad l = 1, 2, 3, \dots, k$$

Az első fejezetben már láttuk, hogy a Descartes koordináták használata azért kényelmes, mert a koordinátarendszert definiáló egységvektorok a tér minden pontjában ugyanazok. Így a skalár mozgásegyenletek a következők

$$m_l \ddot{x}_l = X_l \quad l = 1, 2, 3, \dots, 3N$$

$$X_l \equiv X_l^{SZ} + X_l^K$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N}) = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

(Az „l”-el való indexelés értelemszerűen veendő.)

Ekkor a „3N” db koordináta között „k” db kapcsolat van. Így az egymástól független adatok száma „f=3N-k”. Az „f” neve a „szabadságfok”.

A holonom kényszerek tehát csökkentik a rendszer független változóinak a számát.

Válasszunk f-db egymástól független skalár adatot amely a rendszer mozgásállapotát egyértelműen megadja. Ezeket általános koordinátáknak hívjuk.

$$\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_f\}$$

A rendszer dinamikai viselkedését a  $\{q_i(t)\}_{i=1}^f$  függvények írják le. Ezek természetesen a kényszer feltételeknek eleget tevő mozgás leírását adják. Ezért mintegy „implicite magukba foglalják” a kényszererőket is. Ezen általános koordináták időfüggvényét meghatározó mozgásegyenleteket „Lagrange-féle másodfajú” (mozgás)egyenleteknek hívjuk. A Feladatunk az, hogy a Newton egyenletekből kiindulva keressük meg ezeket a mozgásegyenleteket.

Tulajdonképpen a

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N}\} \rightarrow \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_f\}$$

transzformációt kell végrehajtani.

Mivel a  $\{q_i(t)\}_{i=1}^f$  általános koordináták teljes egészében jellemzik a rendszert, ezért minden Descartes koordinátát is egyértelműen meghatároznak, azaz

$$x_l(q_1, q_2, q_3, \dots, q_f) \quad l = 1, 2, 3, \dots, 3N$$

Képezzük a következő kétindexes mennyiséget

$$J_{li} \equiv \frac{\partial x_l}{\partial q_i}$$

Ez lesz az a „transzformációs mátrix”, amelyet használni fogunk a kitűzött feladatunk megoldásához. Tekintsük a Newton egyenleteket

$$m_l \ddot{x}_l = X_l \quad l = 1, 2, 3, \dots, 3N$$

Végezzük el a következő transzformációt:

$$\sum_{l=1}^{3N} m_l \ddot{x}_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^{3N} X_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, f \quad \text{TR0}$$

Az egyenlet baloldala a következő képpen bontható tovább

$$\sum_{l=1}^{3N} m_l \ddot{x}_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{l=1}^{3N} m_l \dot{x}_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \right) - \sum_{l=1}^{3N} m_l \dot{x}_l \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \right) \quad \text{TR1}$$

A  $\eta_{li}$  transzformációs mátrixra triviálisan igazak a következő összefüggések

$$\frac{\partial x_l}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial q_i}$$

Ezeket felhasználva a **TR1** egyenletben kapjuk, hogy

$$\sum_{l=1}^{3N} m_l \ddot{x}_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{l=1}^{3N} m_l \dot{x}_l \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_{l=1}^{3N} m_l \dot{x}_l \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial q_i} \quad \text{TR2}$$

A rendszer „T” kinetikus energiája definíció szerűen (Descartes koordináták használata esetén)

$$T = \sum_{k=1}^{3N} \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2$$

Azaz a kinetikus energia **csak a Descartes koordináták időderiváltjától függ.**

**MEGJEGYZÉS:** Görbevonalú (henger, gömbi, stb..) koordinátarendszer választás esetén ez nincsen így!

Ebből pedig kapjuk, hogy

$$m_l \dot{x}_l = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_l} \quad l = 1, 2, 3, \dots, 3N$$

Ezt beírva a **TR2** egyenletbe adódik, hogy

$$\sum_{l=1}^{3N} m_l \ddot{x}_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_l} \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_l} \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, f) \quad \text{TR3}$$

A közvetett deriválás szabálya szerint azt kapjuk, hogy:

$$\sum_{l=1}^{3N} m_l \ddot{x}_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, f \quad \text{TR3}$$

Ezzel a **TR0** így alakul

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^{3N} X_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, f \quad \text{TR4}$$

Térjünk rá ezen egyenlet jobb oldalának a vizsgálatára. Most értünk el ahhoz a ponthoz, ahol az egész eljárásunk lényege koncentrálódik. Ugyanis most fogunk automatikusan megszabadulni a kényszererőktől.

$$\sum_{l=1}^{3N} X_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^{3N} (X_l^{SZ} + X_l^K) \frac{\partial x_l}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^{3N} X_l^{SZ} \frac{\partial x_l}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^{3N} X_l^K \frac{\partial x_l}{\partial q_i}$$

A jobboldal második tagja biztosan zérus. Ugyanis a kényszererőknek éppen az a szerepe, hogy a megadott kényszernek megfelelően, bizonyos irányú mozgásokat megakadályozzanak. Így a kényszererők mindig merőlegesek a létrejövő mozgásokra. Azaz, mint azt tudjuk, a **kényszererők nem végeznek munkát**, tehát  $dW^K = 0$ .

Ezért aztán

$$\sum_{l=1}^{3N} X_l^K \frac{\partial x_l}{\partial q_i} = \frac{1}{\partial q_i} \sum_{l=1}^{3N} X_l^K \partial x_l = \frac{\partial W^K}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, f$$

A következőkben csak **konzervatív rendszerek** vizsgálatára szorítkozunk. Ebben az esetben minden szabad erőkomponens a rendszer  $V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N})$  potenciális energiájából adódik, azaz

$$X_l^{SZ} = -\frac{\partial V}{\partial x_l}$$

Ezzel a jobb oldal átírható a következő módon:

$$\sum_{l=1}^{3N} X_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^{3N} X_l^{SZ} \frac{\partial x_l}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^{3N} \left( -\frac{\partial V}{\partial x_l} \right) \frac{\partial x_l}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, f$$

Ezért **TR4** alakja a következő lesz

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, f \quad \text{TR5}$$

**MEGJEGYZÉS:** Felmerülhet a kérdés, hogy a kinetikus energia valóban függ-e explicit módon a  $q_i$  koordinátáktól, hiszen Descartes koordináták esetén ez nincsen így. Könnyen megmutatható, hogy igen. Transzformáljuk át a kinetikus energiát az általános koordinátákra. Ekkor a sebességkomponensekre kapjuk, hogy

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^f \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Ha ezt beírjuk a kinetikus energia definíciójába kapjuk, hogy

$$T = \sum_{k=1}^{3N} \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2 = \sum_{k=1}^{3N} \frac{1}{2} m_k \left( \sum_{i=1}^f \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \left( \sum_{j=1}^f \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f \sum_{j=1}^f \left( \sum_{k=1}^{3N} m_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f \sum_{j=1}^f m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Ahol látható, hogy az  $m_{ij}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_f)$  valóban függ az általános koordinátáktól. Ezért tehát  $T(q_i, \dot{q}_i)$ .

Tudjuk, hogy konzervatív erők esetén a potenciális energia csak a koordinátáktól függ, de azok időbeli deriváltjától nem, azaz

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Így a **TR5** egyenlet „0”-val bővíthető:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, f \quad \text{TR6}$$

Átrendezés után megkapjuk a  $\{q_i(t)\}_{i=1}^f$  általános koordinátákra vonatkozó, keresett „Lagrange2” mozgásegyenleteket konzervatív rendszerek esetén.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, f \quad \text{L2}$$

Ahol bevezettük az ún. Lagrange függvényt a következő definícióval:

$$L \equiv T - V$$

és amelyre természetesen

$$L(q_1, q_2, q_3, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_f)$$

Egyszerűsített jelöléssel

$$L(q_i, \dot{q}_i) \equiv L(q_1, q_2, q_3, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_f)$$

A kapott mozgásegyenlet elgondolkodtató. Hiszen ez pontosan egy Euler-Lagrange egyenlet, amely mint tudjuk egy „integrálvariációs szélsőérték probléma” megoldhatóságának a szükséges feltétele. A bevezetésben előforduló funkcionálokhoz képest ez egy „többváltozós” eset.

Könnyen legyártható az ennek megfelelő funkcionál

$$S[q_1, q_2, q_3, \dots, q_f] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt$$

A Lagrange2 mozgásegyenlethez úgy jutunk, hogy megoldjuk a

$$S[q_i] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt = \text{extrémum}$$

Integrálvariációs szélsőérték problémát. Ezek után ezt fogjuk tekinteni a dinamika alaptörvényének. Ennek a neve **Hamilton-elv** vagy a „legkisebb hatás elve”. Az elnevezés oka az, hogy a bevezetett  $S[q_i]$  funkcionált „hatásnak” nevezzük. A hatás mértékegysége  $[S] = 1 \cdot Js$

A tapasztalat azt mutatja, hogy a Hamilton elv abban az esetben is jó, amikor a Lagrange függvény nem írható egyszerűen  $L \equiv T - V$  alakba és expliciten függ a „ $t$ ” időtől is.

$$S[q_i] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \text{extrémum}$$

Sajnos a konzervatív rendszereket kivéve nincsen egy olyan szisztematikus eljárás, amely segítségével egy általános mechanikai rendszer esetén a Lagrange függvény „legyártható” lenne. Itt elsősorban a szakmai rutin és az intuíció segít bennünket. Egyetlen módja a „megálmodott” „ $L$ ” ellenőrzésének az, hogy megoldjuk a Lagrange2 mozgásegyenletet és ellenőrizzük, hogy az helyes eredményt ad-e.

**MEGJEGYZÉS:** Mi most Hamilton elvet az integrálvariációs problémák matematikai megoldásának az ismeretében alkottuk meg. Szokásos a „közvetlen módszer” is, amikor a Hamilton elv (mint „axioma”) kimondása után megkeressük annak megoldását. Ekkor a  $q_i(t)$  „pálya” függvények kis (lokális) megváltozását (az  $\varepsilon_i \cdot \eta_i(t)$  helyett)  $\delta q_i$ -vel szokás jelölni. Így a következő levezetéshez jutunk.

A hatás

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

A hatás első rendbeni megváltozása

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{d}{dt} \delta q_i \right) \right\} dt$$

A jobb oldali integrál második tagjának a parciális integrálásával adódik, hogy

$$\delta S = \left[ \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} \delta q_i dt = 0$$

Tudjuk, hogy definíció szerűen a „végpontok rögzítettek”, azaz  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ . Ezért a  $\delta S$  első tagja zérus. De a Hamilton elvnek minden tetszőleges  $\delta q_i(t)$  megváltozásra igaznak kell lennie. Ez pedig csak akkor lehetséges, ha az integrálban szereplő  $\delta q_i(t)$ -k együtthatója azonosan zérus. Ez pedig éppen a Lagrange2 differenciálegyenlet.

A Hamilton elv meglepően „szép” mélységeit tárja fel természeti törvényeknek. De a Lagrange egyenlet használata gyakorlati előnyökkel is jár. Hiszen olyan konzervatív rendszer esetén, amelyben sok és igen bonyolult kényszer van a Newton formalizmus szinte használhatatlan. Ugyanakkor a mozgásegyenlet felállítását a Lagrange egyenletekkel „könnyen” megtehető.

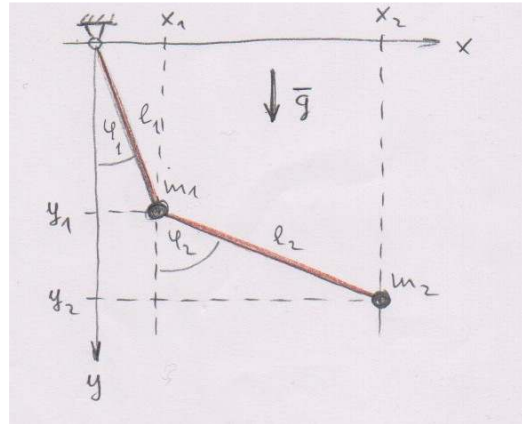
Ennek egyik igen tanulságos példája az ún. matematikai „kettős inga”.

A megoldás kulcsa az, hogy a megfelelő Lagrange függvényt megtaláljuk.

Mivel a rendszer (most is) konzervatív, ezért definíció szerűen  $L = T - V$ . Az egyes energiategyek megadásánál egy szisztematikus utat érdemes követni. Ez úgy történik, hogy először legyártjuk a

Lagrange függvényt Descartes koordinátákkal. Ezután meghatározzuk a rendszer „ $f$ ” szabadságfokát. Majd alkalmasan választunk „ $f$ ” db általános koordinátát.

Lássuk tehát a részleteket!



6.ábra

A Descartes és az általános koordinátaválasztás az ábrán látható-

A rendszer szabadságfoka „ $f=2$ ”.

A tömegpontok helyzetét az  $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$  Descartes koordináták adják meg. Általános koordinátáknak érdemes a  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  szögeket választani.

Az  $m_1$  esetén a megoldás triviális.

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2$$

$$V_1 = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1$$

Az  $m_2$  esetén a „szisztematikus utat” követjük.

$$x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2$$

$$y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2$$

Így aztán

$$\dot{x}_2 = +l_1 \cdot \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2$$

$$\dot{y}_2 = -l_1 \cdot \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - l_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2$$

Az  $m_2$  kinetikus és potenciális energiája tehát

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[ l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$

$$V_2 = -m_2 g (l_2 \cos \varphi_2 + l_1 \cos \varphi_1)$$

Így

$$L = (T_1 + T_2) - (V_1 + V_2),$$

azaz

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_1 g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2)$$

Az egyenletek könnyebb kezelhetősége végett vezessük be a következő jelöléseket:

$$\Theta_1 \equiv \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot l_1^2$$

$$\Theta_2 \equiv \frac{1}{2}m_2 \cdot l_2^2$$

$$\Theta_3 \equiv m_2 \cdot l_1 l_2$$

$$G_1 \equiv g(m_1 + m_2) \cdot l_1$$

$$G_2 \equiv gm_2 \cdot l_2$$

Ezekkel a Lagrange függvény

$$L = \Theta_1 \dot{\varphi}_1^2 + \Theta_2 \dot{\varphi}_2^2 + \Theta_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + G_1 \cos \varphi_1 + G_2 \cos \varphi_2$$

A két mozgásegyenlet a következő:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0$$

Azaz

$$2\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 + \Theta_3 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \Theta_3 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot [\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2] + \Theta_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + G_1 \sin \varphi_1 = 0$$

$$2\Theta_2 \ddot{\varphi}_2 + \Theta_3 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \Theta_3 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot [\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2] + \Theta_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + G_2 \sin \varphi_2 = 0$$

A kapott differenciálegyenlet rendszer megoldása igen nehéz. Zárt alakú megoldása nem lehetséges. Ennek oka az, hogy az egyenletrendszer **nem lineáris**. Így csak közelítő megoldásokra szorítkozhatunk. A közelítés lehetősége kis szögek esetén áll fenn, azaz

$$\varphi_1 \ll 1 \quad \text{és}$$

$$\varphi_2 \ll 1$$

$$\sin \varphi \cong \varphi$$

$$\cos \varphi \cong 1 - \frac{1}{2} \varphi^2$$

Ekkor a mozgásegyenletek így alakulnak.

$$2\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 + \Theta_3 \ddot{\varphi}_2 - \Theta_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + G_1 \varphi_1 = 0$$

$$2\Theta_2 \ddot{\varphi}_2 + \Theta_3 \ddot{\varphi}_1 + \Theta_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + G_2 \varphi_2 = 0$$

Ez még mindig eléggé bonyolult egyenletrendszer. A nem lineáris tagokat elhagyva kapjuk, hogy

$$2\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 + \Theta_3 \ddot{\varphi}_2 + G_1 \varphi_1 = 0$$

$$2\Theta_2 \ddot{\varphi}_2 + \Theta_3 \ddot{\varphi}_1 + G_2 \varphi_2 = 0$$

Ezekben felismerhető két csatolt oszcillátor mozgásegyenlete. Ennek a megoldásával most nem foglalkozunk.

Az eddigi vázlatos tárgyalás szépen megmutatta a Lagrange módszer nagy előnyét. Newtoni szemlélettel a csuklónál ébredő kényszererők kiszámítása igen nehéz lett volna. Most erre nem volt szükség és a mozgásegyenletek egyszerűen adódtak. Az egyenletek megoldása természetesen nehéz kérdés de az amúgy is az lenne.

## Hamilton-féle kanonikus egyenletek

Az előzőekben láttuk, hogy konzervatív rendszerek esetén a Lagrange függvény  $L \equiv T - V$  és nem függ expliciten (közvetlenül) az időtől, azaz

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Ezért általában

$$L = L(q_i, \dot{q}_i)$$

Határozzuk meg ebben az esetben a „L” teljes időszerinti deriváltját

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right\}$$

De a Lagrange 2 mozgásegyenletek szerint, a zárójel első tagja átírható és ezért adódik, hogy

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^f \left\{ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right\} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$$

Átrendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right\} = 0$$

Ami azt jelenti, hogy találtunk egy „mozgásállandót”, amelynek a mértékegysége „Joule”.

„Mozgásállandónak” nevezzük az(oka)t a mechanikai mennyiségeket, amelyek a vizsgált mechanikai rendszer mozgása során nem változnak. Természetesen ezek értékét a kezdeti feltételek egyértelműen meghatározzák. Ezek a mozgásállandók nagyon fontosak, mert a segítségükkel a rendszer mechanikai viselkedése könnyebben kiszámítható.

Azt kaptuk tehát, hogy konzervatív rendszerek esetén a

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \text{állandó.}$$

Tudjuk azt, hogy definíció szerint a konzervatív rendszer össz-energiája állandó. Várható tehát, hogy az imént kapott kifejezés az energiával szoros kapcsolatban van. Definíáljuk tehát a következő kifejezést:

$$W(q_i, \dot{q}_i) \equiv \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) \quad \text{HD}$$

Mivel a Lagrange függvény energia dimenziójú mennyiség, ezért  $[W] = 1J$

Konzervatív rendszerek esetén a potenciális energia csak az általános koordináták függvénye, azaz

$$V = V(q_i)$$

Ezért aztán:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i)$$

Így tehát

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

Azt is tudjuk, hogy a kinetikus energia, a definíciója alapján a  $\{\dot{q}_i\}$ -ok négyzetes függvénye kell, hogy legyen. Azaz általánosan írható, hogy

$$T = \sum_{i=1}^f \sum_{j=1}^f a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Ezért aztán

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{l=1}^f \sum_{j=1}^f a_{lj} \left( \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j + \dot{q}_l \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{l=1}^f \sum_{j=1}^f a_{lj} (\delta_{li} \dot{q}_j + \dot{q}_l \delta_{ji}) = \sum_{j=1}^f a_{ij} (\dot{q}_j) + \sum_{l=1}^f a_{li} (\dot{q}_l)$$

És így

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^f \sum_{j=1}^f a_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \sum_{l=1}^f a_{li} \dot{q}_l \dot{q}_i = 2T$$

Ezt felhasználva a **HD** kifejezés a következő alakot ölti:

$$W \equiv \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V$$

Tehát a most bevezetett „ $W(q_i, \dot{q}_i)$ ” függvényre konzervatív rendszerek esetén az adódott, hogy éppen a rendszer „ $E$ ” összenergiáját adja.

$$W(q_i, \dot{q}_i) = E$$

Általánosítsuk az iménti állításunkat! Mondjuk azt, hogy **bármilyen mechanikai rendszer** esetén definiálható egy „ $W$ ” függvény, amely konzervatív rendszer esetén éppen az összenergiát adja.

A newtoni dinamikából már tudjuk, hogy az alapvető dinamikai mennyiség az impulzus. A sebesség „csak” kinematikai fogalom, a mozgás leírásához nélkülözhetetlen ugyan, de a dinamikában közvetlen szerepe nincsen. Ellentétben az impulzussal, amely a dinamika kulcsfontosságú fogalma. (Erre utal a Newton egyenlet  $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$  eredeti alakja is!.)

Az más kérdés, hogy a sebesség és az impulzus kapcsolata jól definiált, azaz

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= m_i \dot{\vec{r}}_i & i &= 1, 2, 3, \dots, N \\ p_l &= m_l \dot{x}_l & l &= 1, 2, 3, \dots, 3N \end{aligned}$$

Tekintsünk egy **kényszermentes, konzervatív** mechanikai rendszert és vizsgáljuk most ezt a Lagrange-féle módszerrel. Mivel kényszerek nincsenek, ezért a rendszer szabadságfoka „ $f = 3N$ ”.

Célszerű Descartes koordinátákat használni. A Lagrange függvény definíció szerint egyértelműen adódik.

$$L = \sum_{l=1}^{3N} \frac{1}{2} m_l \dot{x}_l^2 - V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N})$$

A Lagrange2 differenciálegyenletek éppen a Newton-féle mozgásegyenleteket adják.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_l} = 0 \quad l = 1, 2, 3, \dots, 3N \quad \text{L2}$$

$$m_l \ddot{x}_l = - \frac{\partial V}{\partial x_l} \quad l = 1, 2, 3, \dots, 3N$$

Cseréljük ki az  $\{\dot{x}_l\}_{l=1}^{3N}$  sebesség komponenseket impulzus komponensekre, hiszen csak ez utóbbiaknak van dinamikai jelentése. Látható, hogy kiindulásul szolgáló Lagrange függvényből az impulzus komponensek egyértelműen megkaphatók, hiszen:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left( \sum_{l=1}^{3N} \frac{1}{2} m_l \dot{x}_l^2 - V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N}) \right) = m_i \dot{x}_i.$$

Célszerű a **HD** alatt definiált „ $W$ ” összenergia függvényt az impulzussal kifejezni.

Adódik tehát

$$W \equiv \sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} \dot{x}_l - L = \sum_{l=1}^{3N} p_l \cdot \frac{p_l}{m_l} - L = 2T - L = T + V$$

Ezt az összenergia kifejezést, amelyik  $\{p_l, x_l\}_{l=1}^{3N}$  impulzus- és koordináta komponensek függvénye megkülönböztetésül „ $H$ ”-val jelöljük és a neve „Hamilton függvény” lesz. Azaz

$$H(p_l, x_l) = W(\dot{x}_l, x_l)$$

$$H = \sum_{l=1}^{3N} \frac{p_l^2}{2m_l} + V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N})$$

Ezt a gondolat mentet általánosítjuk. Azt mondjuk, hogy mindez legyen helyes kényszerekkel rendelkező,  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$  Lagrange függvénnyel jellemezhető mechanikai rendszerek esetén is.

Az előzőek szellemében bevezetjük az „általános impulzus fogalmát” a következő definícióval:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, f$$

Láthatóan

$$p_i = p_i(q_k, \dot{q}_k) \quad i = 1, 2, 3, \dots, f$$

Ezért aztán az általános koordináta időderiváltja („általános sebességnek” is mondhatnánk) kifejezhető az általános impulzussal:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_k, p_k)$$

És így

$$H \equiv \left[ \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L(\dot{q}_i, q_i, t) \right]_{\dot{q}_i(p_k, q_k)} \equiv H(p_k, q_k, t)$$

**MEGJEGYZÉS:** Vigyázat  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$  csak Descartes koordináták esetén igaz. Általános koordináták használatakor

nem mindig van így azaz  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \neq m_i \dot{q}_i$ !

Tekintsük a  $\{q_k, p_k\}_{k=1}^f$  általános koordinátákat és általános impulzusokat a  $H(q_k, p_k, t)$  Hamilton függvény **független változóinak!** Nézzük meg, hogy ezzel a szemlélettel milyen mozgásegyenletek adódnak. A technikánk az lesz, hogy kiszámítjuk a  $H(q_k, p_k, t)$  Hamilton függvényen parciális deriváltjait, majd kapcsolatba hozzuk ezeket a Lagrange-féle mozgásegyenletekkel.

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^f p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{i=1}^f p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^f p_i \cdot \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} \right) = - \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \left( \dot{q}_k + \sum_{i=1}^f p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} \right) - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} = \left( \dot{q}_k + \sum_{i=1}^f p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} \right) - \sum_{i=1}^f p_i \cdot \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

Az első egyenletünk tehát

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = - \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

Ebből a matematikai összefüggésből úgy kaphatunk mozgásegyenletet, ha az egyenlet jobb oldalát a Lagrange2 mozgásegyenlet felhasználásával átalakítjuk. Eszerint és az általános impulzus definíciója alapján az egyenlet jobb oldala a következő alakba írható.

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \dot{p}_k$$

Ezzel és a második egyenlet változatlan megtartásával a következő egyenlet-párhoz jutunk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_k} &= -\dot{p}_k \\ \frac{\partial H}{\partial p_k} &= +\dot{q}_k \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, 3, \dots, f)$$

A fenti egyenletek neve „Hamilton féle kanonikus egyenletek” (kanonikus=szabályos). A „ $\pm$ ” előjeltől tekintve valóban szép szabályosak. Ezek a mechanikai rendszer mozgásegyenletei a Hamilton-féle formalizmusban, ahol a „ $q_k$ ” általános koordináták és a „ $p_k$ ” általános impulzusok független változóknak tekintendők.

A kanonikus egyenletek rendszere „ $2f$ ” darab elsőrendű differenciál egyenlet, amely a megoldása során „ $2f$ ” darab kezdeti feltétel megadását igényli. Ez ekvivalens az „ $f$ ” darab másodrendű Lagrange differenciál egyenletekkel amelyek megoldásakor ugyancsak „ $2f$ ” darab kezdeti feltétel szükséges.

A „ $q_k, p_k$ ” összetartozó változókat „kanonikusan konjugált pároknak” nevezzük

(Kanonikusan konjugált = szabályosan összekapcsolt )

Határozzuk meg a  $H(q_k, p_k, t)$  Hamilton függvény idő szerinti teljes deriváltját is:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right)$$

A „ $\dot{q}_k, \dot{p}_k$ ” időderiváltak a **kanonikus mozgásegyenletekből** kifejezhetőek és ezek felhasználásával adódik, hogy:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Azaz, ha a Hamilton függvény nem függ explicit módon az időtől, azaz  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , és ekkor a „ $H=$ állandó”. Ez közismerten a mechanikai energia megmaradás tétele és az ilyen rendszereket „konzervatív rendszereknek” nevezzük.

Természetesen a vizsgált mechanikai rendszerben definiálható bármilyen  $F \equiv F(q_k, p_k, t)$  dinamikai mennyiség (ezeket „dinamikai változóknak” nevezzük). Mármost, az adott **mechanikai rendszer mozgása során** ennek az „ $F$ ”-nek az idő szerinti teljes deriváltja a „ $H$ ”-hoz hasonló módon határozható meg.

Először képezzük a teljes deriváltat a matematika szabályai szerint (összetett függvény deriválása)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right).$$

De a rendszer dinamikáját a Hamilton-féle mozgásegyenletek „irányítják”, azaz a „ $\dot{q}_k, \dot{p}_k$ ” időderiváltak a kanonikus egyenletek szerint kell, hogy változzanak. Ezért tehát adódik, hogy

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$$

Vezessük be az ún. „Poisson féle zárójeleket” a következő definícióval:

$$\{A, B\} \equiv \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right)$$

Ezzel a jelöléssel a mechanikai rendszer mozgása során az „ $F$ ” mennyiség teljes időderiváltja

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\}$$

A kanonikus egyenletek így teljesen szimmetrikus („még kanonikusabb”) formába írhatók:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_k &= \{H, q_k\} \\ \dot{p}_k &= \{H, p_k\} \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, 3, \dots, f)$$

Ez lesz az a mozgásegyenlet, amelyik az atomi méretek tartományában uralkodó mechanikai törvények felfedezésénél majd kulcsfontosságúnak mutatkozik. Azaz egy „igen szokatlan” általánosítással a Kvantummechanika elméleti világába elvezet.

Végezetül érdemes a Poisson zárójelek néhány matematikai tulajdonságáról is szólni. Ezek bizonyítása igen egyszerű, ezért az Olvasóra bízható:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\} \\ \{f_1 + f_2, g\} &= \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \\ \{f, const\} &= 0 \end{aligned}$$

A kanonikus párokra pedig

$$\begin{aligned} \{q_i, q_i\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \\ \{p_i, q_k\} &= \delta_{ik} \end{aligned}$$