

Matematikai analízis III.

Tételjegyzék 2015.

1. Vektormező. Derivált és mérőszámai: divergencia, rotáció. Fizikai és szemléletes jelentés. Alapösszefüggések, deriválási szabályok. n -változós valós függvény vonalintegrálja: definíció és kiszámítás. Vektormező vonalintegrálja. Speciális eset $\mathbb{R}^2$ -ben.
2. Klasszikus Stokes tétel $\mathbb{R}^3$ -ban. Cirkuláció, ennek szemléletes jelentése. Skalárpotenciál. Vektorpotenciál. Ezek ekvivalens jellemzése. Green tétel. Alkalmazás: görbe által közrezárt terület kiszámítása.
3. Felület $\mathbb{R}^3$ -ban: általános eset, ill. kétváltozós függvény felülete. Valós függvény felületi integrálja. Vektormező felületi integrálja $\mathbb{R}^3$ -ban. Fluxus, ennek fizikai jelentése. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Bizonyítás vázlat.
4. Egyszerű sokaság $\mathbb{R}^n$ -ben, parametrikus és implicit megadás. Példák. Vonal $\mathbb{R}^n$ -ben, felület $\mathbb{R}^3$ -ban. Sokaság határa. Sokaság irányítása. Tangens tér és normál tér – parametrikus és implicit megadású sokaság esetén.
5. Sokaság, általános térben. Parametrikus megadás, térkép és atlasz. Lokális koordináták. Példa: projektív sík. k -dimenziós mérték $\mathbb{R}^n$ -ben (elemi formák bevezetéséhez kellett.)
6. Elemi k -formák $\mathbb{R}^n$ -ben. k -formák $\mathbb{R}^n$ -ben. Külső szorzat, alaptulajdonságai. Differenciál k -formák. Külső deriválás. Ennek tulajdonságai. Poincarre lemma. Differenciálformák $\mathbb{R}^3$ -ban. Külső deriválás és vektormező deriváltak közti kapcsolat.
7. Integrálás sokaságokon: differenciál k -forma integrálja k -dimenziós sokaságon $\mathbb{R}^n$ -ben. (Segítség: spec. esetként $k = 1$ ill. $k = n = 3$.) Általános Stokes tétel. A korábban megismert integráltranszformációs tételek (pl. N-L, G-O, stb.) mint az általános Stokes tétel speciális esetei.
8. Variációszámítás motiváció: fizikai példák. Feladat matematikai modellje. Optimum létezésének szükséges feltétele: Euler-Lagrange egyenlet. Példa: forgástest felszín minimalizálás.
9. Variációszámítás alapfeladata $F(x, u, u')$ hiányos változókesetén. Speciális esetekben a stacionáris megoldásra vonatkozó feltételek. Bernoulli feladat megoldása.
10. Variációszámítás alapfeladatának általánosítása több függvény esetre. Együttes stacionaritás, pl. geodetikus görbék. Variációszámítás alkalmazása a mechanikában: Hamilton elv. Energia-megmaradás törvénye.
11. Variációszámítási feladat általánosításai: Feltétel melletti optimalizálás. Többváltozós függvény, mint ismeretlen, Euler-Lagrange egyenlet több változóra. Kapcsolat a PDE elmélettel: pl. minimális felszín és rezgő húr egyenlete.

12. PDE típusai, alapkérdések. Elsőrendű lineáris PDE. Példa: Transzport egyenlet, értelmezése. Homogén egyenlet megoldása, gyenge megoldás. Inhomogén egyenlet.
13. Laplace egyenlet. Fizikai háttér, példa. Peremfeltételek típusai $\mathbb{R}^2$ -beli tartományban. Példa: Laplace egyenlet megoldása az egység négyzetben, Dirichlet feltétellel.
14. Példa: Laplace egyenlet polárkoordinátákban, megoldása kör alakú tartományon. Harmonikus függvények néhány alaptulajdonsága: középvérték tétel, maximumelv.
15. Hővezetés egyenlete általában. Hőterjedés egy dimenzióban, végtelen hosszú rúdban. Megoldás a Fourier transzformáció segítségével. A kezdeti hőmérséklet-eloszlás továbbterjedése, példák
16. Hővezetés véges rúdban. Peremfeltétel és kezdeti feltétel. Összenergia változása. Hővezetési feladat időbeli megfordítása. A megoldás "felrobban". Inhomogén feladat megoldása.
17. Hullámgörbe egy dimenzióban: rezgő húr mozgása. D'Alembert féle megoldás. Gyenge megoldás. Kezdeti szingularitás továbbterjedése időben.