

8. tétel

Adatszerkezetek és algoritmusok vizsga

Frissült: 2013. január 28.

AVL fák

Ez egy kiegyensúlyozott fa.

Tulajdonságai. Bináris rendezőfa, melynél A bal és jobb részfa magassága legfeljebb 1-gyel különbözik. A részfák is AVL fák.

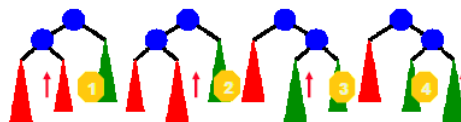
Definíció. AVL tulajdonság. Jelölje $m(f)$ az f bináris fa magasságát (szintjeinek számát), ha x az f fa egy csúcsa: ekkor $m(x)$ jelölje az x gyökerű részfa magasságát. Egy bináris keresőfa AVL-fa, ha minden x csúcsára teljesül, hogy

$$|m(bal[x]) - m(jobb[x])| \leq 1$$

Műveletek

Beszúrás

Hasonló mint bináris keresőfánál, DE a beszúrás elronthatja az AVL tulajdonságot, ezért azt ki kell egyensúlyozni. Négy esetet különböztetünk meg. Ezen belül 1-4 és 2-3 egymás tükörképei.

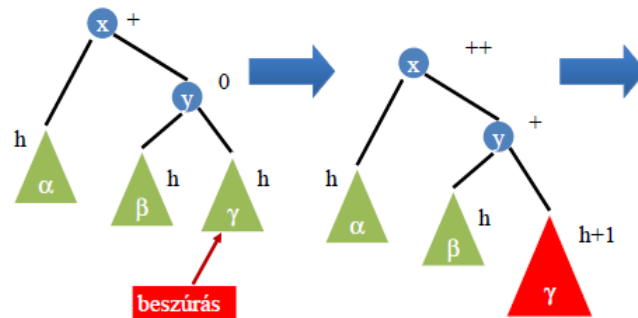


Kelleni fog először is egy kiegyensúlyozási tényező, melynek értéke

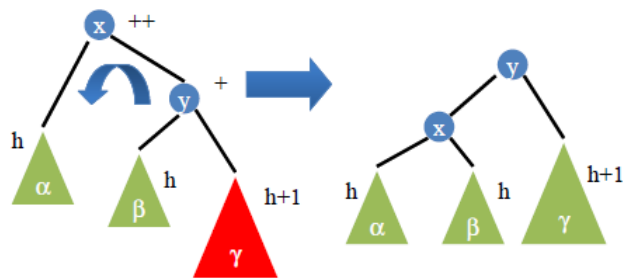
- -1 : ha bal részfa magasabb 1-gyel
- 0: egyforma magasak a részfák
- +1: jobb részfa magasabb 1-gyel.

A beszúrás után az új levéltől felfelé haladva a gyökér felé újra számoljuk a csúcsok címkéit ezen az útvonalon. Ha egy x csúcs címkéje $++$ vagy $--$ lesz, akkor az x gyökerű (rész)fa (esetleg dupla) forgatásával helyreállítható az AVL tulajdonság.

$(++, +)$ szabály. Az új levél a γ rész fába került. A beszúrás előtt a fa magassága $h + 2$ volt. ($a < x < \beta < y < \gamma$)

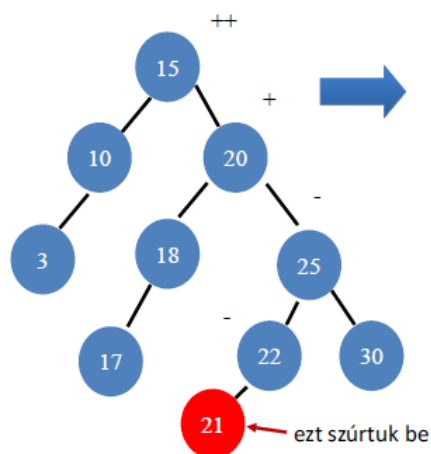


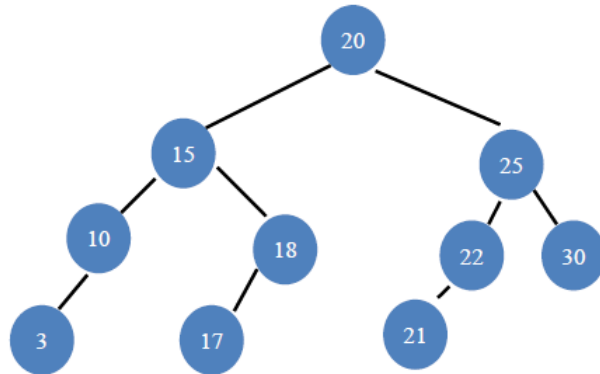
Utána jön egy forgatás. A forgatás után ismét $h+2$ a magasság. Ezért feljebb, a befoglaló fában (ha van), változatlanul érvényes az AVL tulajdonság, nem kell feljebb menni ellenőrizni.



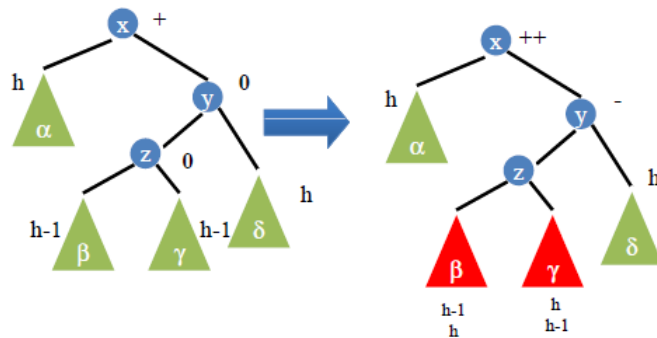
Ennek tükörképe a $(--, -)$ szabály (1. eset.)

Példa.

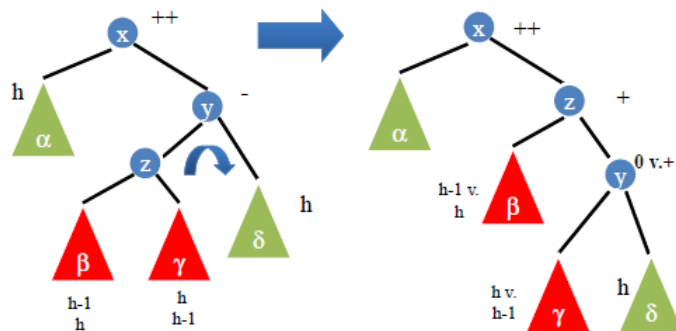




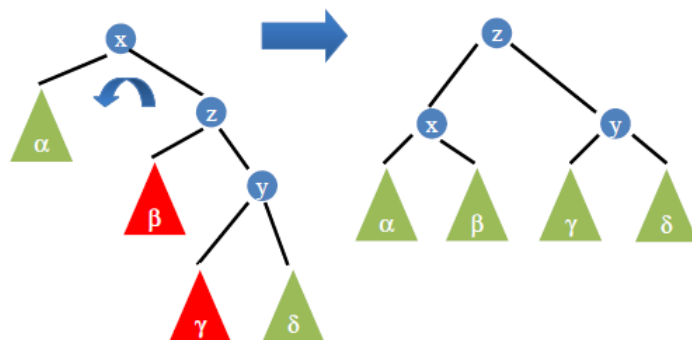
$(++, -)$ **szabály.** Az új levél a β alatti β vagy γ részfába került.
A beszúráás előtt a z csúcs alatti fák egyformák.
A beszúráás után az egyik részfa magassága h lett, a másik maradt $h - 1$.
 $(\alpha < x < \beta < z < \gamma < y < \delta)$



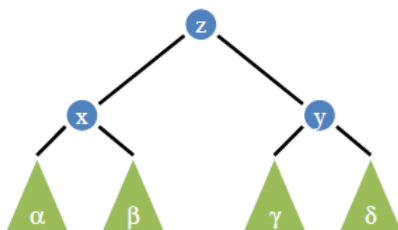
Dupla forgatás kell. Először jobbra:



azután balra:



A forgatás után ismét $h + 2$ a magasság. Ezért feljebb, a befoglaló fában (ha van), változatlanul érvényes az AVL tulajdonság, nem kell feljebb menni ellenőrizni. A végeredmény:



Továbbra is igaz: $\alpha < x < \beta < z < \gamma < y < \delta$
Ennek tükörképe a $(--, +)$ szabály.

Tétel. Legyen S egy n csúcsból álló AVL-fa. $\text{BESZÚR}(s; S)$ után legfeljebb egy (esetleg dupla) forgatással helyreállítható az AVL tulajdonság. A beszúrás költsége tulajdonság. ezzel együtt is $O(\log n)$.

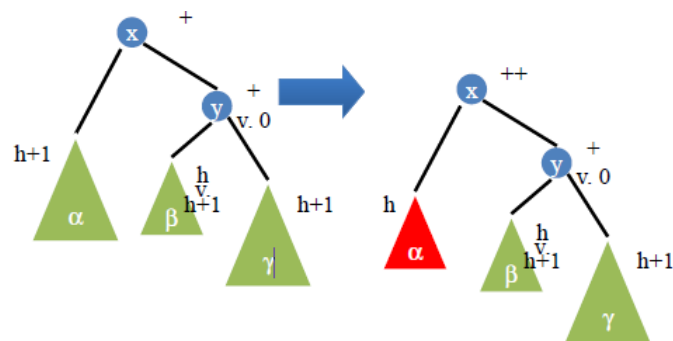
Bizonyítás. az előzőekből következik

Törlés

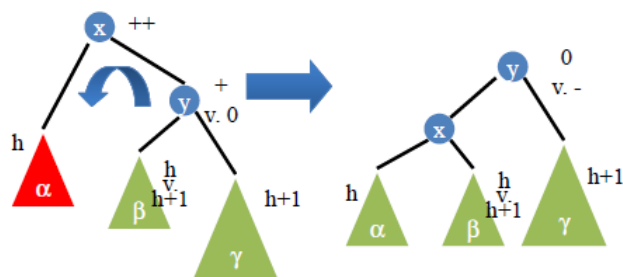
Újrakegyensúlyozás törlésnél. Mivel az x gyökerű fa magassága csökkent a forgatással, ezért feljebb is, ha van befoglaló fa, elromolhatott az AVL tulajdonság.

A törlés után a törölt elem szülőjétől kezdve felfelé haladva a gyökér felé újra számoljuk a csúcsok címkéit ezen az útvonalon. Ha egy x csúcs címkéje $++$ vagy $--$ lesz, akkor az x gyökerű (rész)fa (esetleg dupla) forgatásával helyreállítjuk annak AVL tulajdonságát. Ha x nem a gyökér, akkor feljebb kell lépni és folytatni kell az ellenőrzést. Szélsőséges esetben az adott útvonal minden pontjában forgatni kell!

$(++, +)$ és $(++, 0)$ szabály. A törlés az α részében történt. Ennek a magassága $h + 1$ volt és h lett. Az x gyökerű fa magassága $h + 3$ volt. ($\alpha < x < \beta < y < \gamma$)



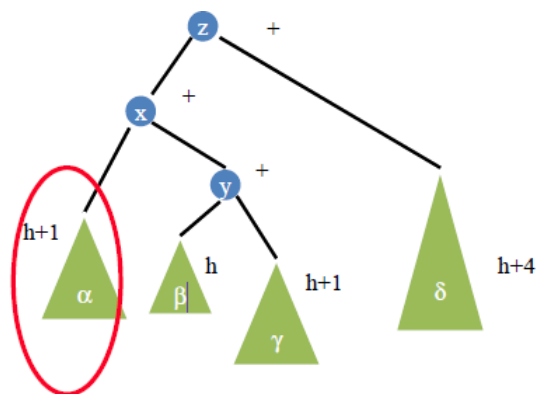
Utána forgatás:



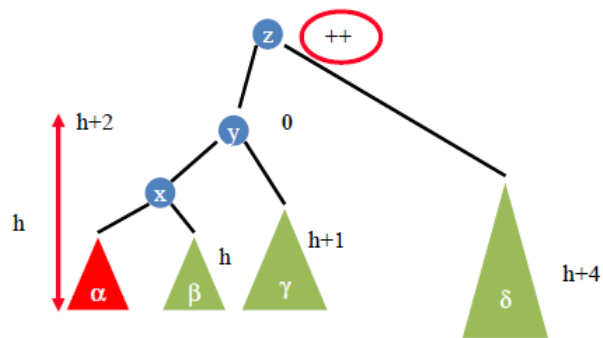
A forgatás után, ha a β részfa magassága h volt, akkor $h+2$ a magasság.

Ezért ekkor feljebb, a befoglaló fában (ha van), nem biztos, hogy változatlanul érvényes az AVL tulajdonság, így *feljebb kell menni*, ellenőrizni, amíg a gyökérig nem jutunk.

(++, +) szabály. Ha az eredeti fában pl.

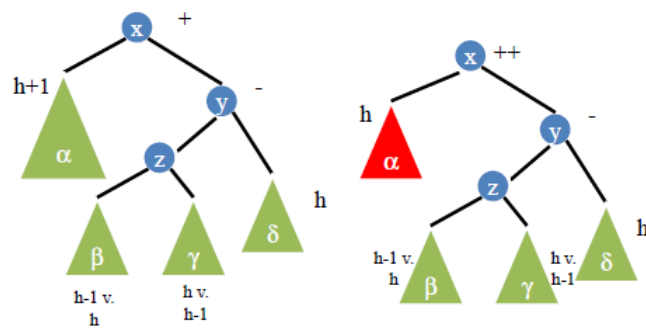


és teljesül $\alpha < x < \beta < \gamma < z < \delta$, akkor az eredmény fa:

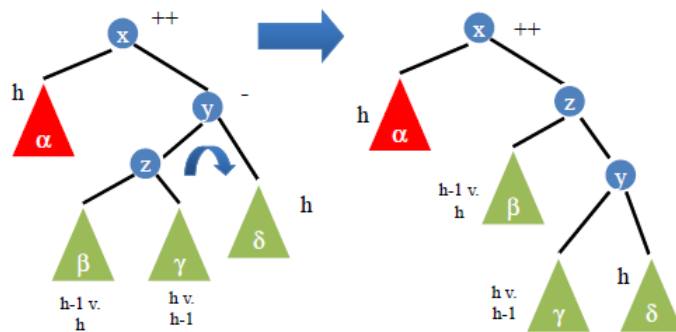


Feljebb kell menni ellenőrizni, és szükség szerint helyreállítani, amíg a gyökérig nem jutunk.

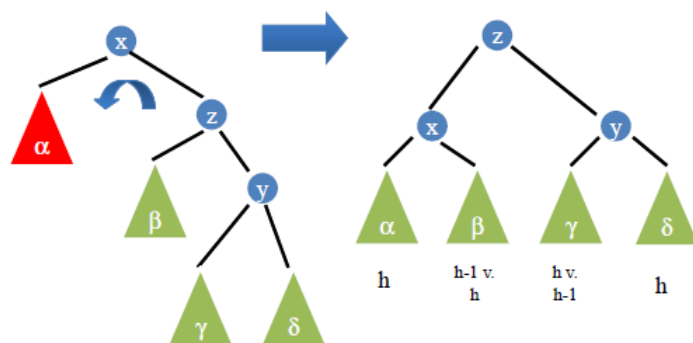
(++, -) szabály. A törlés az α részében történik. Ennek a magassága $h + 1$ volt és h lett. Az x gyökerű fa magassága $h + 3$.



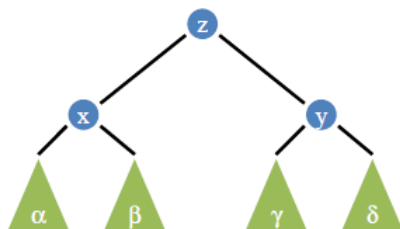
Dupla forgatást végzünk. Először jobbra:



aztán balra:



A forgatás után $h + 2$ a magasság. Ezért feljebb, a befoglaló fában (ha van), nem biztos, hogy változatlanul érvényes az AVL tulajdonság, *feljebb kell menni* ellenőrizni, amíg a gyökérig nem jutunk. A végeredmény:



Továbbra is igaz: $\alpha < x < \beta < z < \gamma < y < \delta$

Tétel. Az n pontú AVL-fából való törlés után legfeljebb $1.44 \log_2 n$ (sima vagy dupla) forgatás helyreállítja az AVL-tulajdonságot.

Bizonyítás. Az előzőekből következik.