# Rendezések

8. előadás

# Rendezések

- A rendezési probléma:
  - Bemenet:
    - $n$ számot tartalmazó $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ sorozat
  - Kimenet:
    - a bemenő sorozat olyan $(a'_1, a'_2, \ldots , a'_n)$ permutációja, hogy $a'_1 \leq a'_2 \leq \ldots \leq a'_n$

# Rendezési reláció

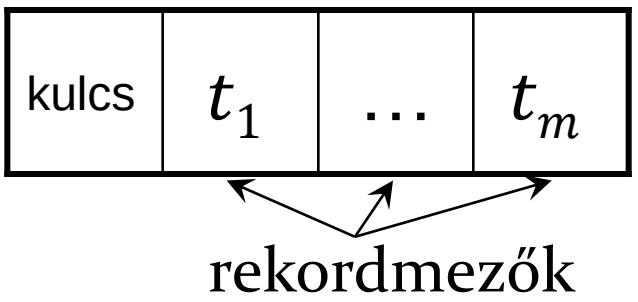
- Legyen U egy halmaz, és „<” egy kétváltozós reláció $U$-n
- Ha a, b $\in$ U és a < b, akkor azt mondjuk, hogy „$a$ kisebb, mint $b$”
- A „<” reláció egy rendezés, ha teljesülnek a következők:
  1. $a \neg< a$: $\forall a \in U$ elemre (< irreflexív);
  2. Ha $a, b, c \in U$, $a < b$, és $b < c$, akkor $a < c$ (< tranzitív);
  3. Tetszőleges a ≠ b $\in$ U elemekre vagy a < b, vagy b < a fennáll (< teljes)
- Ha „<” egy rendezés $U$-n, akkor az $(U; <)$ párt rendezett halmaznak
- nevezzük
- Példa:
  - $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza. A „<” rendezés a nagyság szerinti rendezés
  - $C$ a karakterek halmaza, a rendezést a karakterek kódja adja

# Rendezések

- Általánosabban:
  - Legyen $K$ egy teljesen rendezett halmaz, a kulcsok halmaza
  - Legyenek $T_i$-k tetszőleges típusok $i \in [1, m]$

$$E = K \times \bigtimes_{i=1}^{m} T_i$$

E egy eleme:



# Rendezések

- A cél: $S \in E^*$ rendezése.

  Legyen $n = |S|$
- S rendezett $\Leftrightarrow \forall\, i \in [1, n-1]: S_i.\text{kulcs} \leq S_{i+1}.\text{kulcs}$
- Előfeltétel: $S = S' \in E^*$
- Utófeltétel: S rendezett és $S \in \text{Perm}(S')$

# Rendezések

- Például:
- Személy = Név × Magasság × Születési_év

| Abigél | Janka | Zsuzsi | Dávid | Dorka |
|---|---|---|---|---|
| 167 | 164 | 158 | 160 | 162 |
| 1996 | 1998 | 2001 | 2000 | 2002 |

- Akármelyiket választhatjuk kulcsnak – mindegyiken értelmezhető rendezés.

# Rendezések

- Ha a név a kulcs:

| Abigél | Dávid | Dorka | Janka | Zsuzsi |
|---|---|---|---|---|
| 167 | 160 | 162 | 164 | 158 |
| 1996 | 2000 | 2002 | 1998 | 2001 |

# Rendezések

- Ha a születési év a kulcs:

| Abigél | Janka | Dávid | Zsuzsi | Dorka |
|---|---|---|---|---|
| 167 | 164 | 160 | 158 | 162 |
| 1996 | 1998 | 2000 | 2001 | 2002 |

# Rendezések

- Osztályozás:
  1. $m = 0$ – skalár rendezők
     $m \geq 1$ – rekord rendezők
  2. Belső rendezők:
     központi memória + indexelés
     Külső rendezők:
     háttértárolón
  3. Összehasonlításos rendezők
     (kulcsok értékét hasonlítjuk)
     Edényrendezők
     (kulcsok értéke szerint szétrakjuk)

# Rendezések

4. Helyben rendezők
   (segéd memória konstans)
   Nem helyben rendezők
5. Stabil rendezők
   (azonos kulcsú rekordok sorrendje nem változik)
   Nem stabil rendezők
6. Előrendezéshez illeszkedő és nem illeszkedő rendezők
   (kevesebbet dolgozik-e, ha a sorozat előrendezett)

# Rendezések

7. Használt adatszerkezet szerint
   - lineáris adatszerkezet
   - fa
8. Módszer szerint:
   Például összehasonlításos rendezőknél:
   - Maximális elemet kiválasztó
   - Cserérendezők
   - Egy elemet helyre vivők
   - Összefuttatásos rendezők

# Rendezések

- Milyen hatékony egy algoritmus?
  - Legtöbbször csak a lépésszám nagyságrendje érdekes.
  - Hogyan függ a lépésszám az input méretétől?
  - Az input méretét legtöbbször $n$-nel jelöljük.
    - A lépésszám ennek egy $f$ függvénye, azaz ha n méretű az input, akkor az algoritmus $f(n)$ lépést végez.
    - Igazából az $f$ függvény az érdekes.
      - $100n$ vagy $101n$, általában mindegy
      - $n^2$ vagy $n^3$ már sokszor nagy különbség, de néha mindegy
      - $n^2$ vagy $2n$ már mindig nagy különbség

# Függvények nagyságrendje

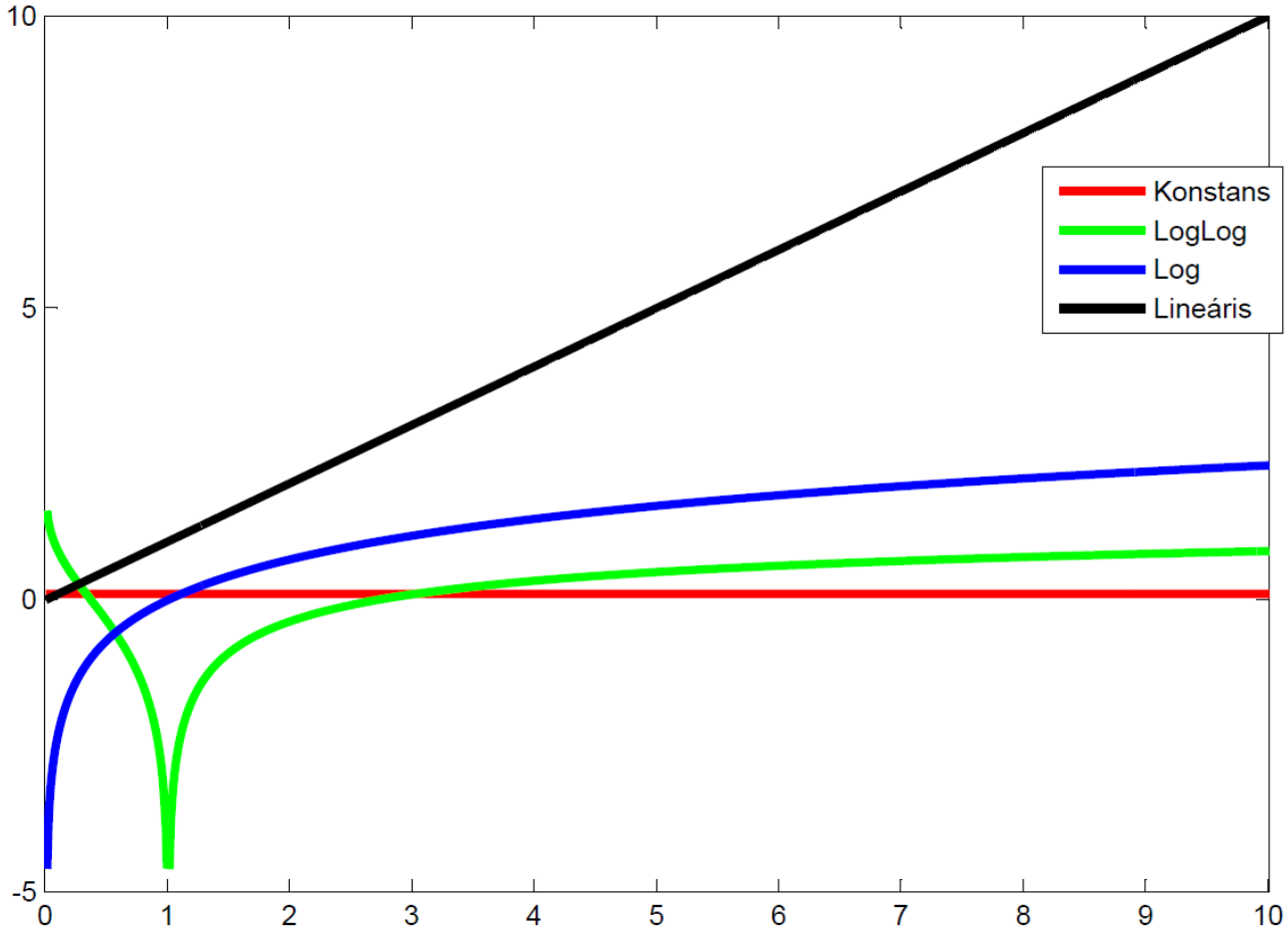
- Definíció – A $g$ aszimptotikus felső korlátja $f$-nek
  - Ha $f(x)$ és $g(x)$ az $R^+$ egy részhalmazán értelmezett valós értékeket felvevő függvények, akkor $f = \mathcal{O}(g)$ jelöli azt a tényt, hogy vannak olyan $c, k > 0$ állandók, hogy $|f(x)| \leq c * |g(x)|$ teljesül, ha $x \geq k$.
- Például:
  - $100n + 300 = \mathcal{O}(n)$
    - hiszen $k = 300; c = 101$-re teljesülnek a feltételek
    - $100n + 300 \leq 101n$, ha $n \geq 300$

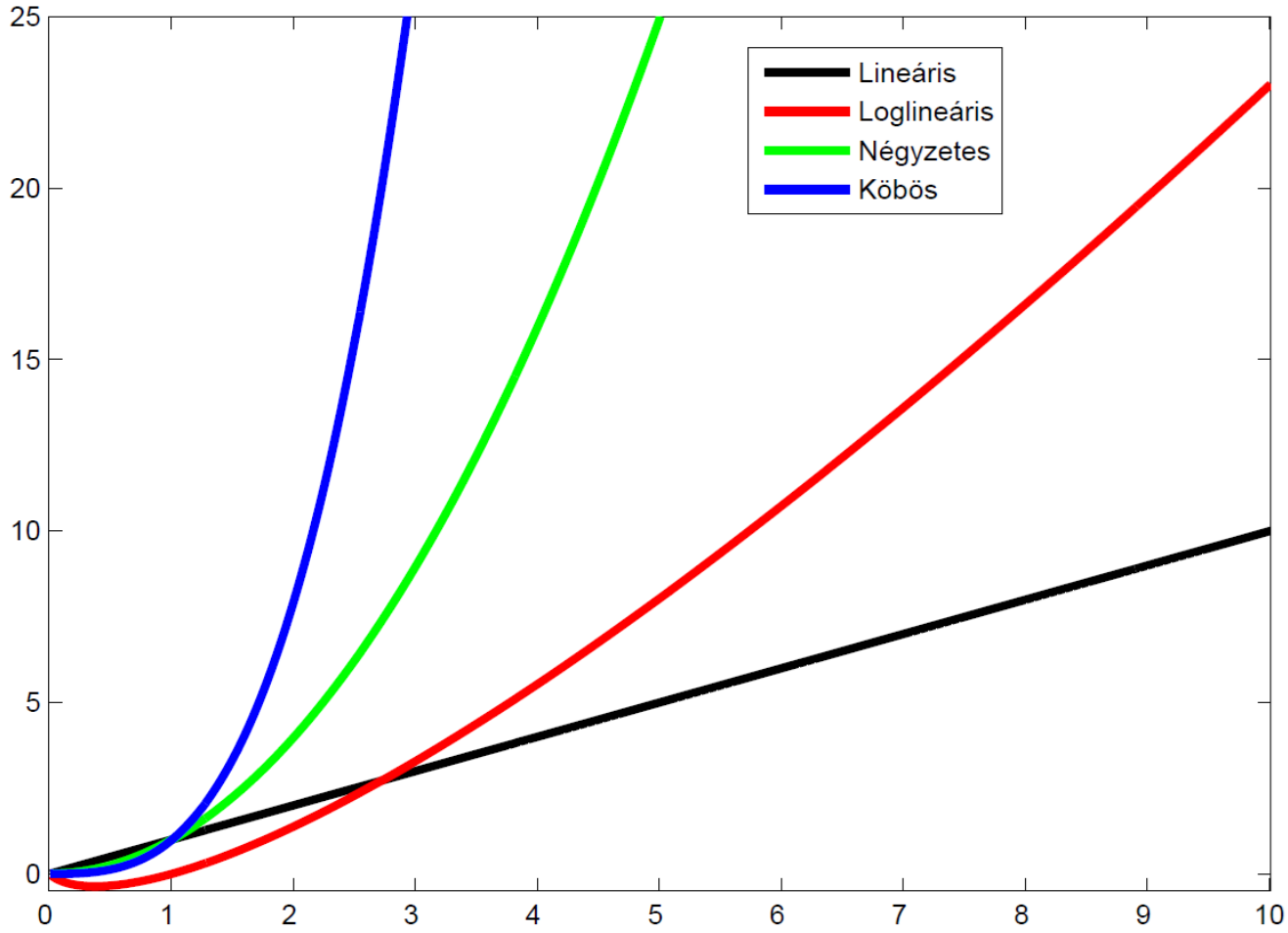
# Függvények nagyságrendje

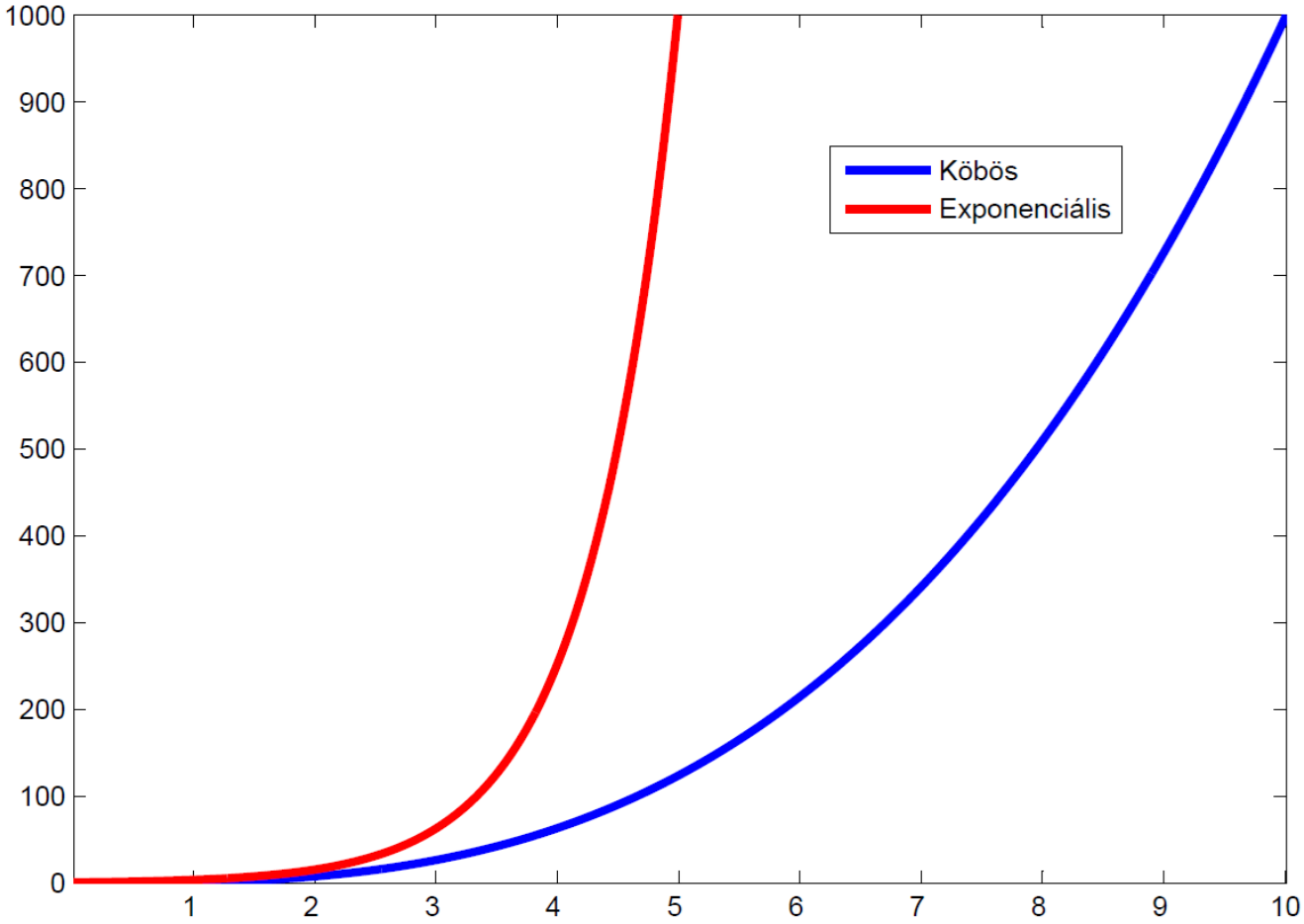
- Definíció – A $g$ aszimptotikus alsó korlátja $f$-nek
  - Ha $f(x)$ és $g(x)$ az $R^+$ egy részhalmazán értelmezett valós értékeket felvevő függvények, akkor $f = \Omega(g)$ jelöli azt a tényt, hogy vannak olyan $c, k > 0$ állandók, hogy $|f(x)| \geq c * |g(x)|$ teljesül, ha $x \geq k$.
- Például:
  - $100n - 300 = \Omega(n)$
    - hiszen $k = 300$; $c = 99$-re teljesülnek a feltételek

# Függvények nagyságrendje

- Definíció – A $g$ aszimptotikus éles korlátja $f$-nek
  - Ha $f = \Omega(g)$ és $f = \mathcal{O}(g)$ egyaránt teljesül, akkor $f = \Theta(g)$
- Például:
  - $100n - 300 = \Theta(n)$


10
5
0
-5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Konstans
LogLog
Log
Lineáris


Lineáris
Loglineáris
Négyzetes
Köbös
25
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Köbös
Exponenciális

# Négyzetes rendezők

Lassú rendezők

# Buborék rendezés

- Feladat: Rendezzük az $A[1 \ldots n]$ vektort!
  A vektor elemtípusa tetszőleges T típus, amire egy teljes rendezés értelmezhető
- Buborék rendezés alapötlete:
  - a vektor elejétől kezdve „felbuborékoltatjuk” a legnagyobb elemet. Utána ugyanezt tesszük az eggyel rövidebb vektorra, stb. Végül, utoljára még az első két elemre is végrehajtjuk a „buborékoltatást”

# Buborék rendezés

- Egy sorozat  rendezett $\Leftrightarrow$ nincs az elemek között inverzió
- Ez a rendezés az inverziók csökkentésével rendez

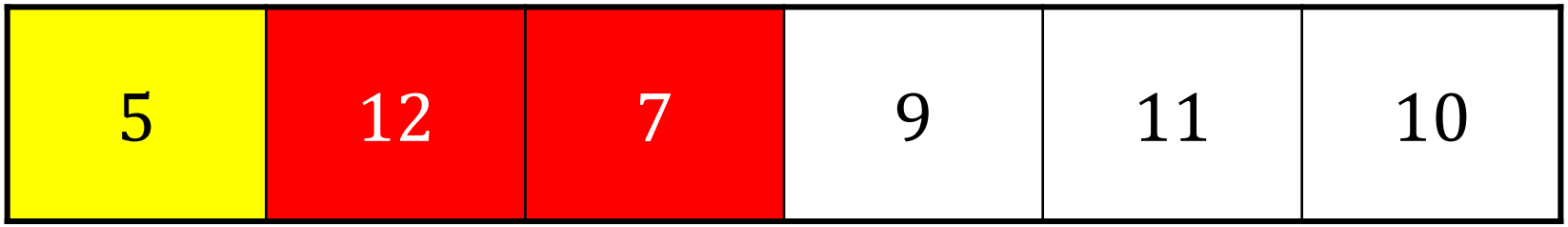
| 12 | 5 | 7 | 9 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|

# Buborék rendezés

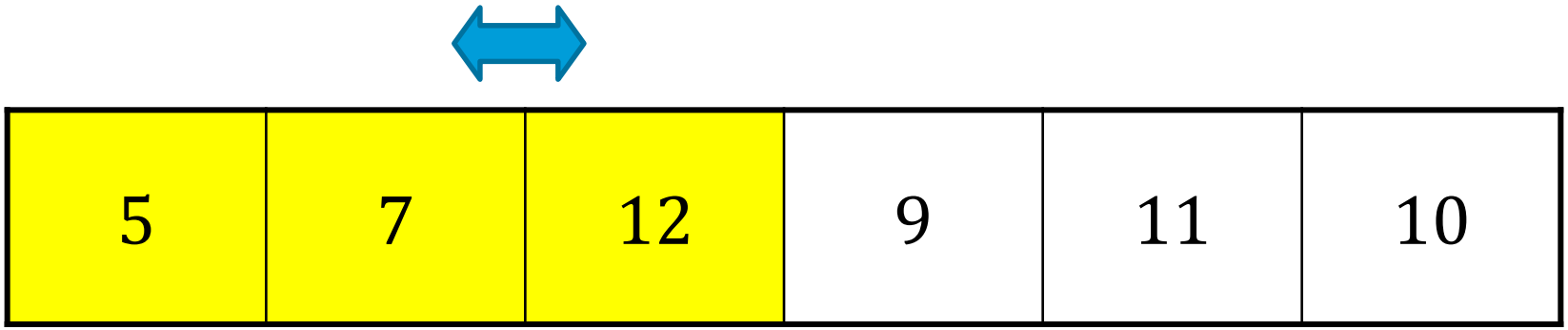
# Buborék rendezés

| 5 | 12 | 7 | 9 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|

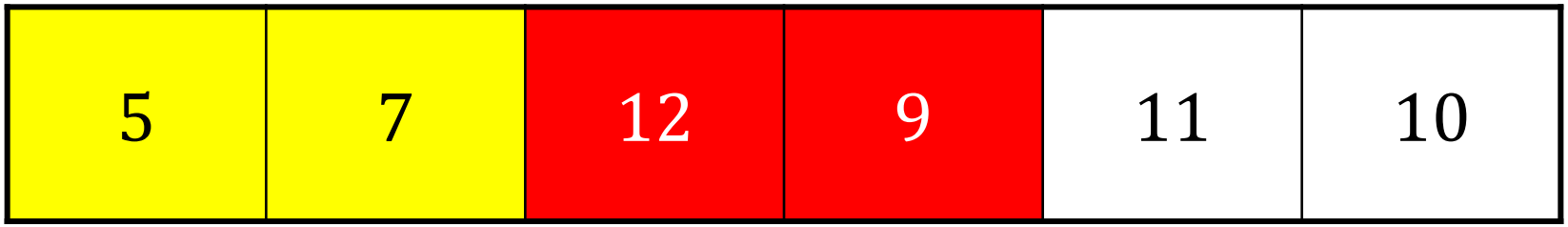
# Buborék rendezés



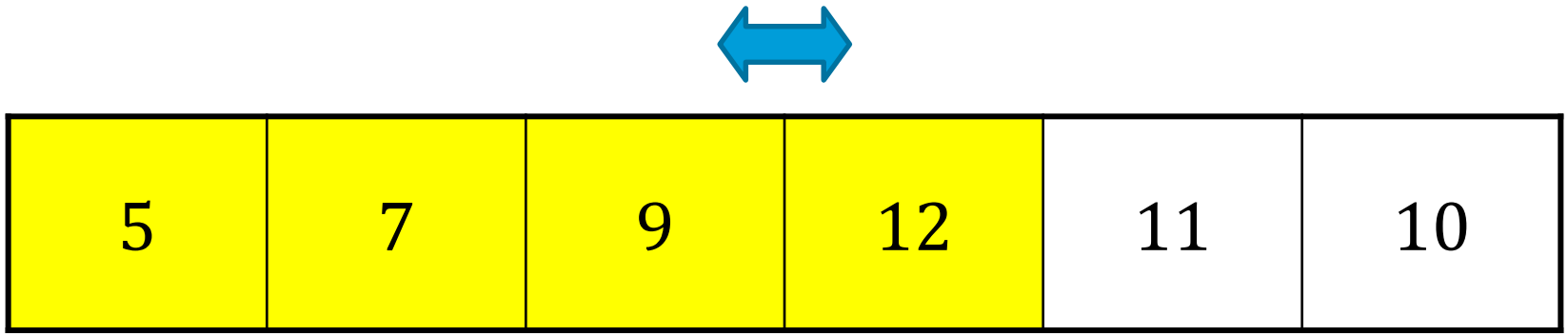
# Buborék rendezés



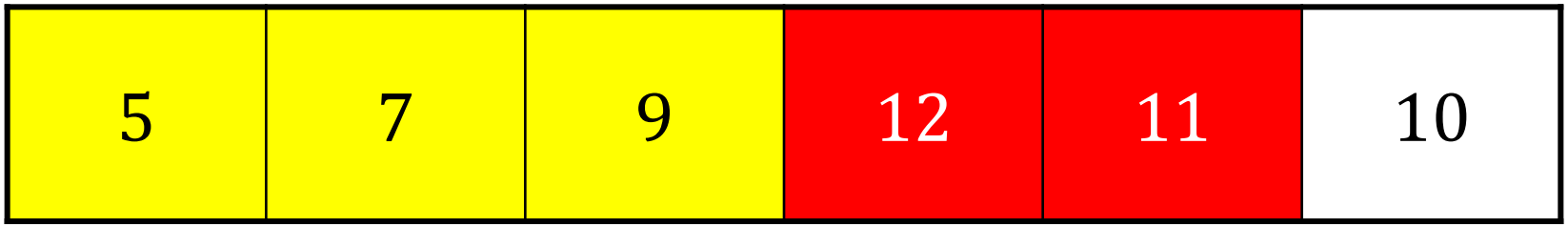
# Buborék rendezés



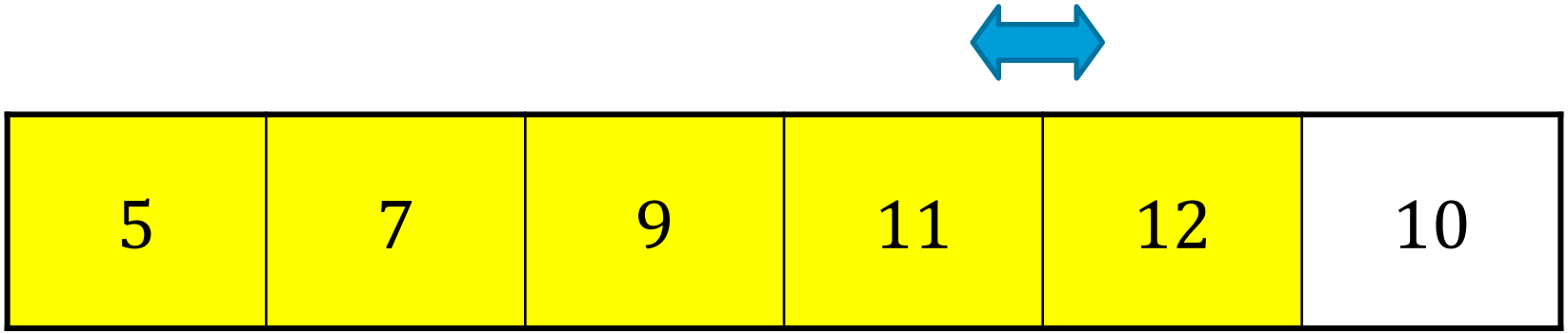
# Buborék rendezés



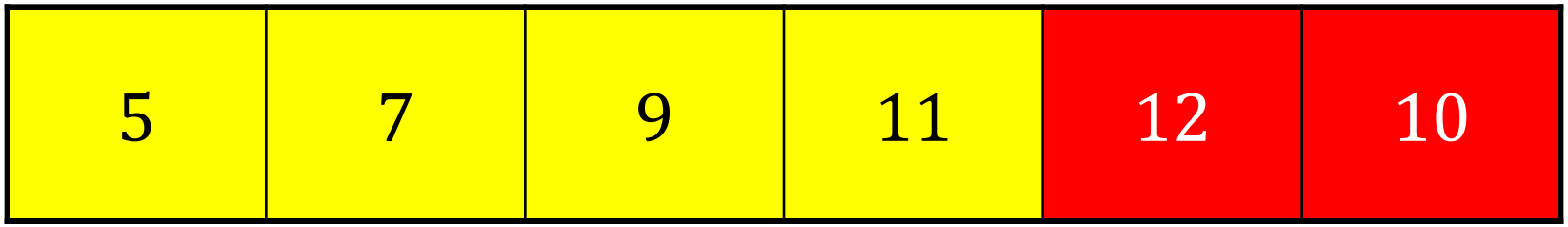
# Buborék rendezés



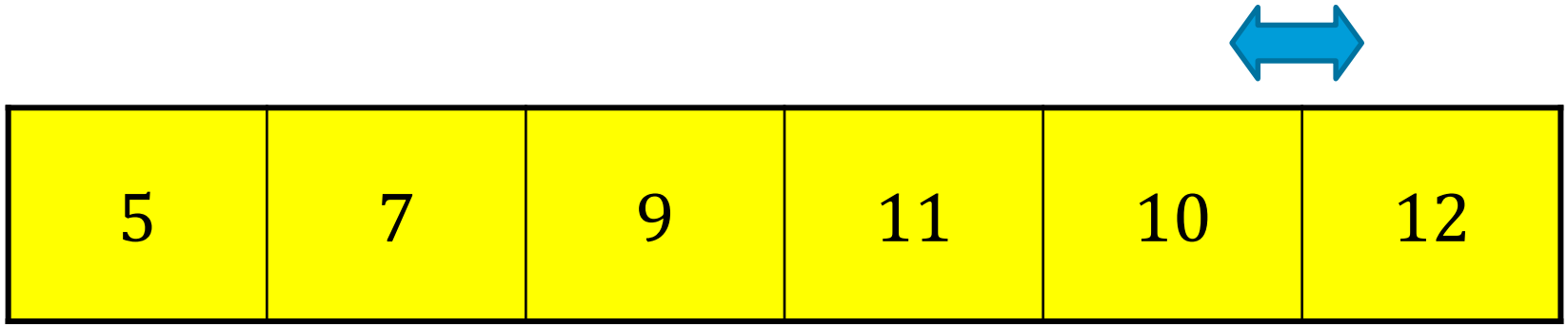
# Buborék rendezés



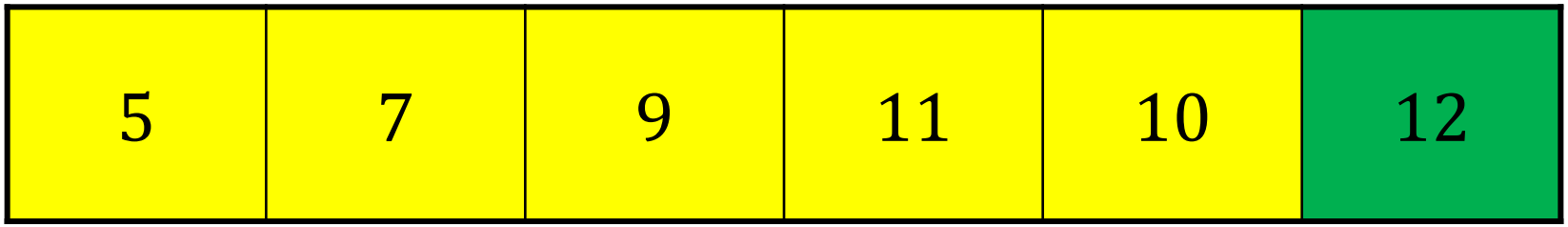
# Buborék rendezés



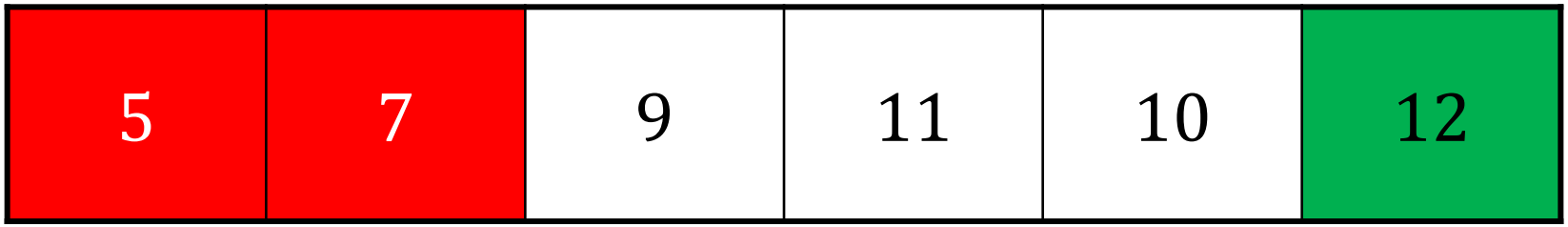
# Buborék rendezés



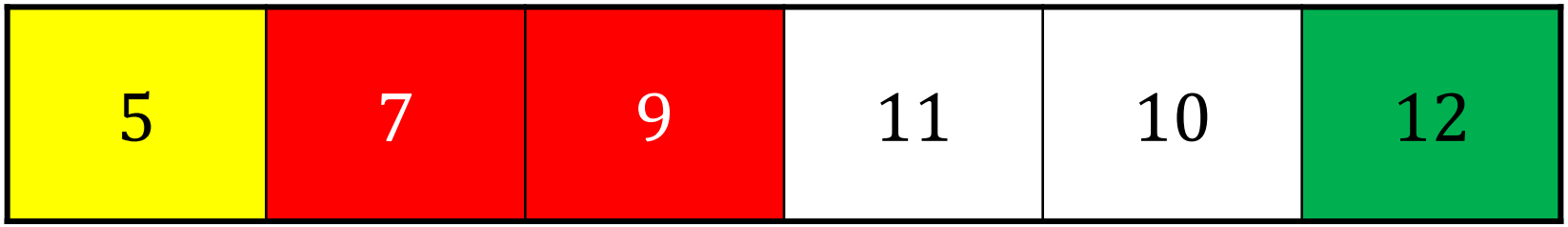
# Buborék rendezés



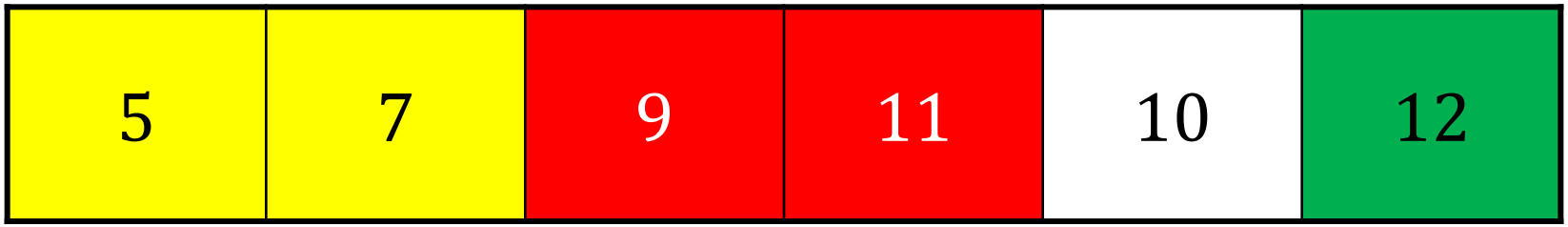
# Buborék rendezés



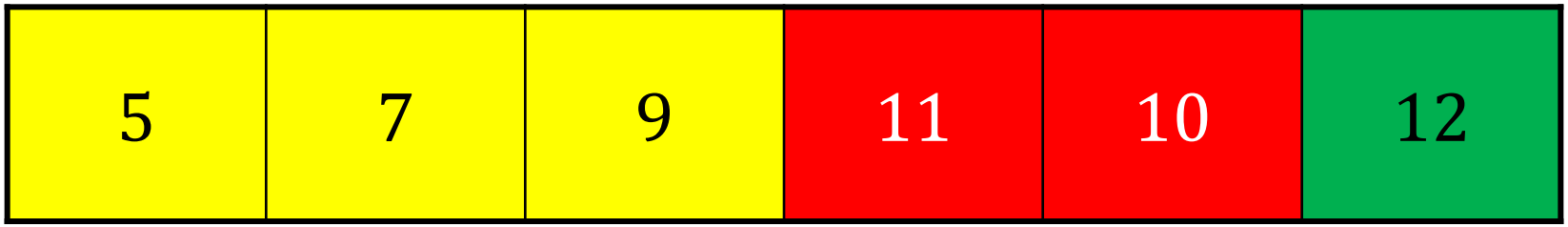
# Buborék rendezés



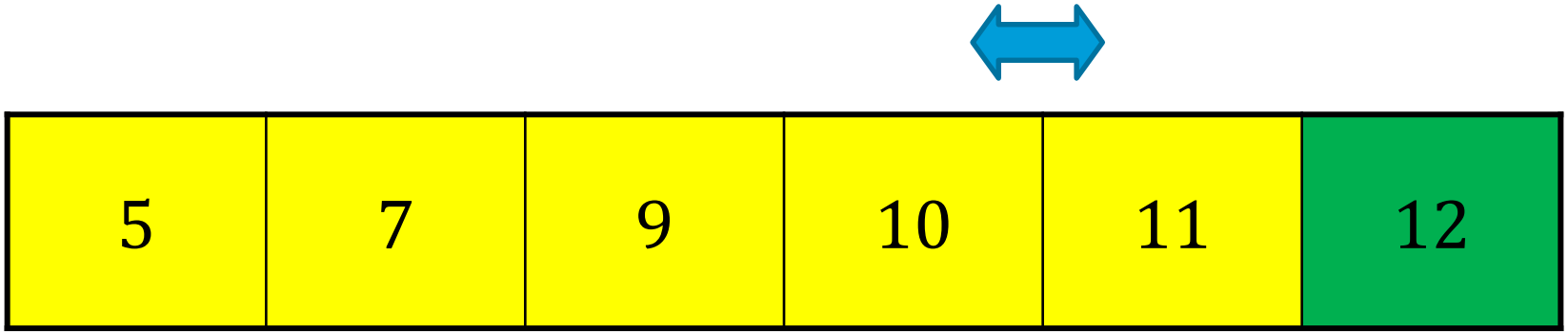
# Buborék rendezés



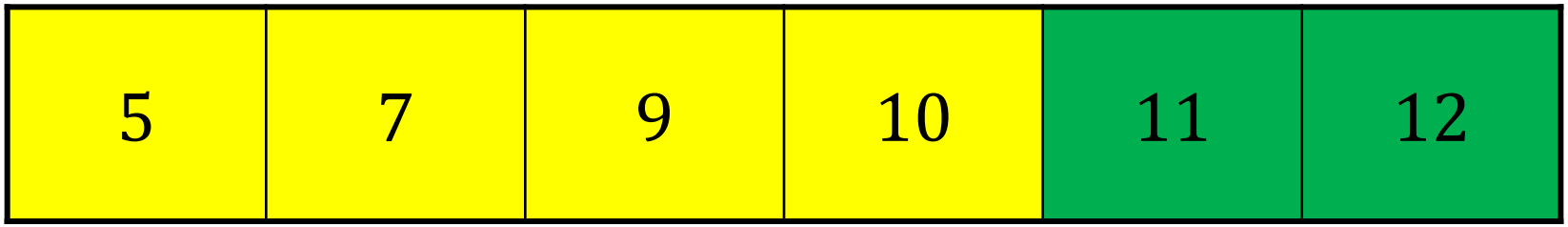
# Buborék rendezés



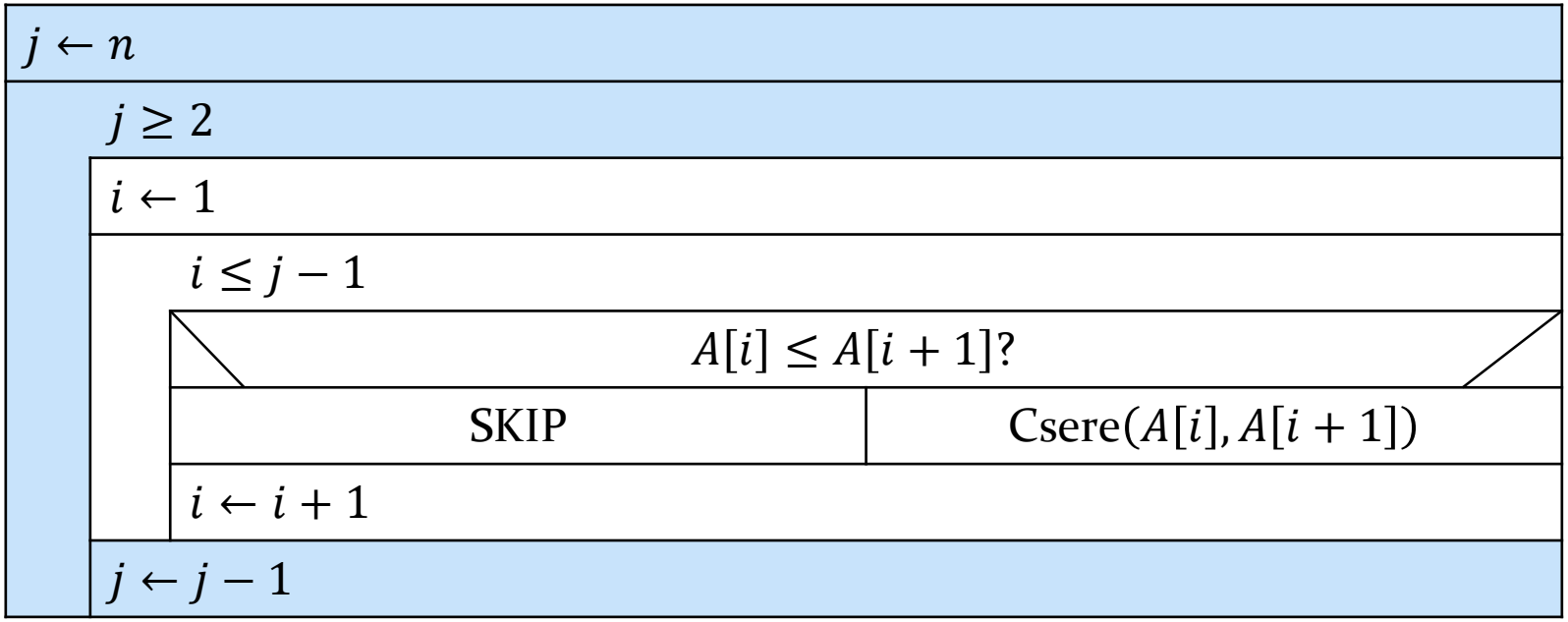
# Buborék rendezés



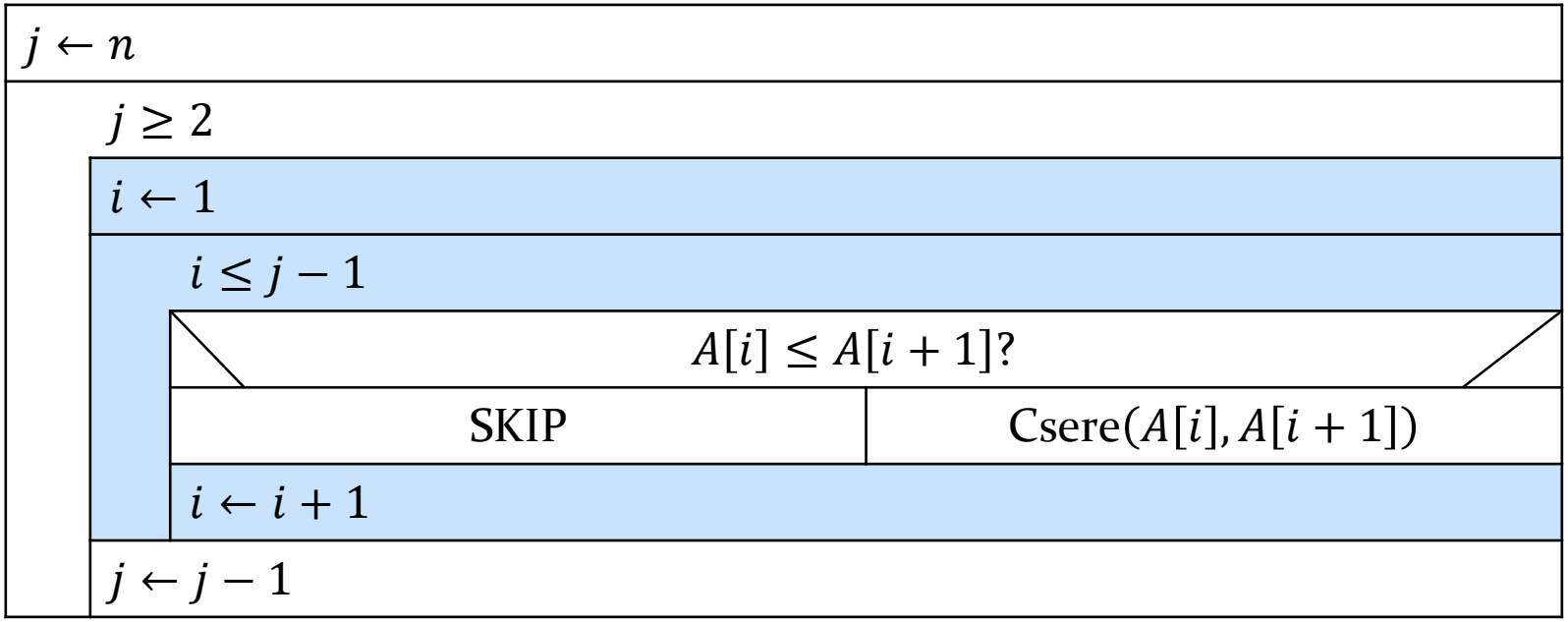
# Buborék rendezés



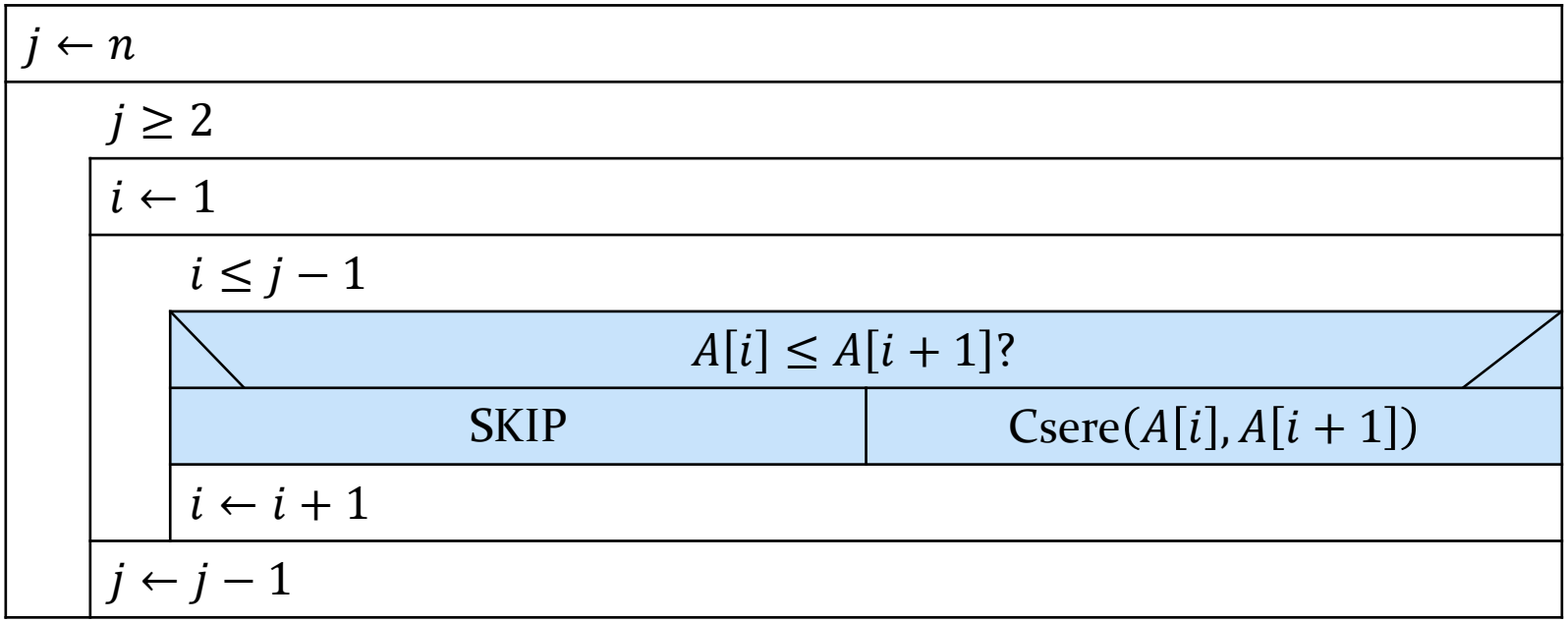
# Buborék rendezés algoritmusa



# Buborék rendezés algoritmusa

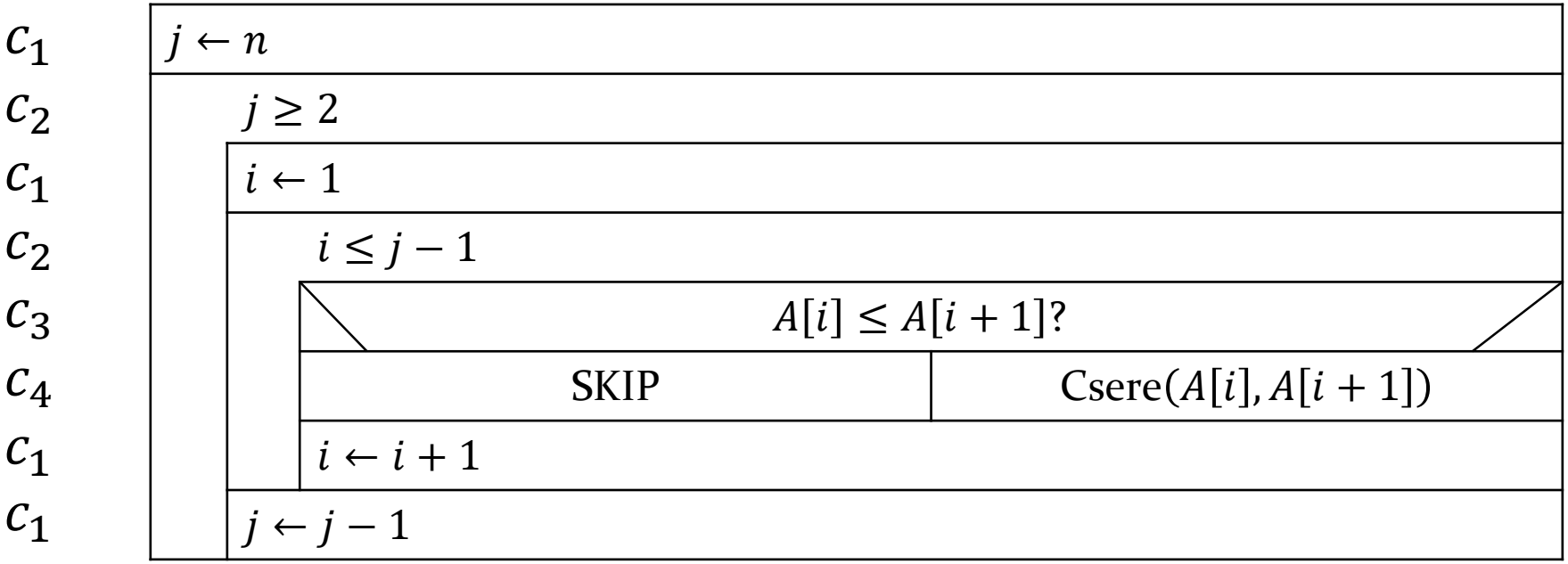


# Buborék rendezés algoritmusa



# Buborék rendezés algoritmusa

- Műveletek időigénye



# Buborék rendezés – időráfordítás

- Külső ciklus
  - $n-1$ –szer fut le, előtte kezdő értékadás
  - A feltételt $n$-szer ellenőrzi, $j$-t $n-1$-szer csökkenti
    - $c_1 + n * c_2 + (n-1) * c_1$
- Belső ciklus lefutásainak száma: $n-1, n-2, \dots 2, 1$
  - mindannyiszor 1 kezdőértékadás
  - a ciklusfeltétel eggyel többször ellenőrzi
  - $i$-t növeljük $(1 + \cdots + \ n-1)$-szer
    - $(n-1) * c_1 + \ (2 + \cdots + n) * c_2 + (1 + \cdots + n - 1) * c_1$
- $A[i]$ és $A[i+1]$ összehasonlításainak száma:
  - $(1 + \cdots + \ n-1) * c_3$
- A cserék száma $A$-tól függ = $A$ inverzióinak száma
  - Ez 0 és $\binom{n}{2}$ között van
  - $\text{inv}(A) * c_4$

# Buborék rendezés – összegezve

- $T(A) = c_1 + n * c_2 + (n-1) * c_1 +$
  $(n-1) * c_1 + (2 + \cdots + n) * c_2 + (1 + \cdots + n - 1) * c_1 +$
  $(1 + \cdots + n - 1) * c_3 +$
  $\text{inv}(A) * c_4 =$
- $c_1 + n * c_2 + n * c_1 + n^* c_1 - c_1 +$
  $(n+2) * \frac{n-1}{2} * c_2 + n * \frac{n-1}{2} * c_1 +$
  $n * \frac{n-1}{2} * c_3 +$
  $\text{inv}(A) * c_4$
- $n^2 * \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{2}\right) + n * \left(3 * \frac{c_1}{2} + 3 * \frac{c_2}{2} - \frac{c_3}{2}\right) - (c_1 - c_2) +$
  $\text{inv}(A) * c_4$

# Buborék rendezés

- Néhány egyszerűsítő feltételezés
  1. Feltételezés
     $c_1 \ll c_3$ és $c_2 \ll c_4$
     vagyis az elemek összehasonlítása és cseréje adja a költség javát
     - Ekkor

       $$T(A) \approx n^2 * \frac{c_3}{2} - n * \frac{c_3}{2} + \text{inv}(A) * c_4 = n * \frac{n-1}{2} * c_3 + \text{inv}(A) * c_4$$
  2. Feltételezés:
     $c_3$és $c_4$az egyes gépekre jellemző állandók. Ha történetesen $c_3 \approx c_4$, akkor a végrehajtási időt jellemzi a domináns műveletek száma:
     - $T(A) \approx n * \frac{n-1}{2} + \text{inv}(A)$
       $T(A)$ helyett $T(n)$-t bevezetve, a szokásos írásmód:

       $$T(n) \approx n * \frac{n-1}{2} + \text{inv}(A)$$

# Buborék rendezés

- Néhány egyszerűsítő feltételezés
  3. Feltételezés:
     általában külön-külön kérdezzük az egyes műveletek számát:
     - $\ddot{O}(n) \approx n * \frac{n-1}{2}$

       $Cs(n) \approx inv(A)$
  4. Feltételezés:
     ismerjük a lehetséges bejövő input adatokat, kiszámíthatjuk
     - a legrosszabb ($M\ T(n)$) és
     - a legjobb esetben ($m\ T(n)$)
     - átlagos esetben ($A\ T(n)$)

# Buborék rendezés

- Az előzőekből:
  - Az összehasonlítások száma minden $n$ hosszú vektorra ugyanannyi:
    - $M\ \ddot{O}(n) = m\ \ddot{O}(n) = A\ \ddot{O}(n) = n * \frac{n-1}{2}$
  - A cserék száma:
    - $M\ Cs(n) = n * \frac{n-1}{2}$
    - $m\ Cs(n) = 0$
    - $A\ Cs(n) = n * \frac{n-1}{4} = M\frac{Cs(n)}{2}$
      - Ez bizonyítható

# Buborék rendezés

- Az előzőek pontos értékek, azonban gyakran a költség (műveletszám) nagyságrendje, aszimptotikus viselkedése a hasznos információ
  - $M\ \text{Ö}(n) = \ n * \frac{n-1}{2} = \Theta(n^2)$
  - $M\ \text{Cs}(n) = n * \frac{n-1}{2} = \Theta(n^2)$
  - $A\ \text{Cs}(n) = \ n * \frac{n-1}{4} = M\frac{\text{Cs}(n)}{2} = \Theta(n^2)$

# Buborék rendezés

- Javított változat
  - Ha nincs már csere, leáll.
    - Cserék száma nem változik
    - $M$ Ö$(n)$ nem változik
    - $m$ Ö$(n) = n - 1$
    - $A$ Ö$(n) = ?$ (sejtés: $n^2$)

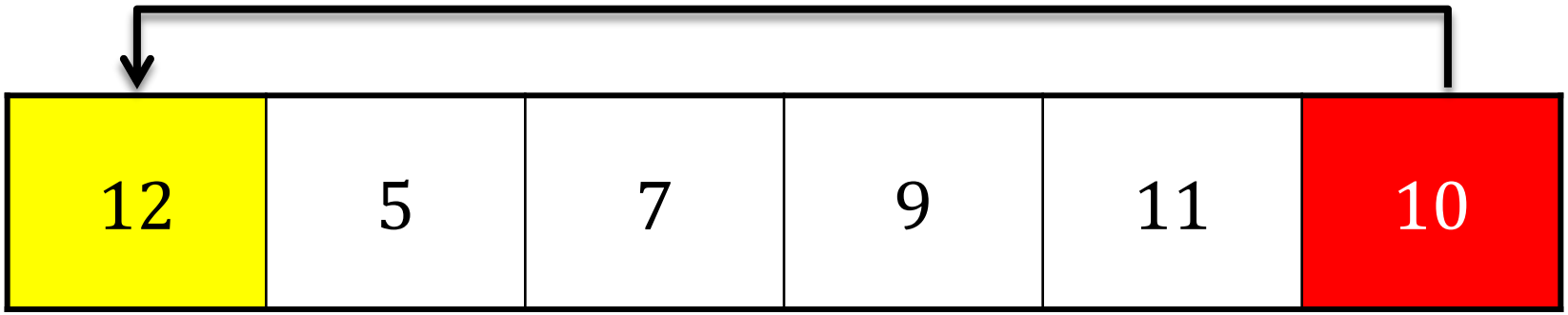
# Maximum kiválasztásos rendezés

- Ötlet: feltételezzük, hogy az $A[1..n]$ tömb jobb széle ($j + 1..n$) már rendezve van, minden lépésben kiválasztjuk az $A[1..j]$ résztömb maximális elemét, és kicseréljük a $j$. helyen lévővel, majd $j$-t csökkentjük
  - Kezdetben $j$ értéke $n$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 5 | 7 | 9 | 11 | 10 |

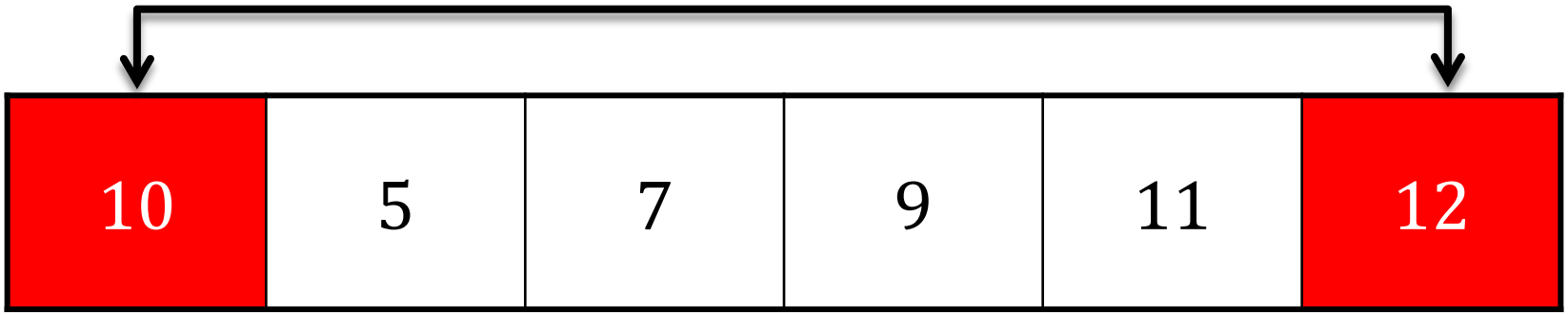
# Maximum kiválasztásos rendezés

- Maximum 12
- Hozzá tartozó index 1



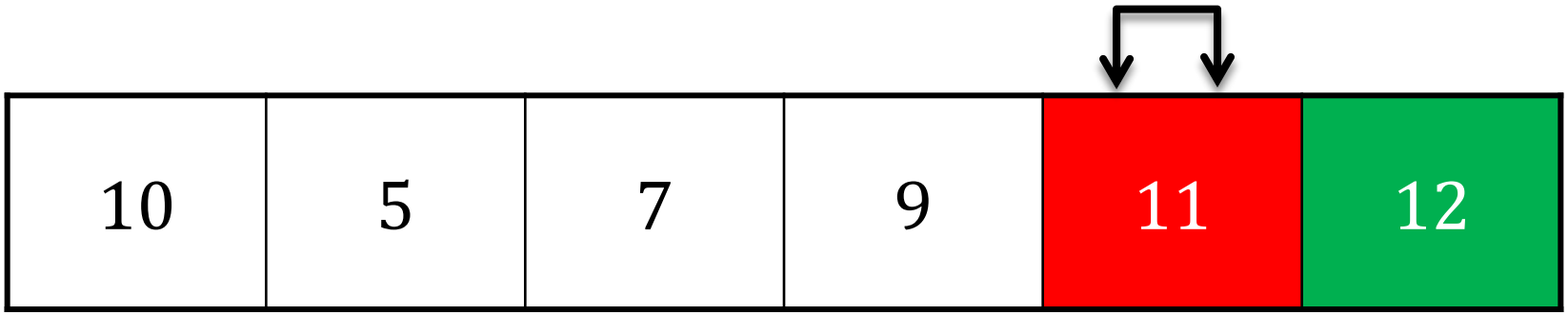
# Maximum kiválasztásos rendezés

- Maximum 12
- Hozzá tartozó index 1



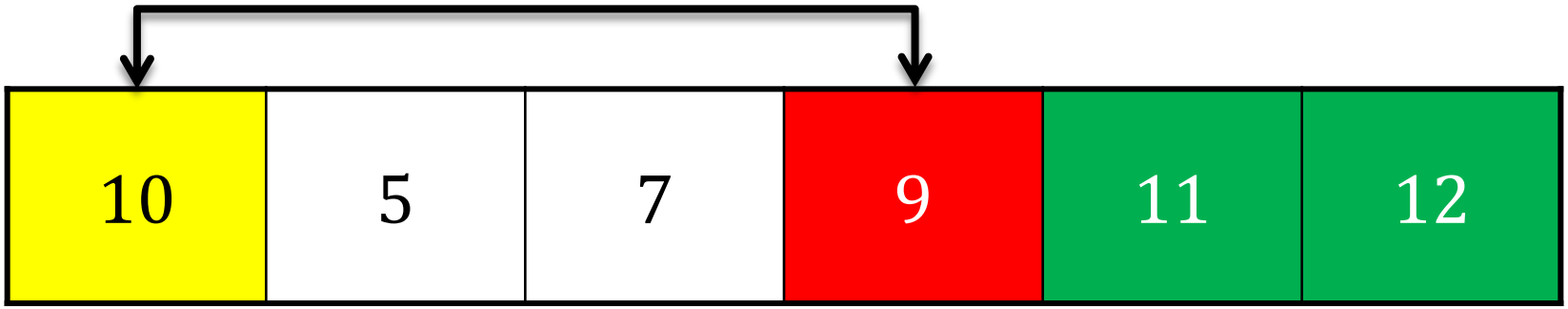
# Maximum kiválasztásos rendezés

- Maximum 11
- Hozzá tartozó index 5



# Maximum kiválasztásos rendezés

- Maximum 10
- Hozzá tartozó index 1

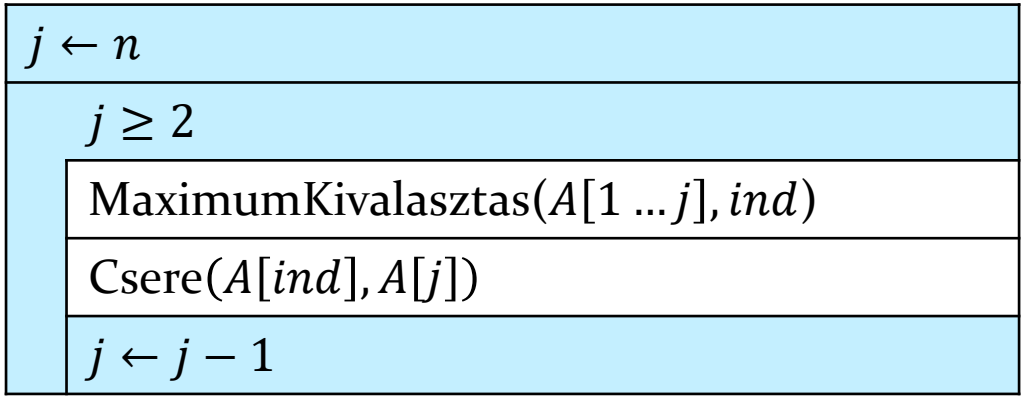


# Maximum kiválasztásos rendezés

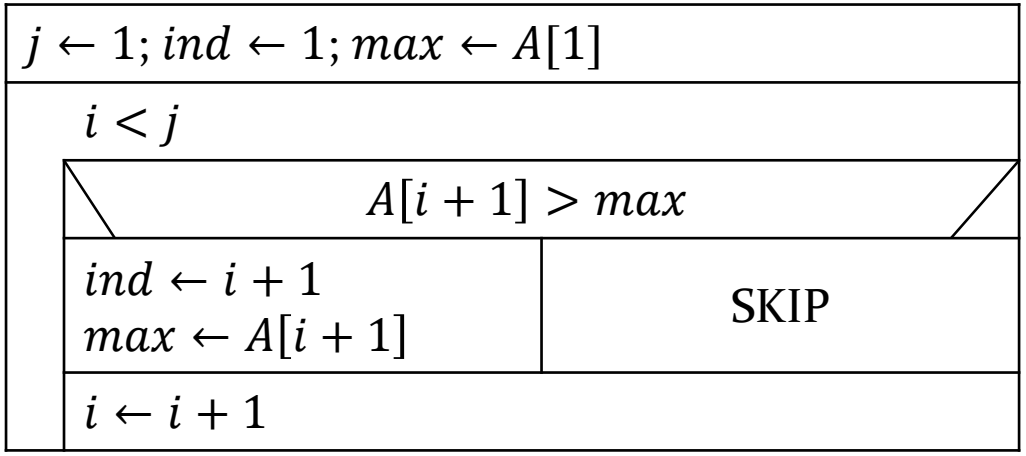
- Maximum 10
- Hozzá tartozó index 1

# Maximum kiválasztásos rendezés

- A rendező algoritmusa

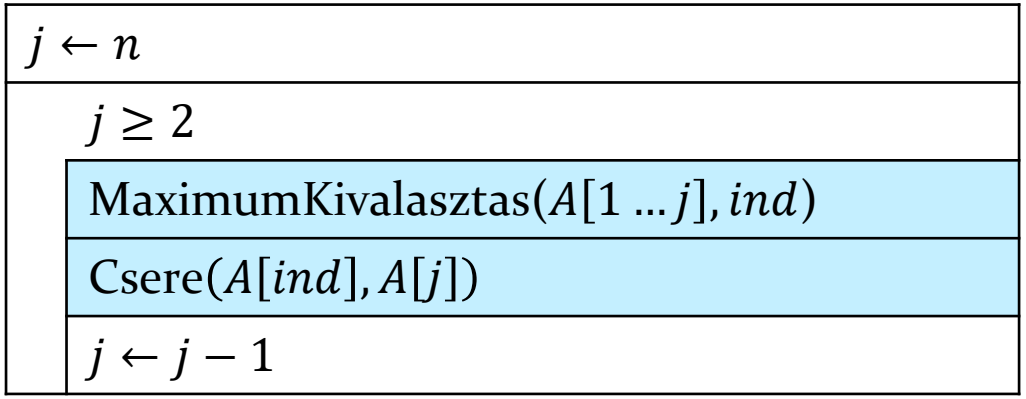



- Maximum kiválasztása

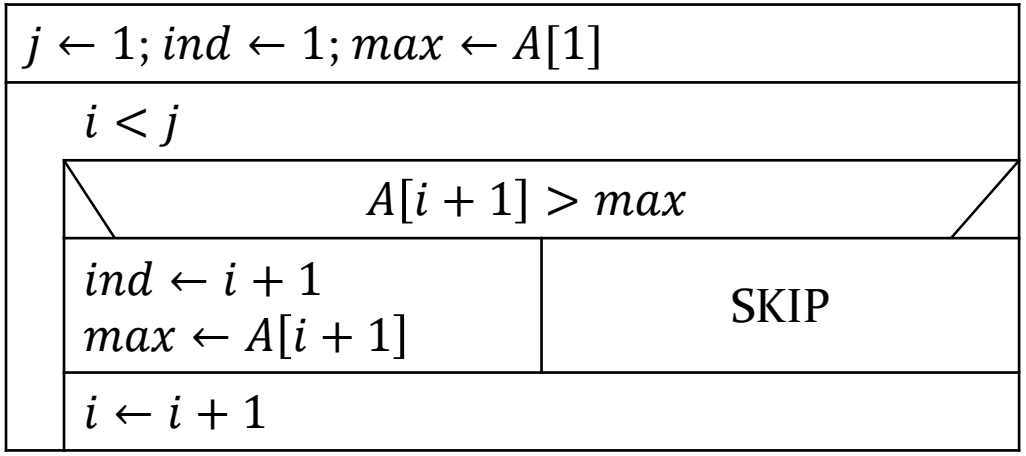


# Maximum kiválasztásos rendezés

- A rendező algoritmusa

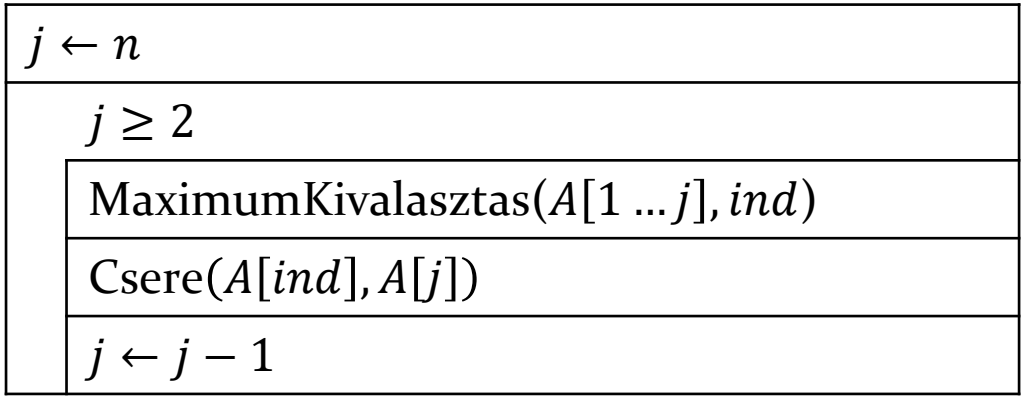



- Maximum kiválasztása

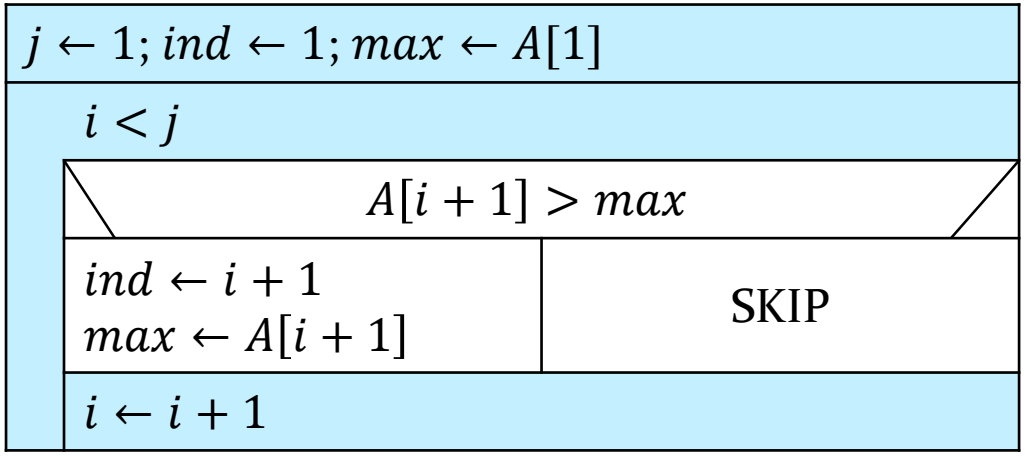


# Maximum kiválasztásos rendezés

- A rendező algoritmusa




- Maximum kiválasztása



# Maximum kiválasztásos rendezés

- A rendező algoritmusa
  - $M$ Ö$(n)\geq$ $(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = \Theta(n^2)$

| $j \leftarrow n$ | |
|---|---|
| $j \geq 2$ | |
| | MaximumKivalasztas$(A[1 \ldots j], ind)$ |
| | Csere$(A[ind], A[j])$ |
| | $j \leftarrow j-1$ |

- Maximum kiválasztása
  - A maximum $n$ elem közül legalább $n-1$ összehasonlítással található meg

| $j \leftarrow 1; ind \leftarrow 1; max \leftarrow A[1]$ | |
|---|---|
| $i < j$ | |
| $A[i+1] > max$ | |
| $ind \leftarrow i+1$<br>$max \leftarrow A[i+1]$ | SKIP |
| $i \leftarrow i+1$ | |

# Beszúró rendezés

- Egyszerű beillesztéssel egy – egy elemet a helyére viszünk – megkeressük, hogy hová való a már rendezett sorozatban
- Ha tömbben tároljuk, akkor a mozgatások száma is fontos

# Beszúró rendezés

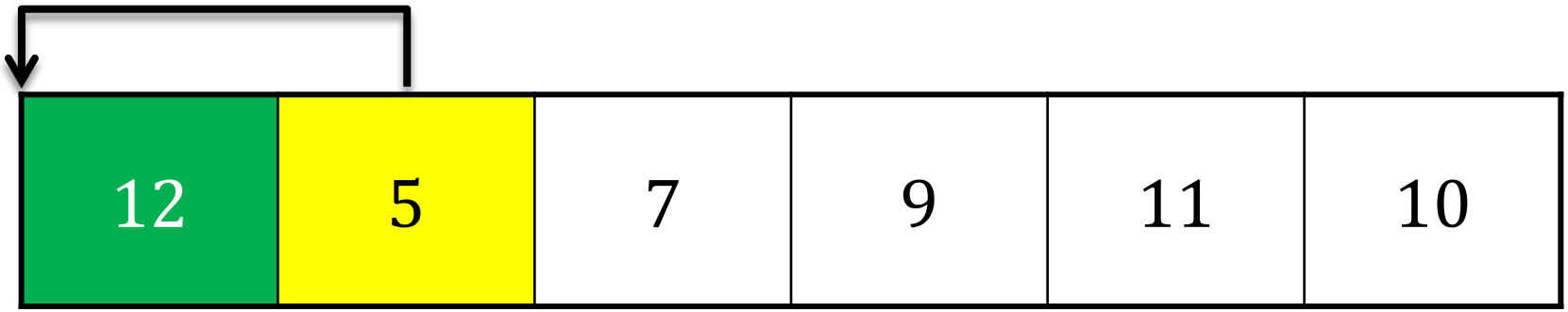
- Példa

# Beszúró rendezés

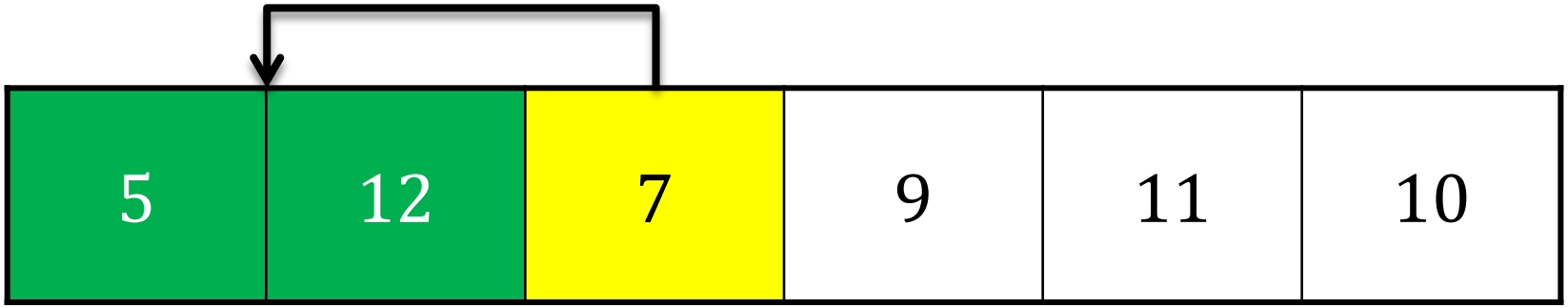
| 12 | 5 | 7 | 9 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|

# Beszúró rendezés

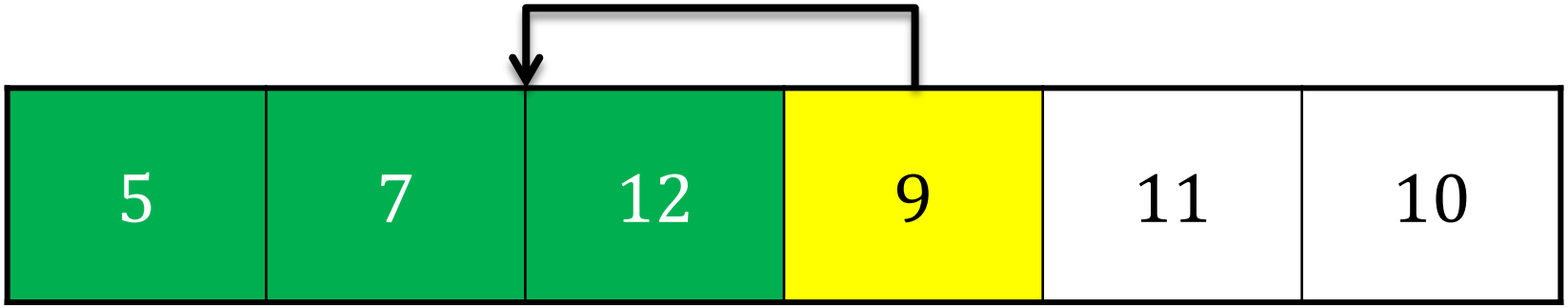
# Beszúró rendezés



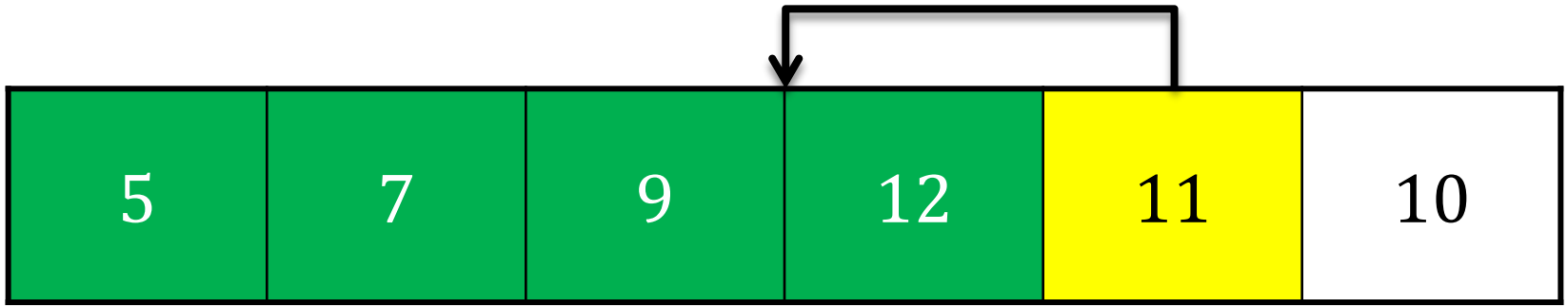
# Beszúró rendezés



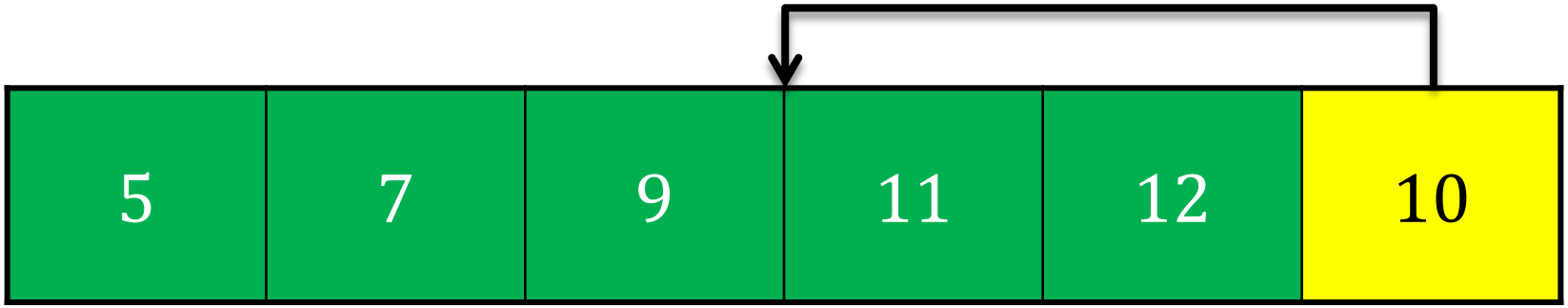
# Beszúró rendezés



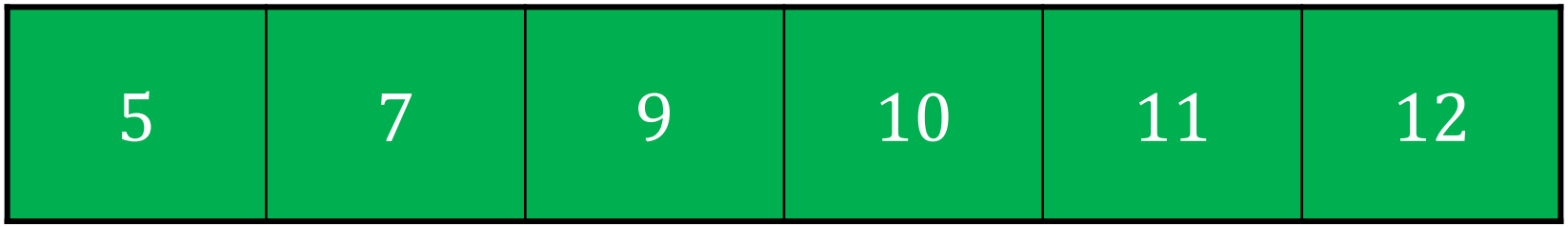
# Beszúró rendezés



# Beszúró rendezés



# Beszúró rendezés



# Beszúró rendezés algoritmusa

$j \leftarrow 1$

- $j \leq n - 1$
  - $w \leftarrow A[j + 1]$
  - $i \leftarrow j$
  - $i \geq 1 \ \wedge A[i] > w$
    - $A[i + 1] \leftarrow A[i]$
    - $i \leftarrow i - 1$
  - $A[i + 1] \leftarrow w$
  - $j \leftarrow j + 1$

# Beszúró rendezés algoritmusa

```
j ← 1
    j ≤ n − 1
        w ← A[j + 1]
        i ← j
            i ≥ 1 ∧ A[i] > w
                A[i + 1] ← A[i]
                i ← i − 1
        A[i + 1] ← w
        j ← j + 1
```

# Beszúró rendezés

- Műveletigény
  - Összehasonlítások
    - $M\ Ö(n) = n * \frac{n-1}{2} = \Theta(n^2)$
    - $A\ Ö(n) \approx M\frac{Ö(n)}{2} = \Theta(n^2)$
    - $m\ Ö(n) = n - 1$
  - M a mozgatás művelete:
    - $M\ M(n) = (n+2) * \frac{n-1}{2} = \Theta(n^2)$
    - $A\ M(n) = \frac{n2}{4} = \Theta(n^2)$
    - $m\ M(n) = 2 * (n-1) = \Theta(n)$

# Quicksort

Gyorsabb rendező

# Gyorsrendezés (Quicksort)

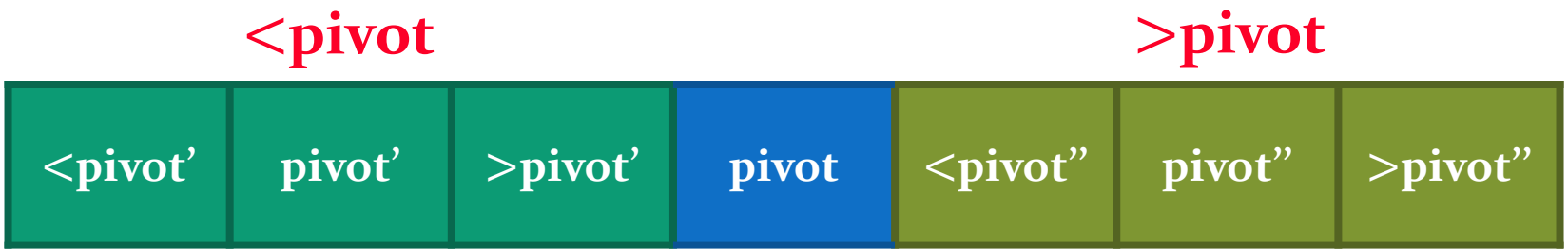
- Hatékony rendezési algoritmus
  - C. A. R. Hoare készítette, 1960.
- Az „Oszd meg és Uralkodj” algoritmus egy példája
- Két fázis
  1. Partíciós fázis
     - Oszd a munkát két részre!
  2. Rendezési fázis
     - Uralkodj a részeken!

# Gyorsrendezés (Quicksort)

- Partíció
  - Válassz egy „strázsát” (pivot)!
  - Válaszd a strázsa pozícióját olyanra, hogy
    - Minden elem tőle jobbra nagyobb legyen!
    - Minden elem tőle balra kisebb legyen!

# Gyorsrendezés (Quicksort)

- Uralkodj
  - Alkalmazd ugyanezt az algoritmust mindkét félre!



# Gyorsrendezés (Quicksort)

- Implementáció

```
quicksort( void *a, int also, int felso )
{
  int pivot;
  /* Terminálási feltétel! */
  if ( felso > also )
  {
    pivot = feloszt( a, also, felso );   Oszd meg!
    quicksort( a, also, pivot-1 );       Uralkodj!
    quicksort( a, pivot+1, felso );      Uralkodj!
  }
}
```

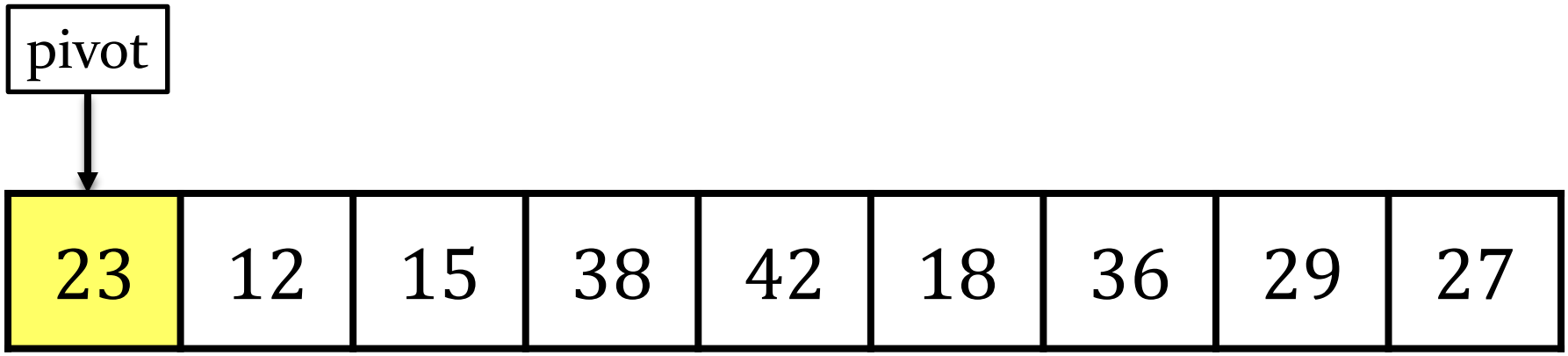
# Quicksort – Megosztás

- A feladat megfelelő felosztás létrehozása
  - A példában egész értékek vannak, az egyszerűség kedvéért

| 23 | 12 | 15 | 38 | 42 | 18 | 36 | 29 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

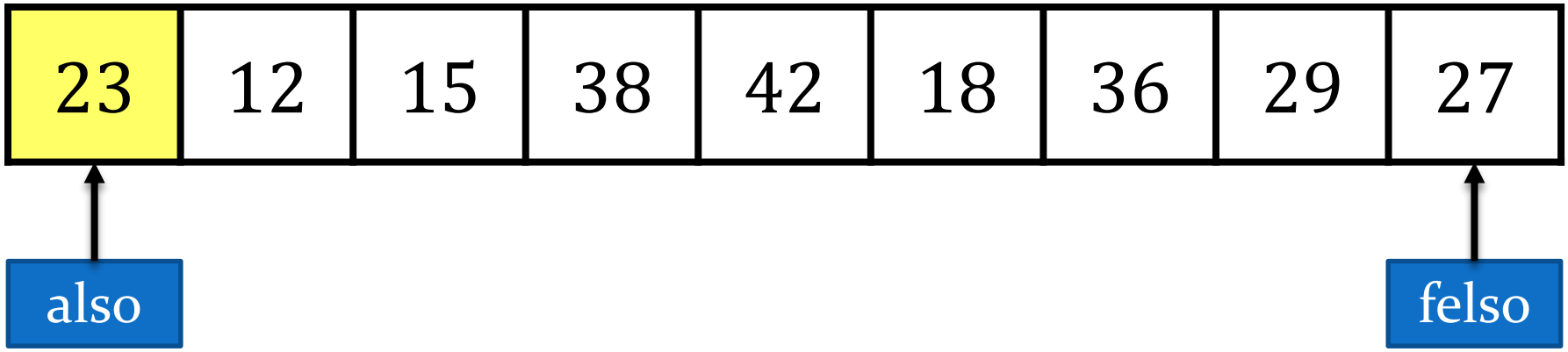
# Quicksort – Megosztás

- A feladat a jó felosztás létrehozása
  - A példában egész értékek vannak, az egyszerűség kedvéért
- Bármelyik elem lehet strázsa
  - Legyen itt a bal szélső



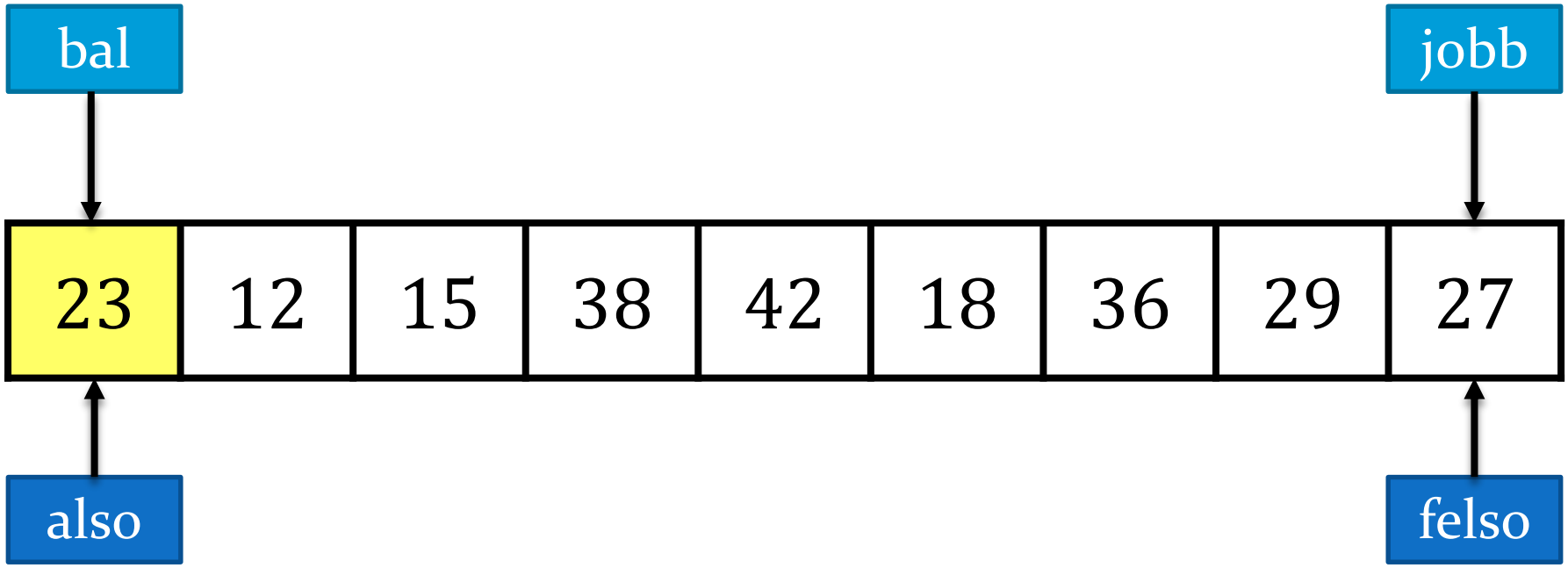
# Quicksort – Megosztás

- A résztömb, amin dolgozunk az alsó és felső indexek között található
- A tömb két széléről indul szemben két indexelés
  - Ez a jobb és bal



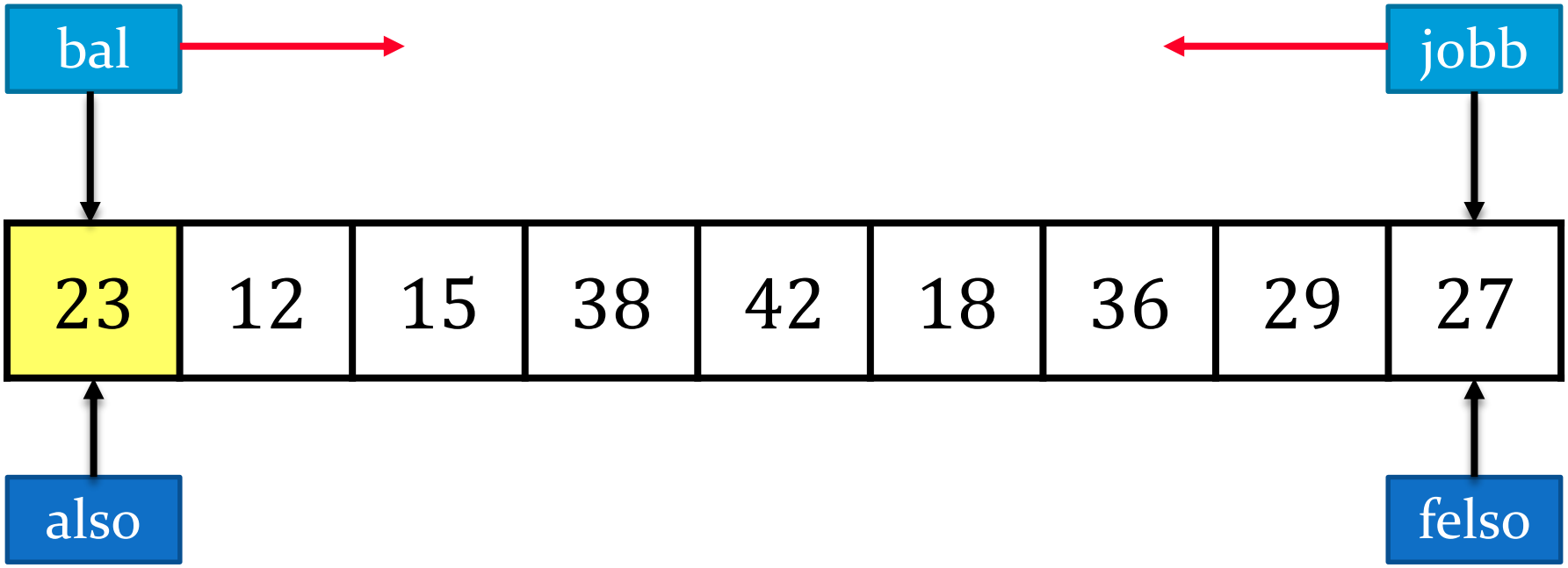
# Quicksort – Megosztás

- A résztömb, amin dolgozunk az alsó és felső indexek között található
- A tömb két széléről indul szemben két indexelés
  - Ez a jobb és bal



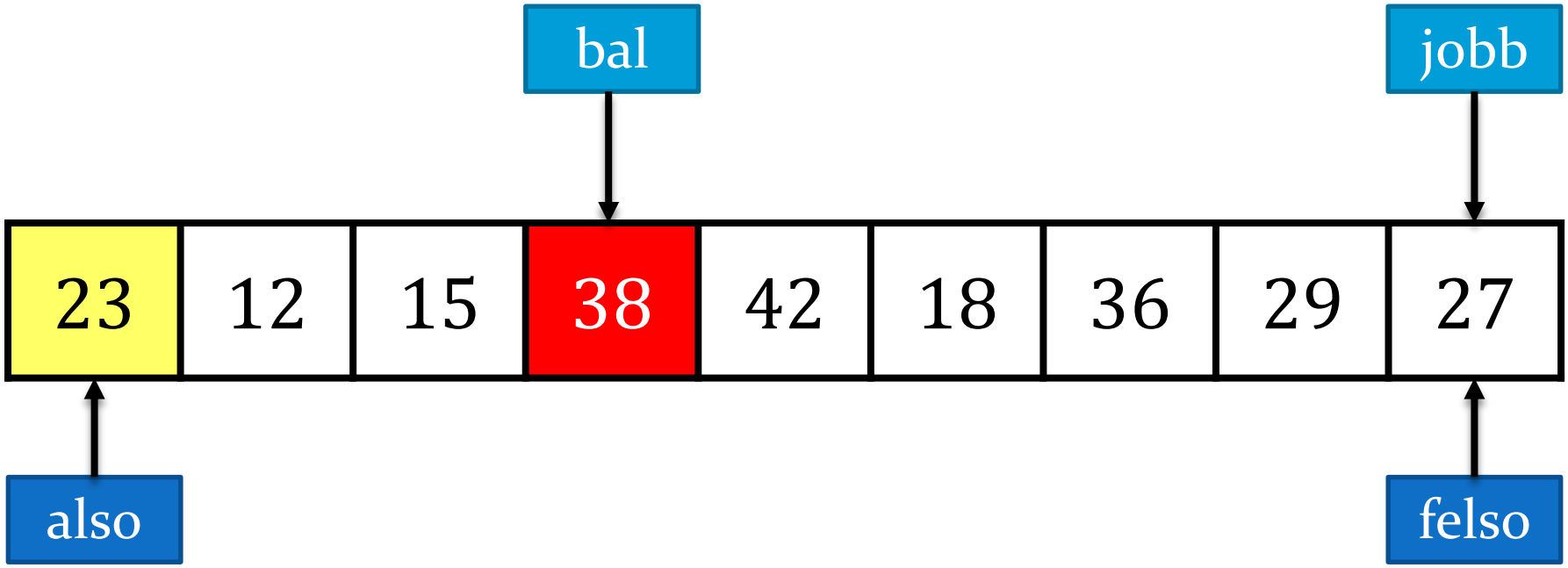
# Quicksort – Megosztás

- A két indexet egymással szemben mozgatjuk
  - Addig, amíg találkoznak egymással
  - Ne feledjük, a strázsa értéke 23



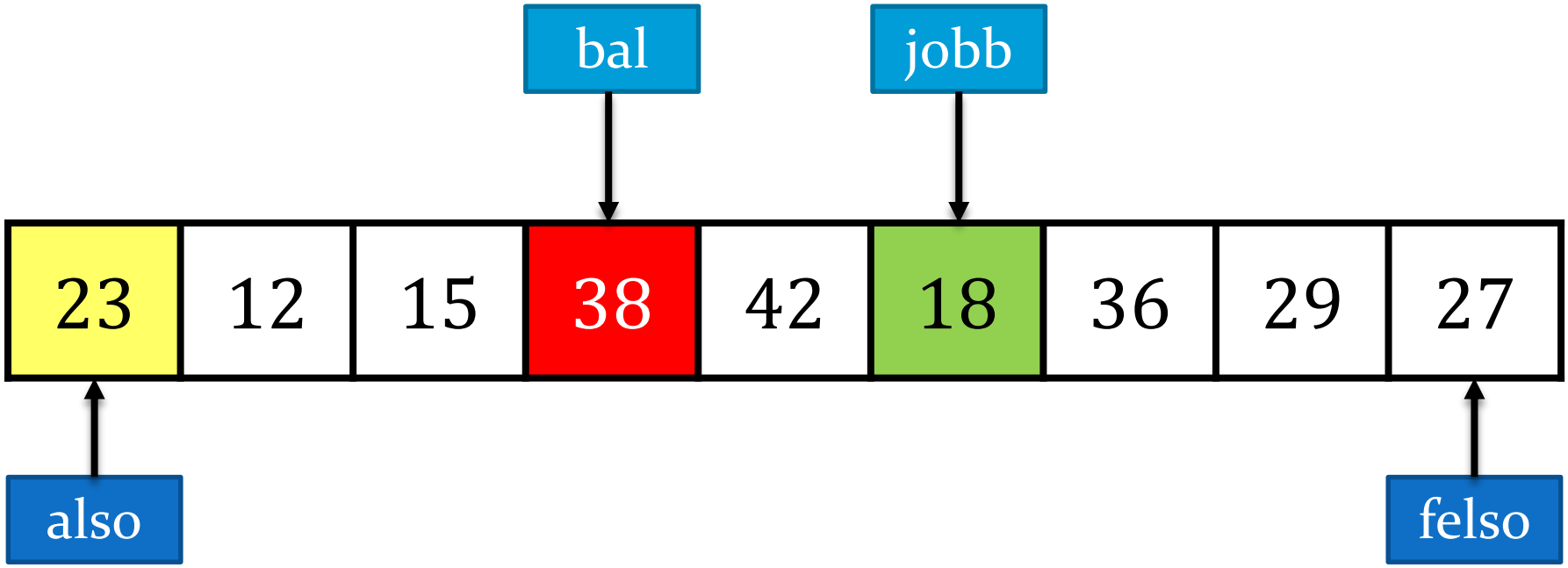
# Quicksort – Megosztás

- A két indexet egymással szemben mozgatjuk
  - A bal jelzőt addig visszük jobbra, amíg nem igaz, hogy bal ≤ strázsa



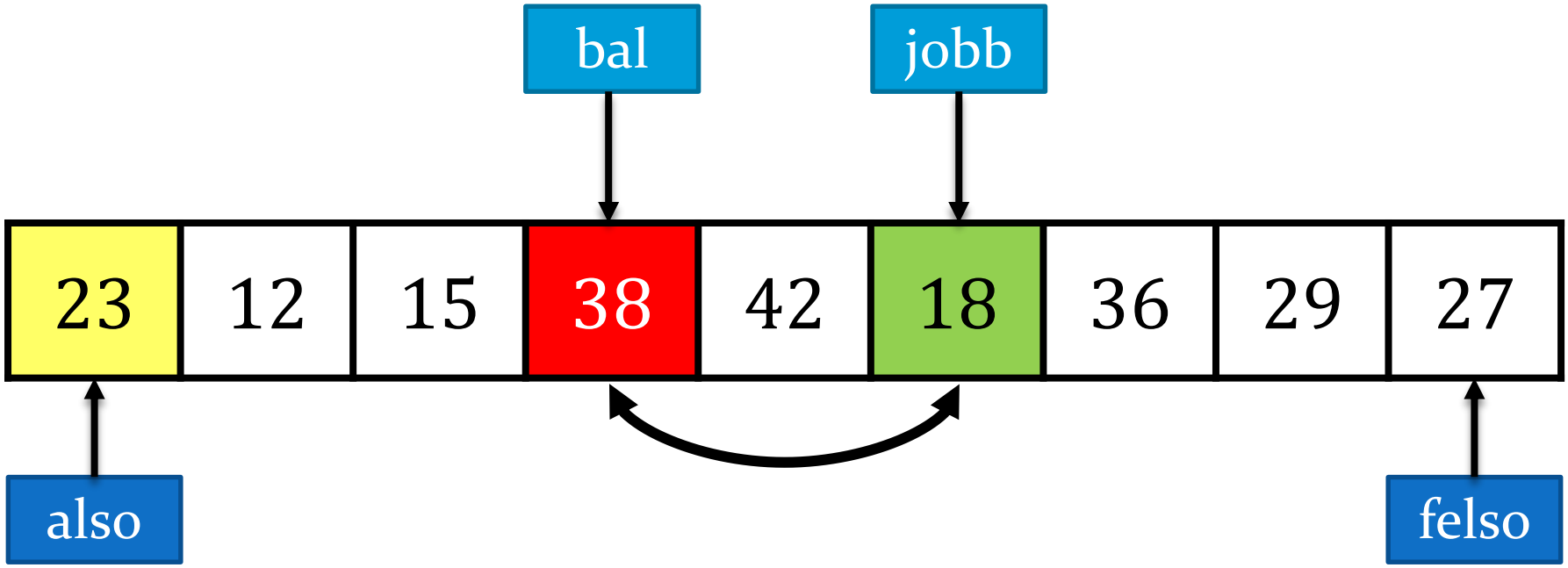
# Quicksort – Megosztás

- A két indexet egymással szemben mozgatjuk
  - A jobb jelzőt addig visszük balra, amíg nem igaz, hogy jobb ≥ strázsa



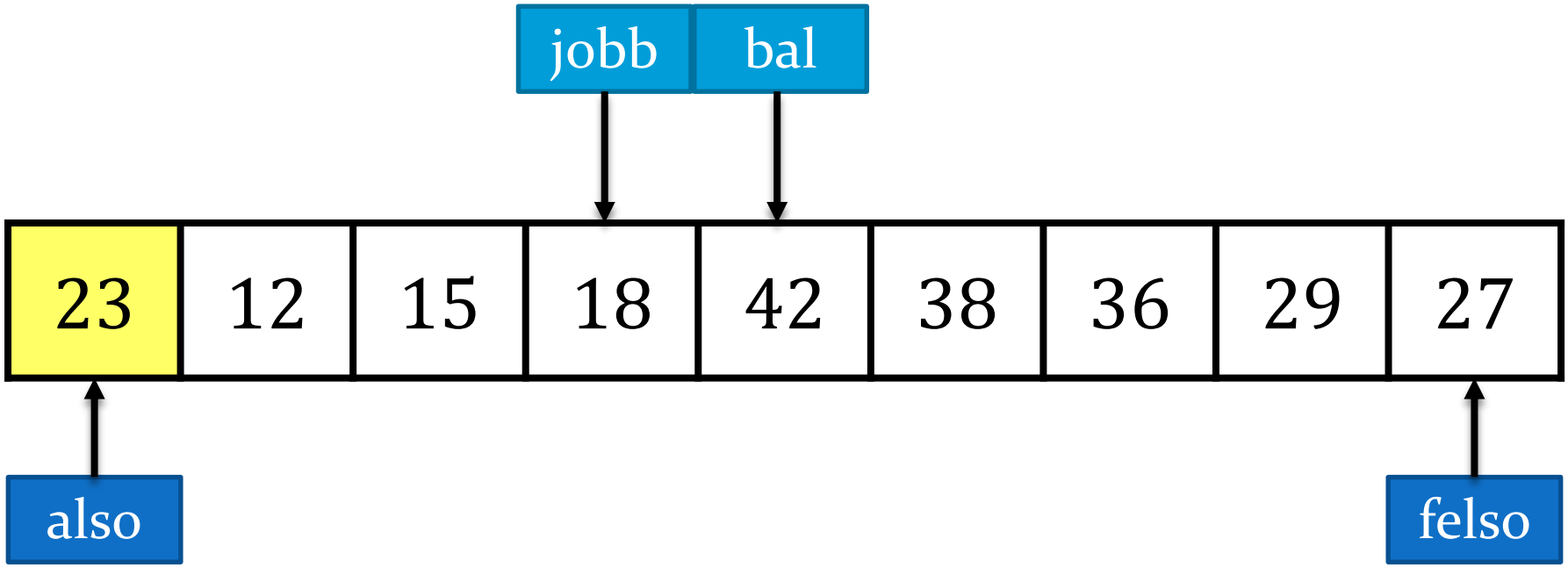
# Quicksort – Megosztás

- Ha a két index nem találkozott, vagy nem kerülték ki egymást, akkor meg kell cserélni a két elemet
  - Mivel a strázsa rossz oldalain állnak



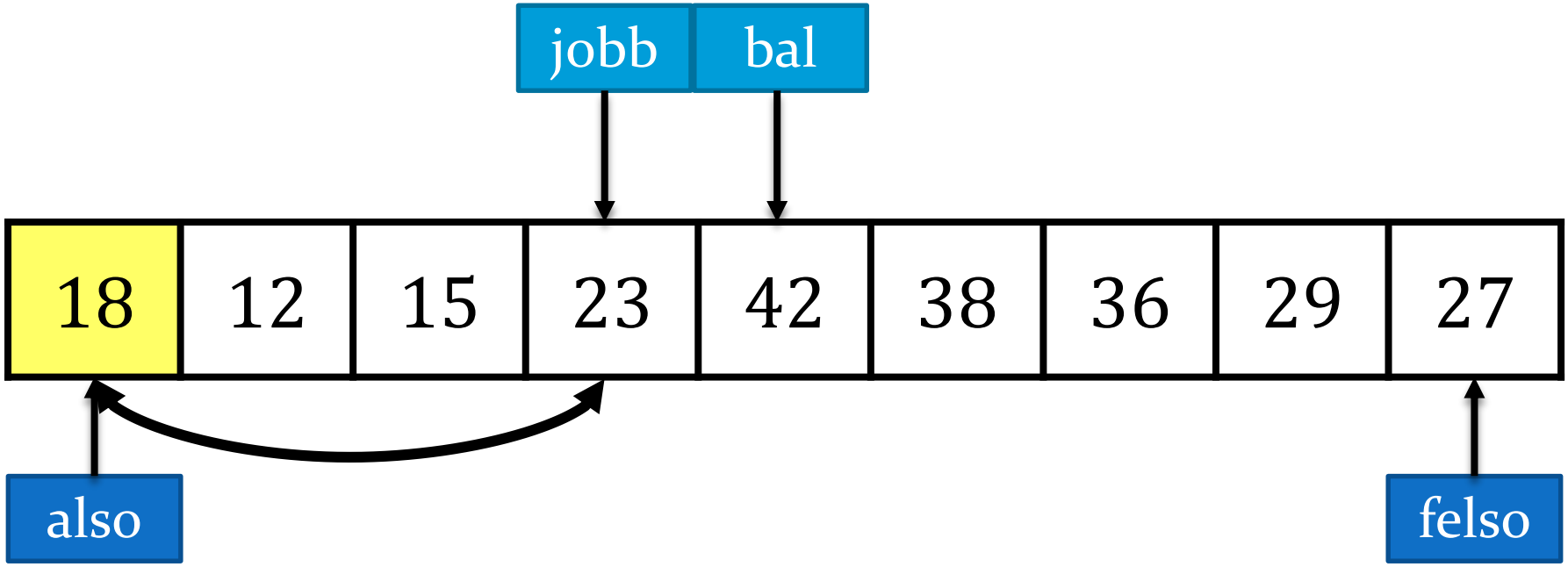
# Quicksort – Megosztás

- Folytatjuk a bal és jobb léptetését
  - Szembetalálkoznak, így leáll a léptetés



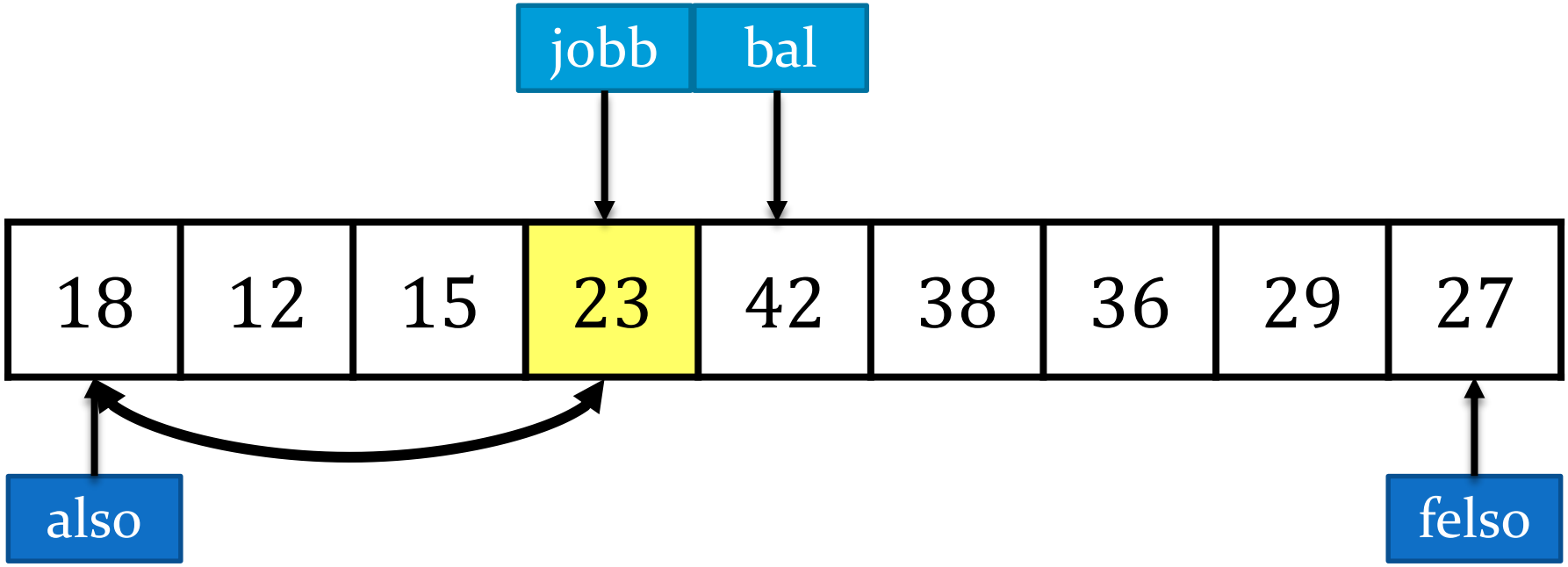
# Quicksort – Megosztás

- Folytatjuk a bal és jobb léptetését
  - Szembetalálkoznak, így leáll a léptetés
  - Az utolsó lépés a strázsa és a jobb cseréje



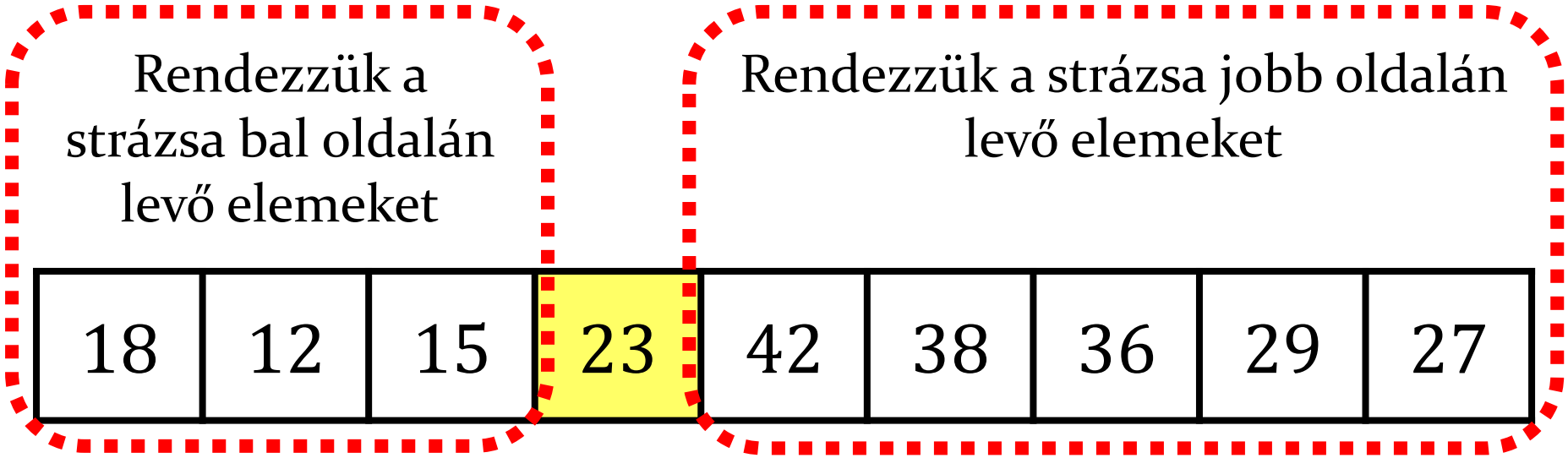
# Quicksort – Megosztás

- Folytatjuk a bal és jobb léptetését
  - Szembetalálkoznak, így leáll a léptetés
  - Az utolsó lépés a strázsa és a jobb cseréje
  - A felosztó eljárás visszatér a strázsa indexével (ami a jobb)



# Quicksort – Uralkodj

- Ezután rekurzívan rendezzük a strázsa bal oldalán levő elemeket és a jobb oldalán levő elemeket
  - Meghívjuk az eredeti függvényt



# Gyorsrendezés algoritmusa

**Gyorsrendezés (A, also, felso)**

| also<felso | |
|---|---|
| $q =$ Feloszt$(A, also, felso)$<br>Gyorsrendezés$(A, also, q-1)$<br>Gyorsrendezés$(A, q+1, felso)$ | SKIP |

**Feloszt(A, also, felso)**

$str \leftarrow A[also]; bal \leftarrow also; jobb \leftarrow felso$

$bal < jobb$

A$[bal] \leq str \wedge bal < felso$

$bal \leftarrow bal + 1$

A$[jobb] \geq str \wedge jobb > also$

$jobb \leftarrow jobb - 1$

$bal < jobb$

| Csere$(A[bal], A[jobb])$; | SKIP |
|---|---|

$A[also] \leftarrow A[jobb]; A[jobb] \leftarrow str;$
**return** $jobb;$

# Quicksort - Analízis

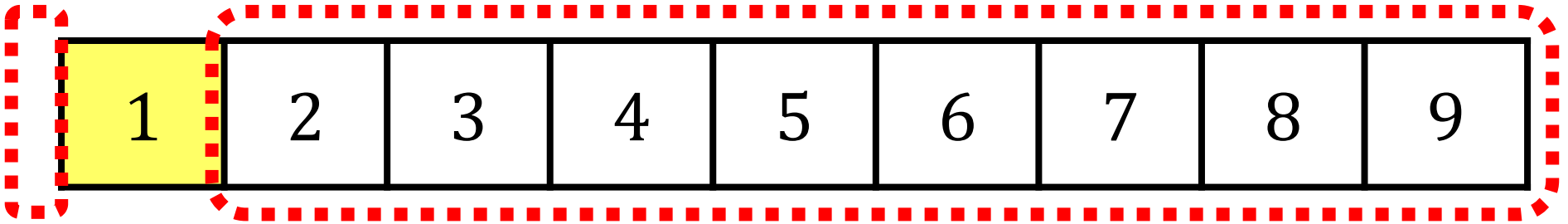
- Felosztás
  - vizsgálj meg minden elemet egyszer $\mathcal{O}(n)$
- Uralkodás
  - az adatok kétfelé osztása $\mathcal{O}(\log_2 n)$
- összesen
  - szorzat $\mathcal{O}(n \log n)$
- De van egy gond …

# Quicksort – az igazság!

- Mi történik, ha az adatok már rendezettek, vagy majdnem rendezettek?
  - Azt várnánk, hogy akkor gyorsabb lesz!

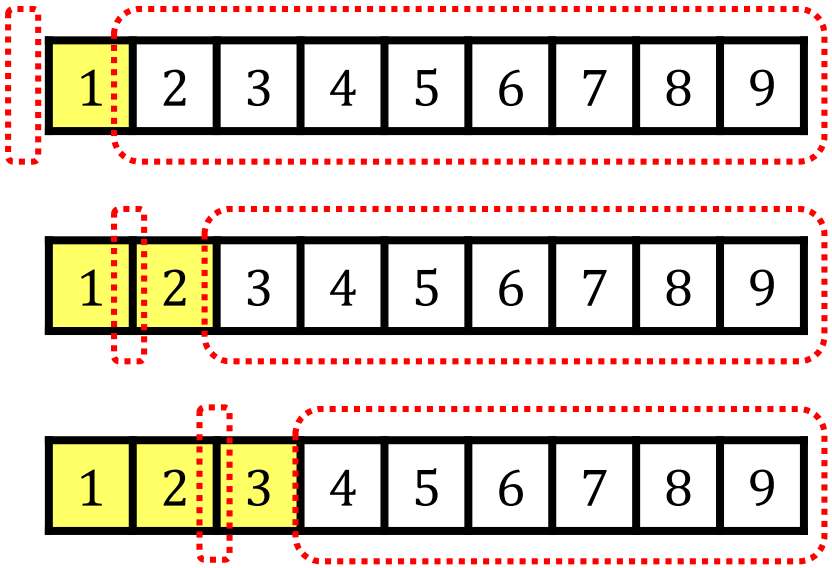
# Quicksort – az igazság!

- Rendezett adatok esetén
  - A bal elem a strázsa
  - A felosztás végén a tömb bal szélén marad a strázsa
    - A tőle balra levő elemeket rendezzük – nincsenek ilyen elemek
    - A tőle jobbra levő elemeket rendezzük – a maradék tömb



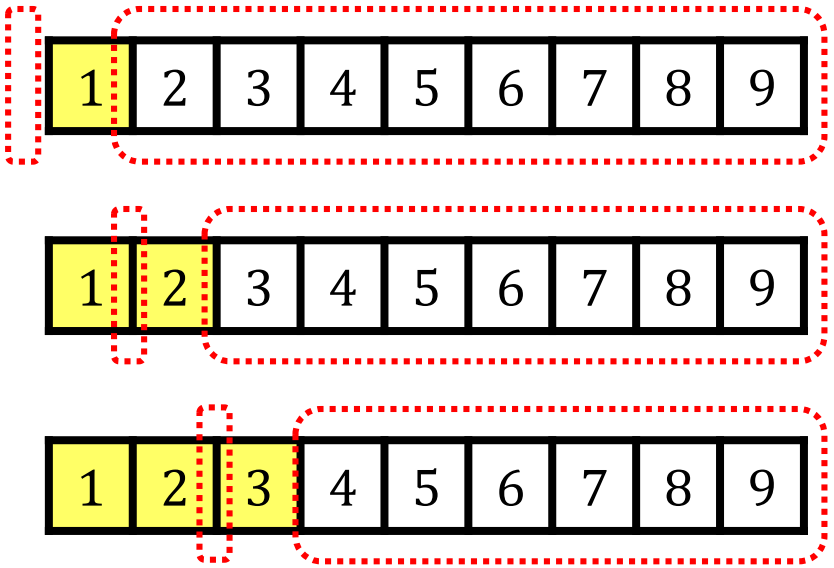
# Quicksort – az igazság!

- Rendezett adatok esetén
- Minden partícionálás során létrejön egy
  - 0 méretű feladat
  - $n - 1$ méretű feladat
- A partíciók száma?



# Quicksort – az igazság!

- Rendezett adatok esetén
- Minden partícionálás során létrejön egy
  - 0 méretű feladat
  - $n - 1$ méretű feladat
- A partíciók száma?
  - Minden $n$ időigénye $\mathcal{O}(n)$
  - Összesen $n * \mathcal{O}(n)$
    - Ez pedig összesen $\mathcal{O}(n^2)$
  - Tehát a gyorsrendező olyan rossz, mint a buborék rendezés!?

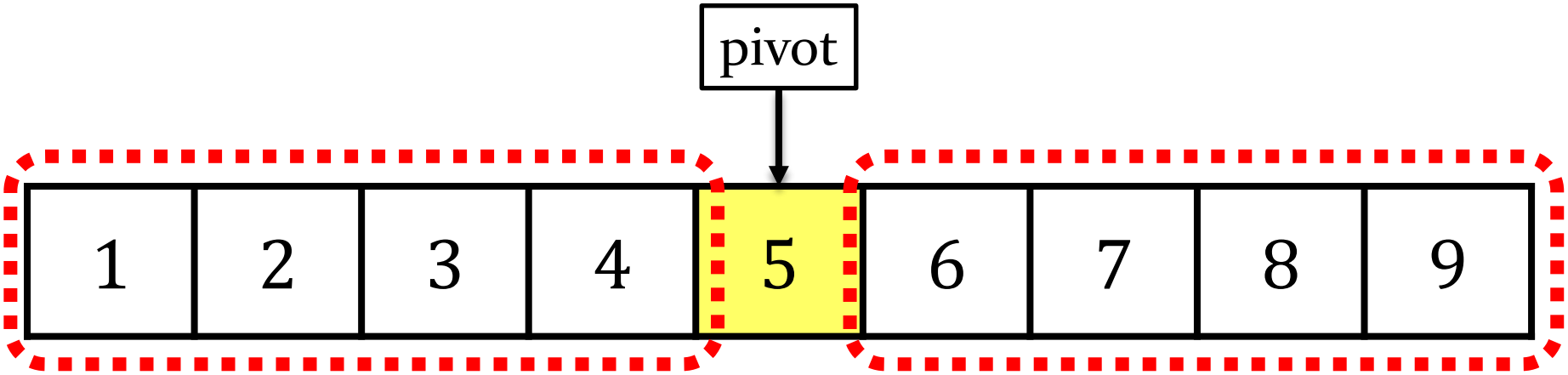


# Quicksort – az igazság!

- A Quicksort $\mathcal{O}(n * \log n)$ viselkedése a majdnem egyforma partíciókon múlik
- Átlagosan is majdnem ez a helyzet
  - És a Quicksort általában $\mathcal{O}(n * \log n)$
- Mit lehet tenni?
- Általában semmit
  - De javíthatjuk az esélyeinket!

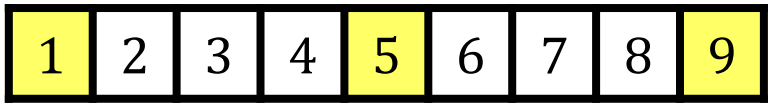
# Quicksort – A pivot választása

- Bármelyik strázsa megteszi…
- Válasszunk egy másikat …
  - Ha a partíciók egyformák akkor $\mathcal{O}(n * \log n)$ idő lesz a rendezés ideje
  - Legyen a középső
    - Rendezett elemek esetén jó választás
    - Megmutatható, hogy az sem mindig jó megoldás



# Quicksort – 3-ból a középső pivot

- Válasszunk három strázsát, majd azok közül az érték szerinti középsőt használjuk
  - Például vegyük az indexek közül a két szélsőt és a középsőt



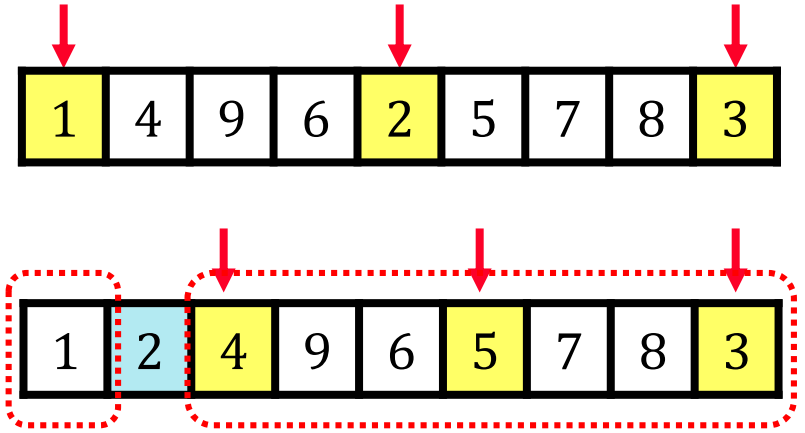

  - Az értékek közül a középső az 5
  - Ez a rendezett adatok esetén jó választás!
  - $\mathcal{O}(n * \log n)$ idő
- Mivel a rendezett (vagy majdnem rendezett) adatok elég gyakoriak, ez egy jó stratégia
  - Különösen, ha azt várjuk, hogy az adataink rendezettek lesznek!

# Quicksort – Véletlen pivot

- Válassz egy strázsát véletlenszerűen
  - Minden felosztásnál másik pozíciót
  - Átlagosan a rendezett adatokat jól osztja szét
  - $\mathcal{O}(n * \log n)$ idő
- Fontos követelmény
  - A pivot kiválasztása $\mathcal{O}(1)$ idő kell legyen

# Quicksort – Garantált $\mathcal{O}(n * \log n)$?

- **Sohasem garantálható**
  - A tetszőleges pivot választási stratégia vezethet $\mathcal{O}(n^2)$ időhöz
- Itt a 3-ból a középső kiválasztja a 2-t
  - egy partícióba 1 elem kerül,
  - a másikba 7
- következőnek kiválasztja a 4-t
  - egy partícióba 1 elem kerül,
  - a másikba 5



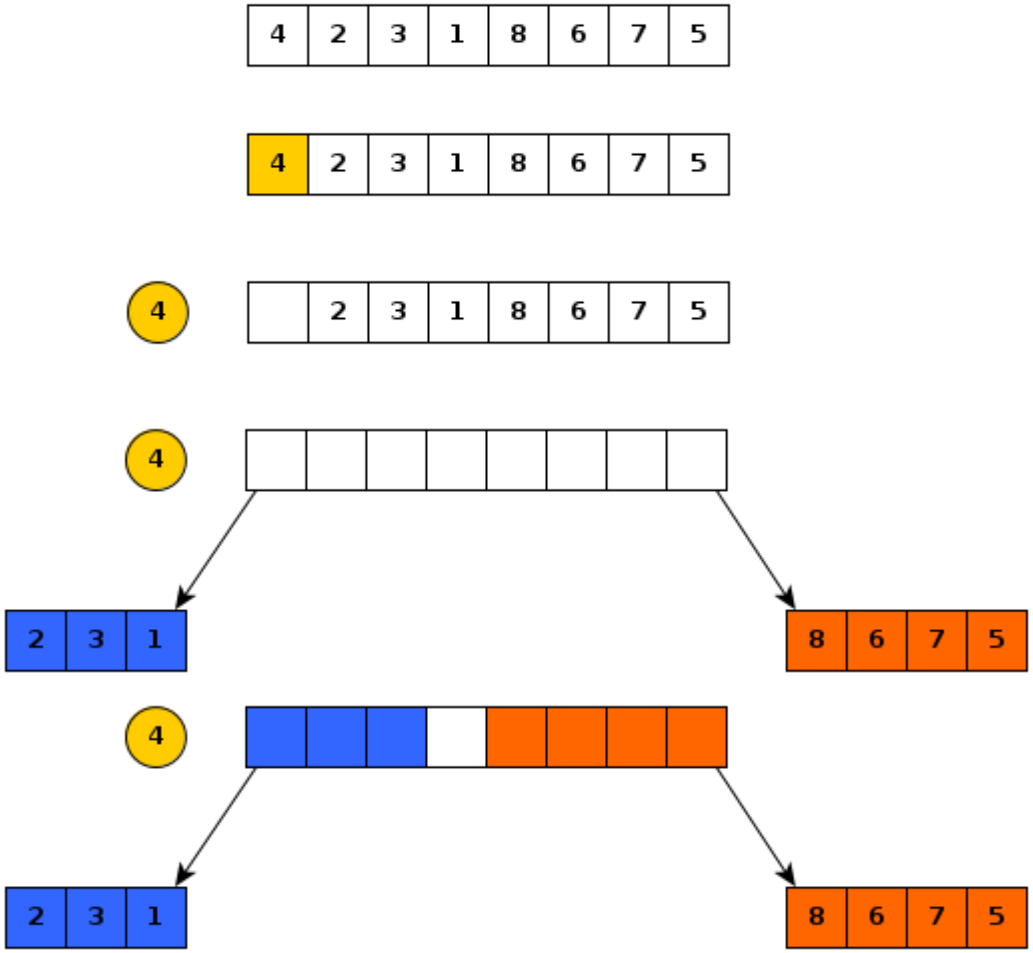
# Rendezés

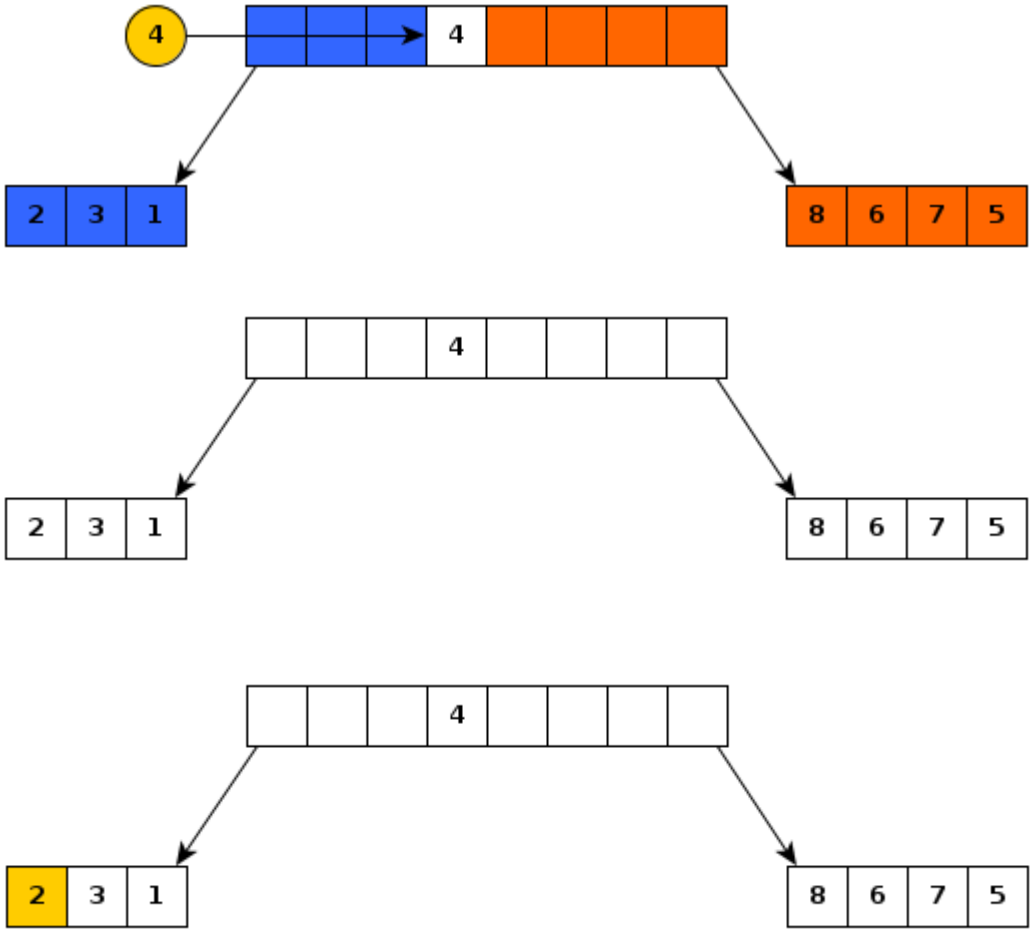
- Buborék, Beszúrásos, Maximumkiválasztásos
  - $\mathcal{O}(n^2)$ rendezések
  - Egyszerű kód
  - Kis $n$-re gyors lehet (rendszer függő)
- Quick Sort
  - Oszd meg és uralkodj
  - $\mathcal{O}(n * \log n)$

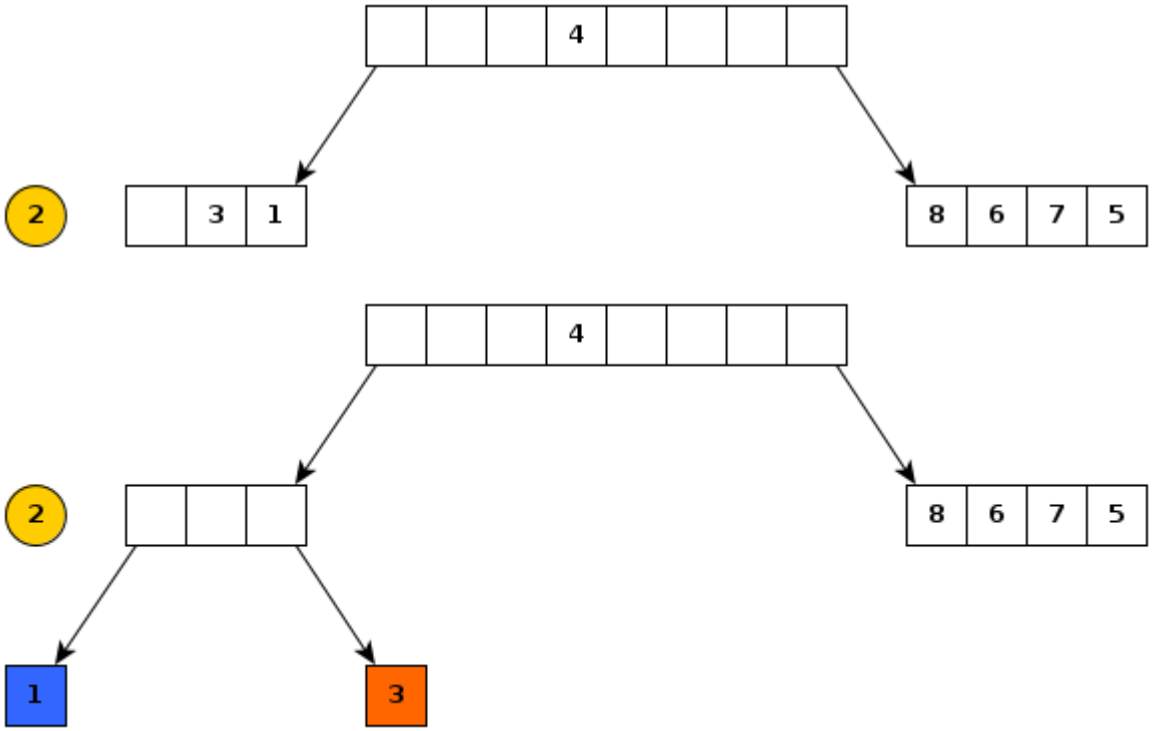
# Quicksort

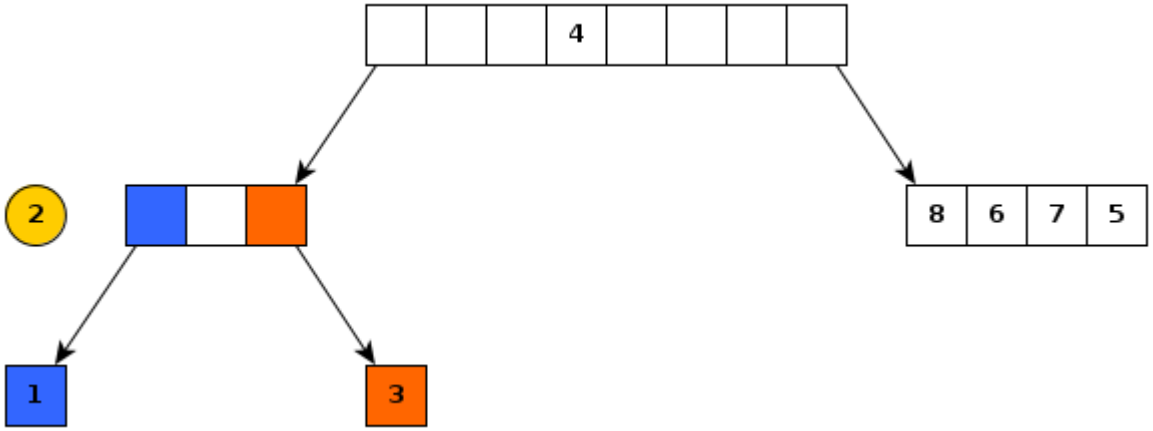
- $\mathcal{O}(n * \log n)$ de ….
- Lehet $\mathcal{O}(n^2)$ is
- A pivot kiválasztásától függ
  - 3-ból a középső
  - Véletlen pivot
  - Jobb eredmény, de nem garantált
  - Népszerű algoritmus!
- Felosztó algoritmus lehet többféle
  - Következő alkalommal részletesen

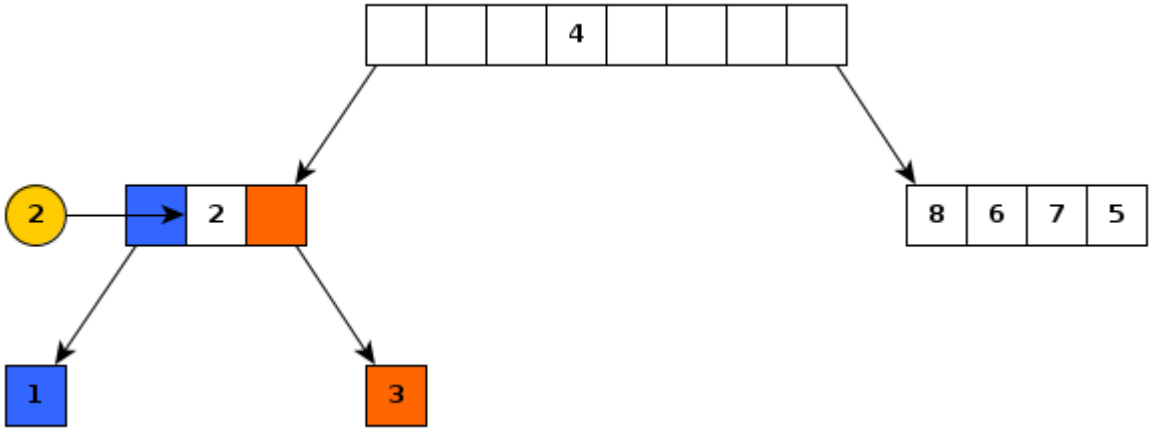
# Nem helyben rendezés

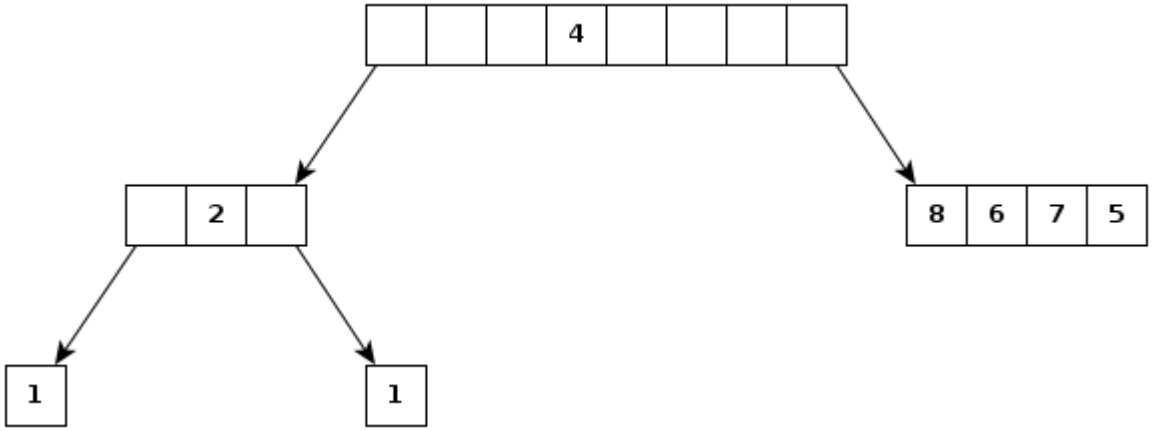

4 2 3 1 8 6 7 5
4 2 3 1 8 6 7 5
4
2 3 1 8 6 7 5
4
2 3 1
8 6 7 5
4
2 3 1
8 6 7 5

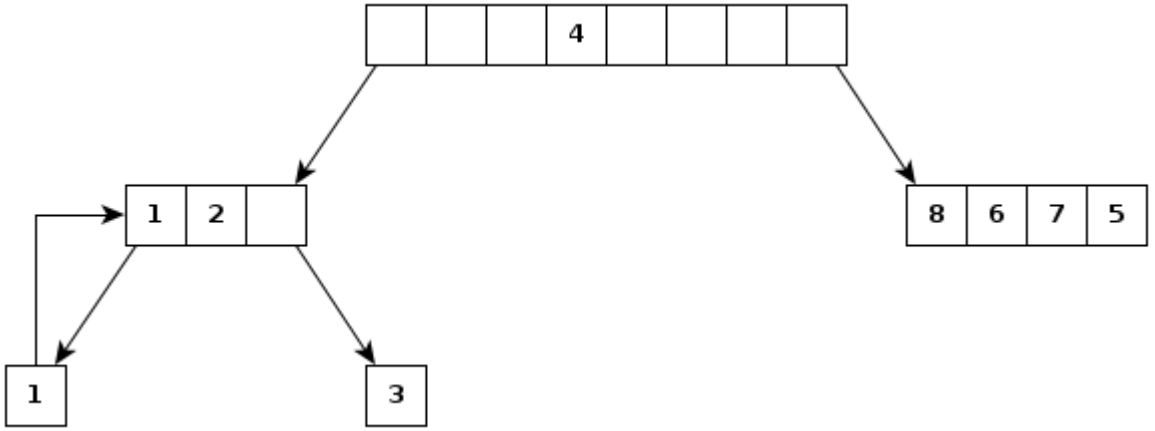

4
4
2
3
1
8
6
7
5
4
2
3
1
8
6
7
5
4
2
3
1
8
6
7
5

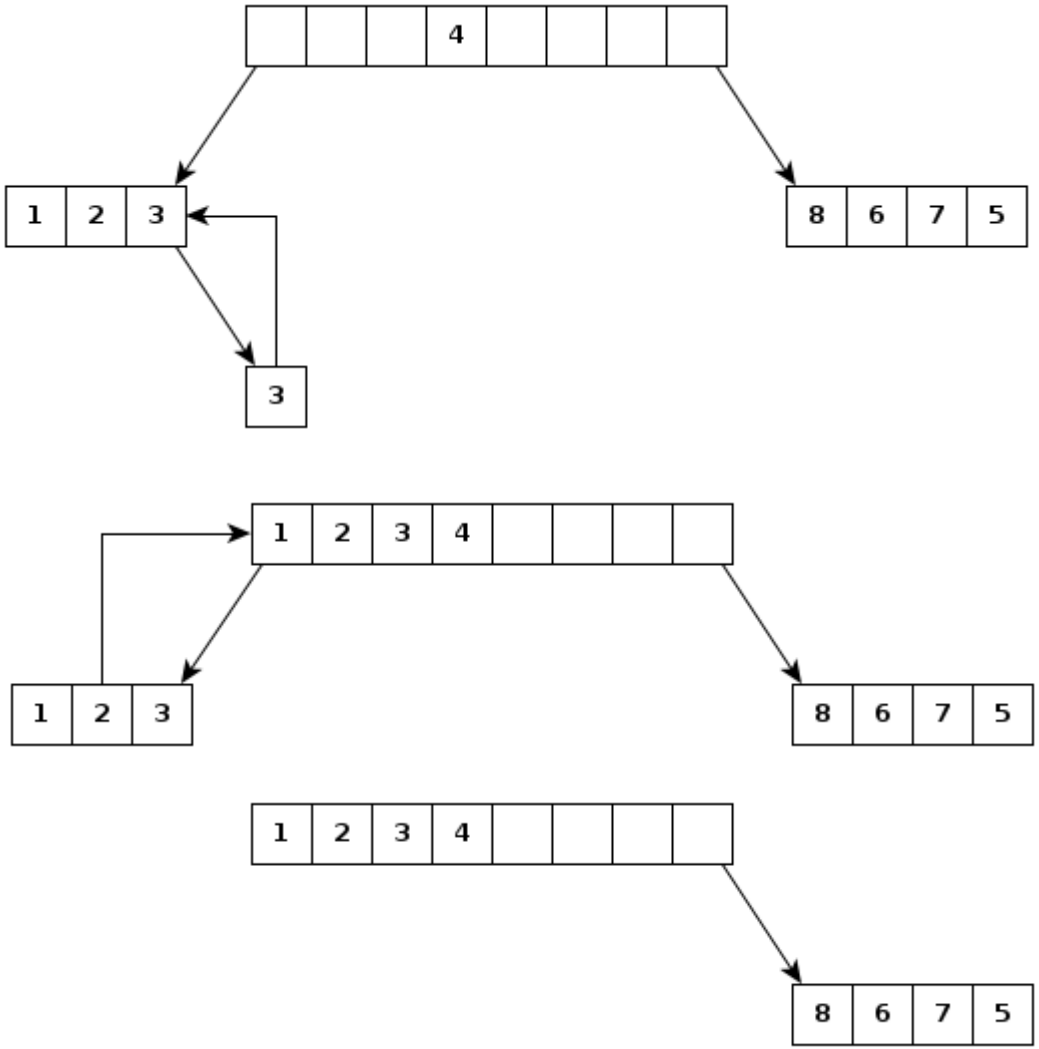

4
2
3
1
8
6
7
5
4
2
8
6
7
5
1
3

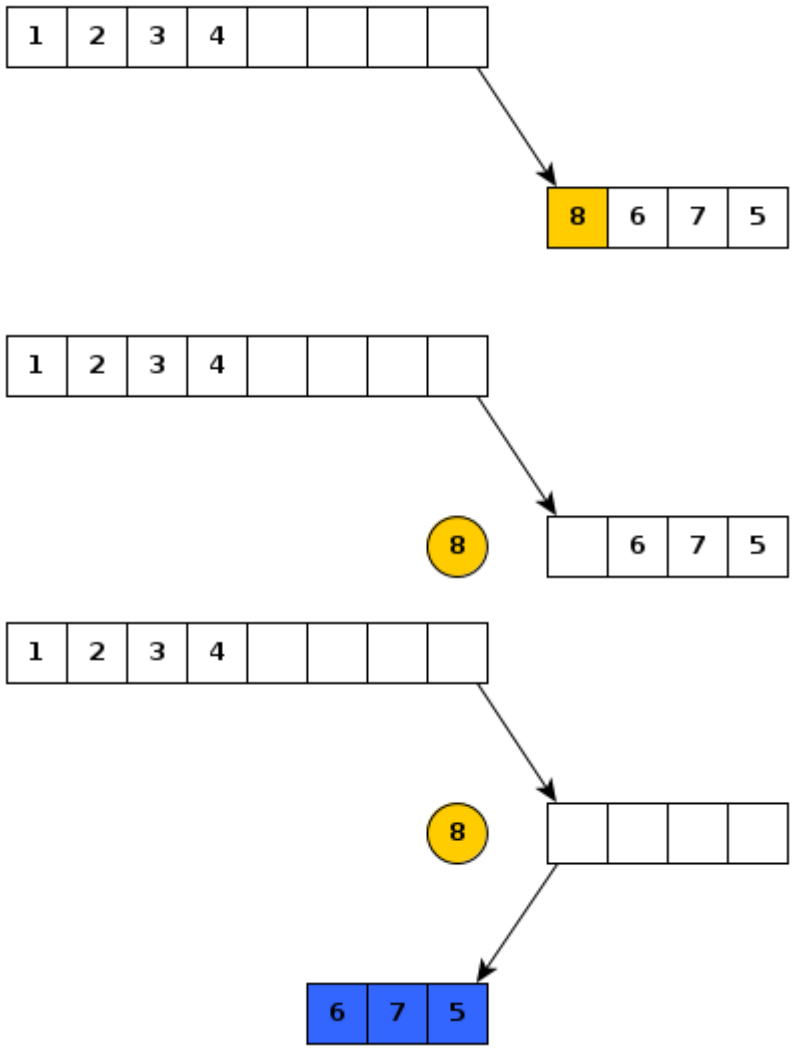

4
2
8
6
7
5
1
3

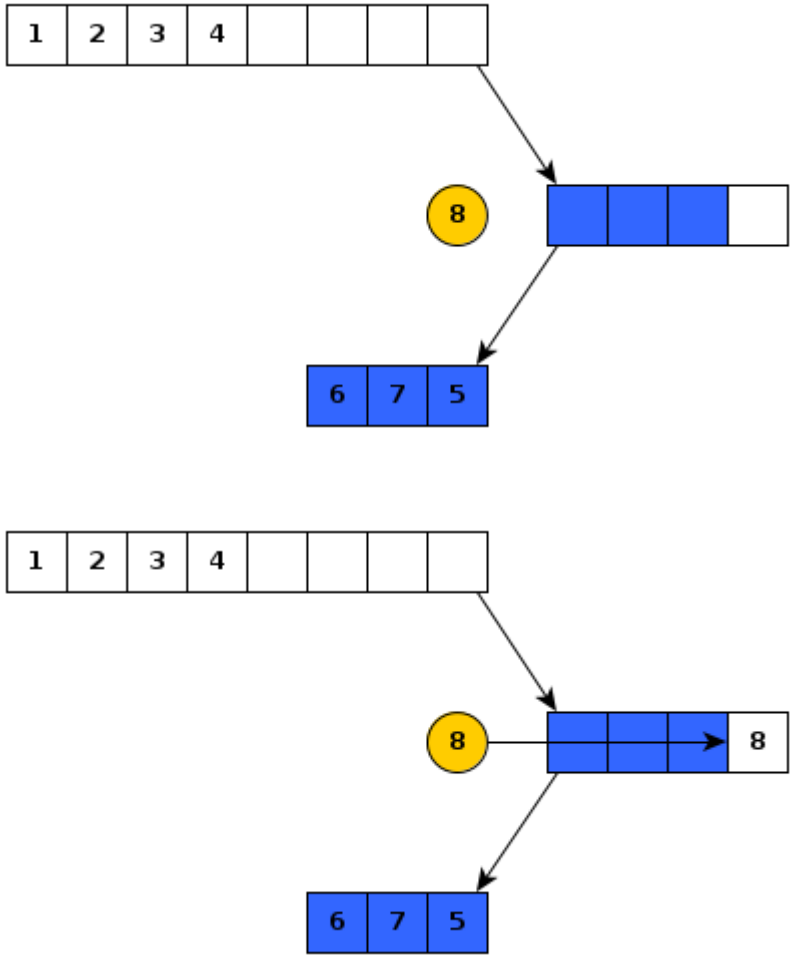

4
2
2
8
6
7
5
1
3

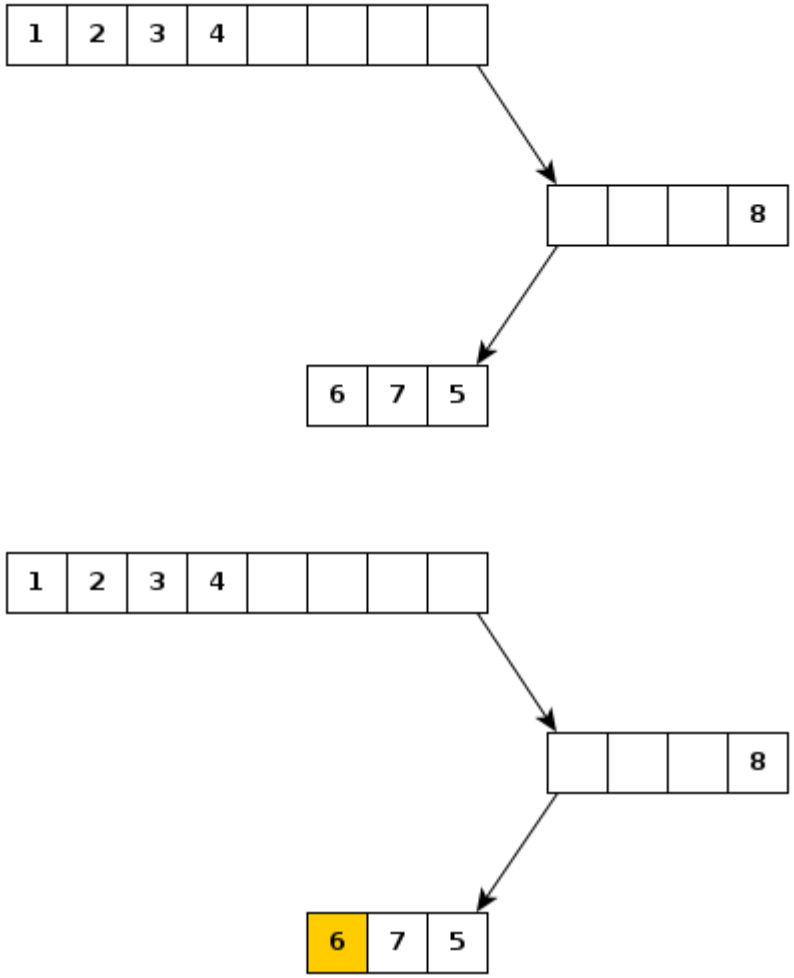

4
2
8
6
7
5
1
1

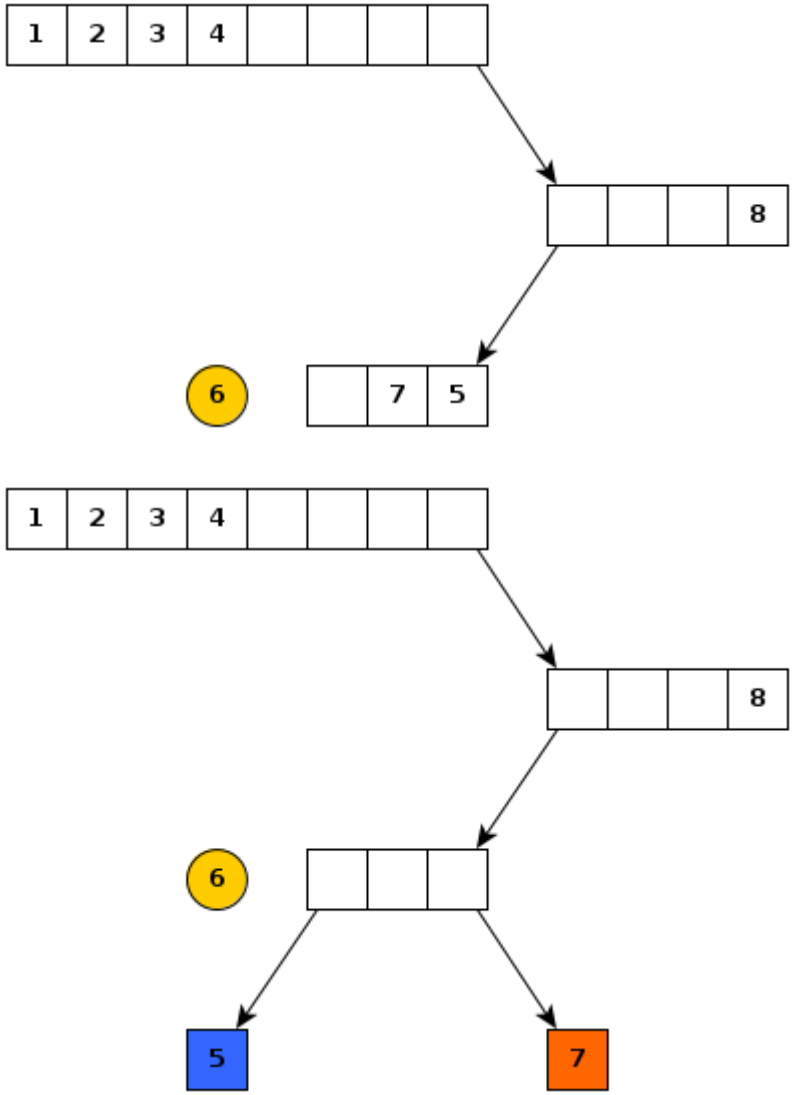

4
1
2
8
6
7
5
1
3

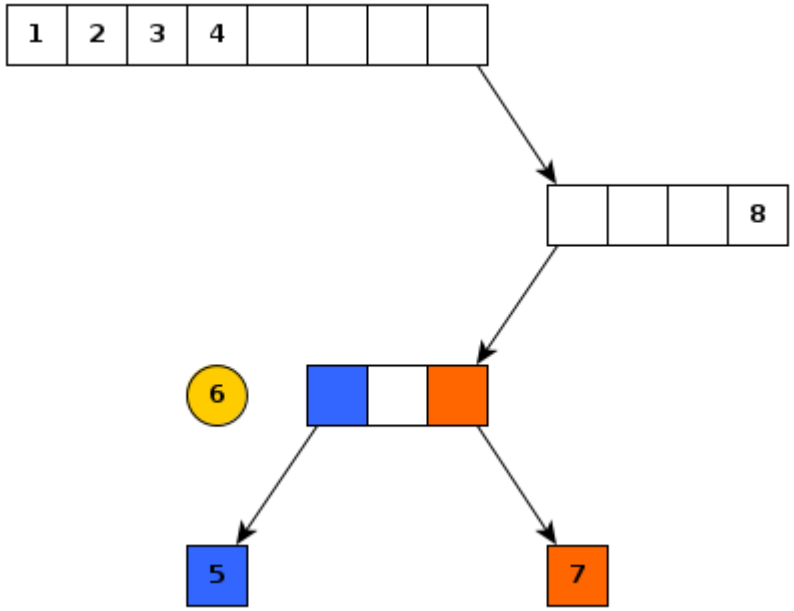

4
1 2 3
8 6 7 5
3
1 2 3 4
1 2 3
8 6 7 5
1 2 3 4
8 6 7 5

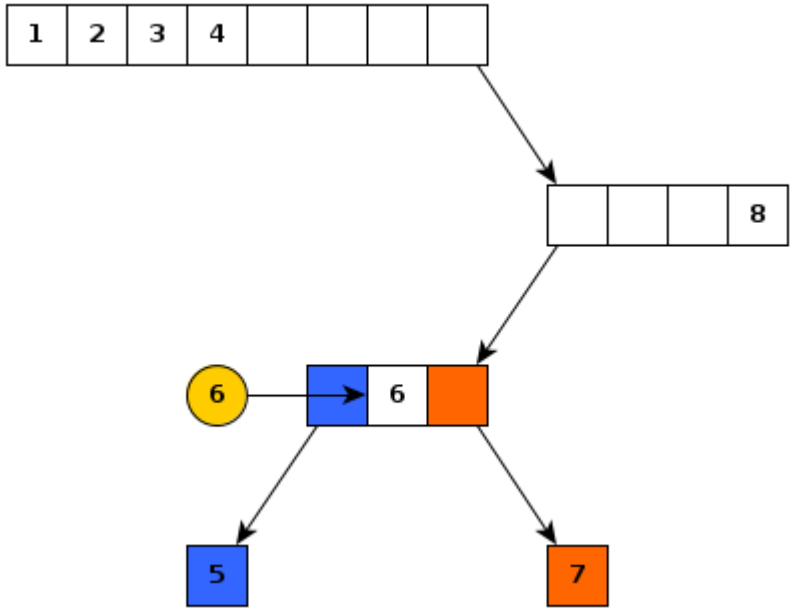

1
2
3
4
8
6
7
5
1
2
3
4
8
6
7
5
1
2
3
4
8
6
7
5

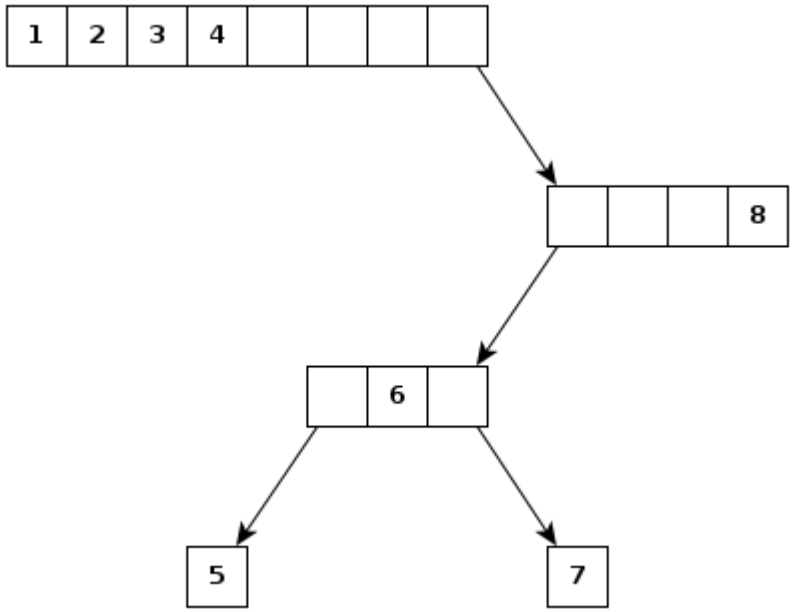

1
2
3
4
8
6
7
5
1
2
3
4
8
8
6
7
5

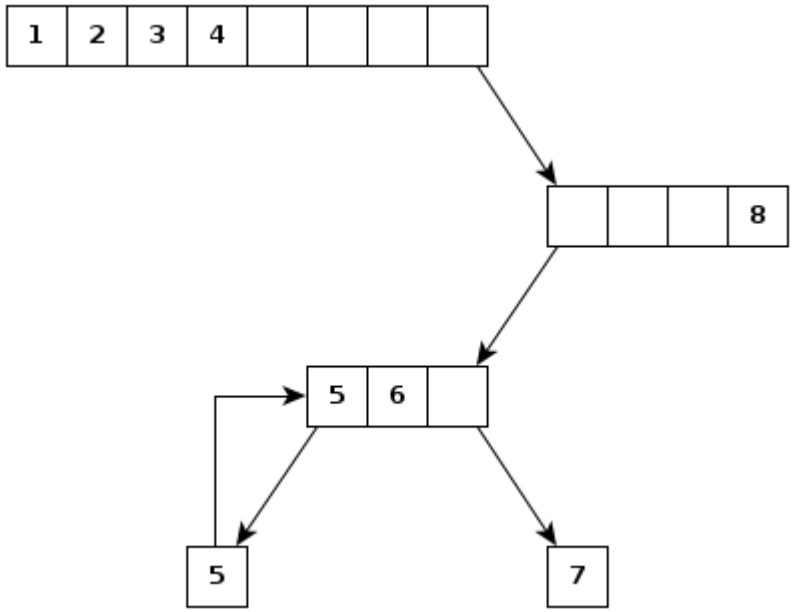

1
2
3
4
8
6
7
5
1
2
3
4
8
6
7
5

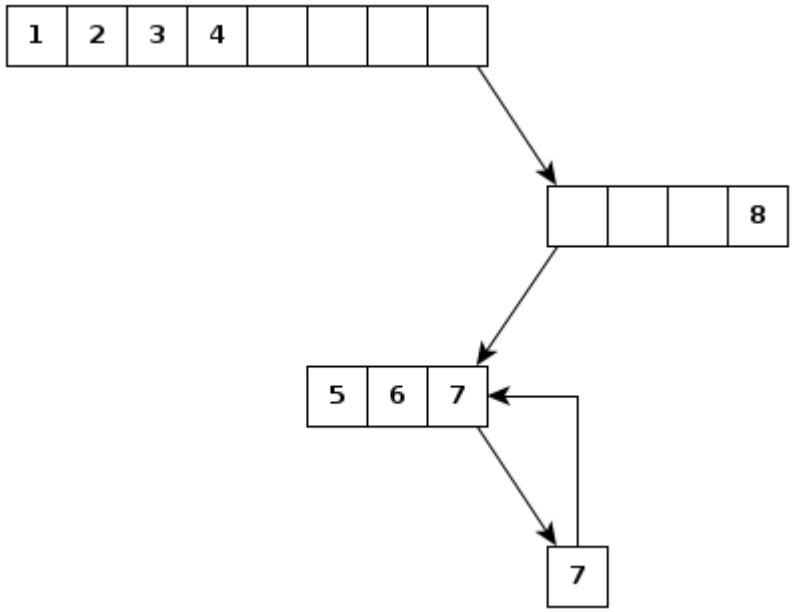

1
2
3
4
8
6
7
5
1
2
3
4
8
6
5
7

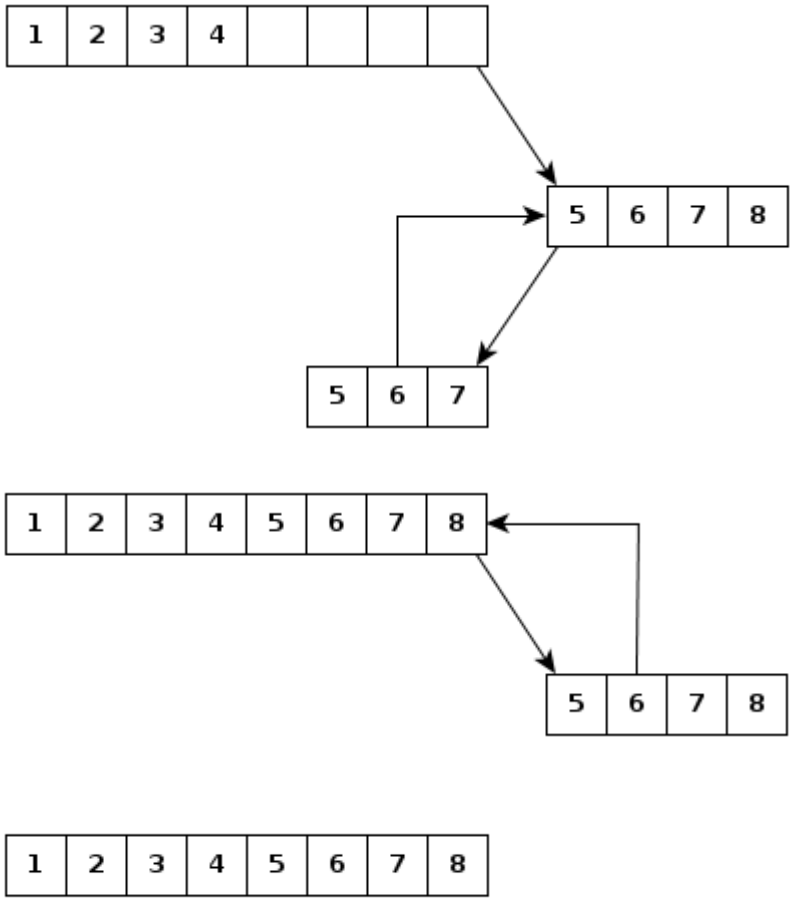

1
2
3
4
8
6
5
7


1
2
3
4
8
6
6
5
7


1
2
3
4
8
6
5
7


1
2
3
4
8
5
6
5
7


1
2
3
4
8
5
6
7
7


1 2 3 4
5 6 7 8
5 6 7
1 2 3 4 5 6 7 8
5 6 7 8
1 2 3 4 5 6 7 8