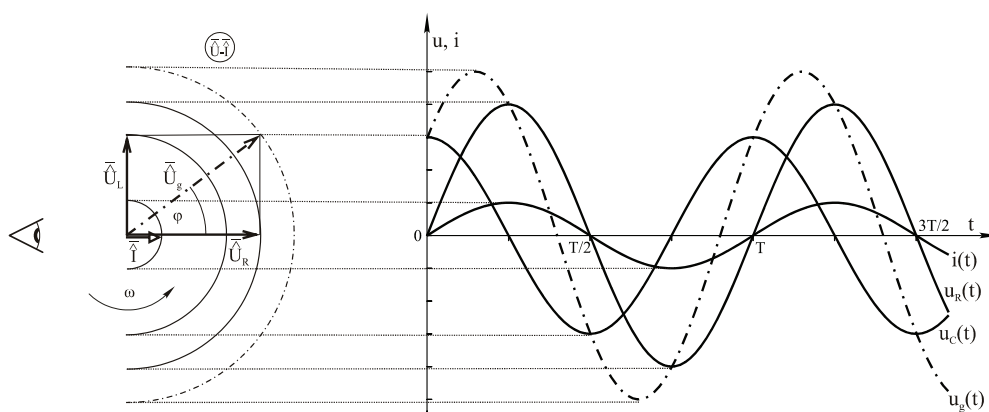


Széchenyi István Egyetem
Műszaki Tudományi Kar
Automatizálási Tanszék

Torda Béla

BEVEZETÉS AZ ELEKTROTECHNIKÁBA

2. VÁLTAKOZÓÁRAMÚ HÁLÓZATOK



KÉZIRAT

*Szüleimnek,
családomnak,
Simonyi Károly professzor úr emlékének*

ELŐSZÓ

Az elektrotechnika rejtelseibe bevezető olvasmány második részét tartja kezében a kedves olvasó. Ez a hálózatszámítás második része, mely az időben változó feszültségek és áramok eseteire tárgyalja a villamos hálózatok működését. Célunk az egyenáramú hálózatok vizsgálata során megismert összefüggések továbbgondolása, általánosítása, újraértelmezése. Módszerünk először az időfüggvények közötti matematikai összefüggések feltárása, majd szinuszos változások esetére a komplex számok alkalmazása. Most fokozottan szükség lesz matematikai ismeretekre, ezért ajánlott a következő fejezetekkel kapcsolatos ismereteik felfrissítésére:

folytonos, egyértékű függvények,
a differenciálás elve és alapszabályai,
az integrálás elve és alapszabályai,
számtani és mértani középérték,
hatványozás és gyökvonás azonosságai,
komplex számok,
a négy alpművelet tulajdonságai a valós és a komplex számok körében,
trigonometrikus függvények,
műveletek síkbeli vektorokkal.

A tárgyalásmód bevezető jellegű, ami azt jelenti, hogy sok helyen csak a továbblépés lehetőségét villantjuk fel, esetleg a továbbgondolás mikéntjét mutatjuk meg. Az önellenőrzést és a szemlélet elmélyítését számpéldák bemutatásával és önállóan megoldandó feladatok megadásával segítjük.

A tantárgy célja a matematikai gondolkodás elmélyítése konkrét elektrotechnikai esetek vizsgálatával, a kapcsolási rajzok, diagramok, képletek sajátos műszaki nyelvezetének elsajátíttatása, a mértékegységekkel való műveletvégzés gyakoroltatása, logikus gondolkodásra ösztönzés.

Ajánljuk mindezt azoknak, akik ismereteiket az elektrotechnika területén a középiskola elvégzése után a felsőoktatásban, a most átalakuló főiskolai szintű képzés keretein belül, nem szakirányban kívánják elmélyíteni.

Köszönetet mondok mindazoknak, akik segítséget nyújtottak. Köszönöm ábrák készítését, gépelést, lektorálást, köszönöm a véleményeket, észrevételeket, tanácsokat. Külön köszönöm mindenkinek, aki a viszonylag nyugodt munkavégzés feltételeit biztosította.

Kívánom minden kedves olvasómnak, hogy elérje célját munkám kézbevitelével. Észrevételeivel, javaslataival, ha vannak, kérem, keressen meg. Jó munkát, jó tanulást!

2005. augusztus

a szerző
torda@sze.hu

16. Változó feszültség és áram jellemzése, jelölése. Ellenállás viselkedése változó áram esetén

Most, az egyenáramú hálózatok vizsgálata után, térjünk át az időben változó áramú hálózatok tárgyalására. Célunk, hogy az eddig megismert összefüggéseket általánosítsuk, és az új feltételek mellett is alkalmazzuk.

Az időben változó feszültségek és áramok jelölésére kisbetűket használunk. Az időfüggvény jelölését vagy használjuk, vagy gyakran el is hagyjuk:

$$u(t)=u, \quad i(t)=i.$$

Nagybetűket továbbra is használunk, de csak konstansok és középértékek jelölésére.

Egy ellenállásra változó feszültséget kapcsolva azon időben változó áram fog folyni. Az ellenállás feszültség- és áram-időfüggvénye között a következő összefüggés teremt kapcsolatot:

$$R = \frac{u(t)}{i(t)}.$$

Ez az összefüggés Ohm törvényének egyenáramú hálózatokban megismert képletére emlékeztet, és két következtetést lehet ennek alapján levonni. Egyrészt kimondhatjuk, hogy Ohm törvénye általánosítható az időben változó feszültség- és áram-időfüggvények pillanatértékeire is. Másrészt az egyenlet csak akkor lehet igaz, ha a feszültség- és az áram-időfüggvény azonos jellegű matematikai függvénye az időnek. A két függvény ugyan nagyságra, sőt mértékegységre is különbözik, de az idő függvényében a változás iránya és meredeksége meg kell, hogy egyezzen.

17. Kondenzátor és tekercs mibenléte, jellemzése

Az időben változó feszültség és áram megjelenésével két új áramköri elem létezését kell megvizsgálnunk. Az egyik a tekercs, a másik a kondenzátor. A tekercs maga körül mágneses teret hoz létre. Jellemzője az önindukciós tényező vagy induktivitás. Az induktivitás jele: L , mértékegysége: henry, mértékegységének jele: H .

$$H = \frac{V \cdot s}{A} \quad \text{szokásos mértékegységek: } H, \text{ mH}, \mu H.$$

Egy tekercs időben változó feszültsége és árama között egy differenciálegyenlet teremt kapcsolatot:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

A kondenzátor villamos teret hoz létre a belsejében. Jellemzője a kapacitás vagy töltéstároló-képesség. A kapacitás jele: C , mértékegysége: farad, mértékegységének jele: F .

$$F = \frac{A \cdot s}{V}$$

A farad nagy mértékegység. A szokásos mértékegységek: μF , nF , pF .

A kevésbé ismert pikofaradra: $1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$.

Egy kondenzátor időben változó feszültsége és árama között is egy differenciálegyenlet teremt kapcsolatot:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}.$$

(Bizonyos esetekben az egyenlet konstansokkal kiegészülhet.)



17.1. ábra

A kondenzátor és a tekercs rajzjele a 17.1. ábrán látható. Amíg az ellenállás viselkedése jól kezelhető, a kondenzátor és a tekercs sok nehézséget vetít előre. A differenciálegyenletek halmozódása ugyanis hamar igen nehezen megoldható helyzetbe hozhat bennünket. Márpedig kapcsolásainkban minden egyes kondenzátor vagy tekercs – együttesen ezeket reaktanciáknak fogjuk nevezni - egy-egy újabb differenciálegyenletet eredményezhet a hálózat számításában.

Vizsgáljuk meg most azt a kérdést, hogy miért csak most kell foglalkoznunk a reaktanciákkal! Miért nem kellett kondenzátor vagy tekercs hatásával számolni egyenáramú hálózatokban? Az egyenáramú hálózatban a feszültség és az áram nem változik, állandó, konstans. Ezt kell a két differenciálegyenletbe beírni, hogy kérdéseinkre választ kapjunk.

Kondenzátor esetében

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} = C \cdot \frac{d\text{konst}}{dt} = C \cdot 0 = 0\text{A}.$$

A kondenzátor egy olyan passzív egyenáramú áramköri elemnek felel meg, amely tetszőleges, véges egyenfeszültség hatására nulla áramot enged át önmagán. Ezt a feltételt a végtelen ellenállás, a szigetelés teljesíti.

Tekercs esetén

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L \cdot \frac{d\text{konst}}{dt} = L \cdot 0 = 0\text{V}.$$

A tekercs pedig egy olyan passzív egyenáramú áramköri elemnek felel meg, amelyen semmilyen tetszőleges, véges egyenáram hatására nem esik feszültség. Ezt a feltételt a nulla ellenállás, a vezeték teljesíti.

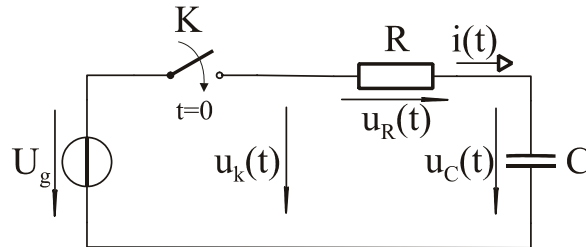
Az egyenáramú hálózatokban tehát minden szigetelés egy-egy kondenzátor és minden vezeték egy-egy tekercs rejtett jelenlétét jelentheti. Ezeknek az elemeknek a tényleges jelenléte azonban csak a feszültségek és áramok megváltozásakor derül ki.

A változó áramú hálózatok tárgyalásának két útját választhatjuk. Először az általános időfüggvényű esetekre foglalkozunk a legegyszerűbb, egyreaktanciás, soros ellenállásos kapcsolásokkal. A gerjesztő változás egyszerű egyenfeszültség-ugrás lesz. Ennek során differenciálegyenleteket oldunk meg. A megoldás nehézkessége miatt erre kevés figyelmet fogunk fordítani. Második részben a periodikus időfüggvényű esetekre, ezen belül is a szinuszos esetekre korlátozzuk vizsgálatainkat. Itt a komplex vektorok alkalmazásával jelentős, a gyakorlat számára is fontos ismeretekre teszünk szert. Ez utóbbi fejezetet a szakirodalom váltakozóáramú hálózatok címen tárgyalja.

18. Be- és kikapcsolási jelenségek soros RC körben

Soros RC elemek egyenfeszültségre kapcsolása

Tekintsük a 18.1. ábrán látható kapcsolást!



18.1. ábra

Az ellenállás és kondenzátor soros kapcsolását a K kapcsolóval $t = 0$ pillanatban U_g egyenfeszültségű generátorra kapcsoljuk. Az u_k feszültségben egy U_g nagyságú ugrás jön létre. Ez az a változás, amely az ellenállás feszültségében, a kondenzátor feszültségében és a kör áramában változásokat okoz! Írjuk fel a huroktörvényt az áramkörre!

$$u_k = u_R + u_C$$

Vizsgáljuk azt az általános esetet, amikor a bekapcsolás előtt a passzív elemeink energia- és feszültségmentesek.

$$t < 0 \text{ esetén } u_k(t) = 0, u_R(t) = 0, u_C(t) = 0.$$

A kapcsoló zárásával az u_k kapocsfeszültség felveszi a generátorfeszültség értékét, tehát:

$$t \geq 0 \text{ esetén } U_g = u_k(t) = u_R(t) + u_C(t).$$

Használjuk fel az ellenállásra megismert összefüggést.

$$u_R(t) = R \cdot i(t) \text{ ebből}$$

$$U_g = R \cdot i(t) + u_C(t)$$

A közös áram szerepel a kondenzátor egyenletében is.

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}, \text{ ebből} \quad (1)$$

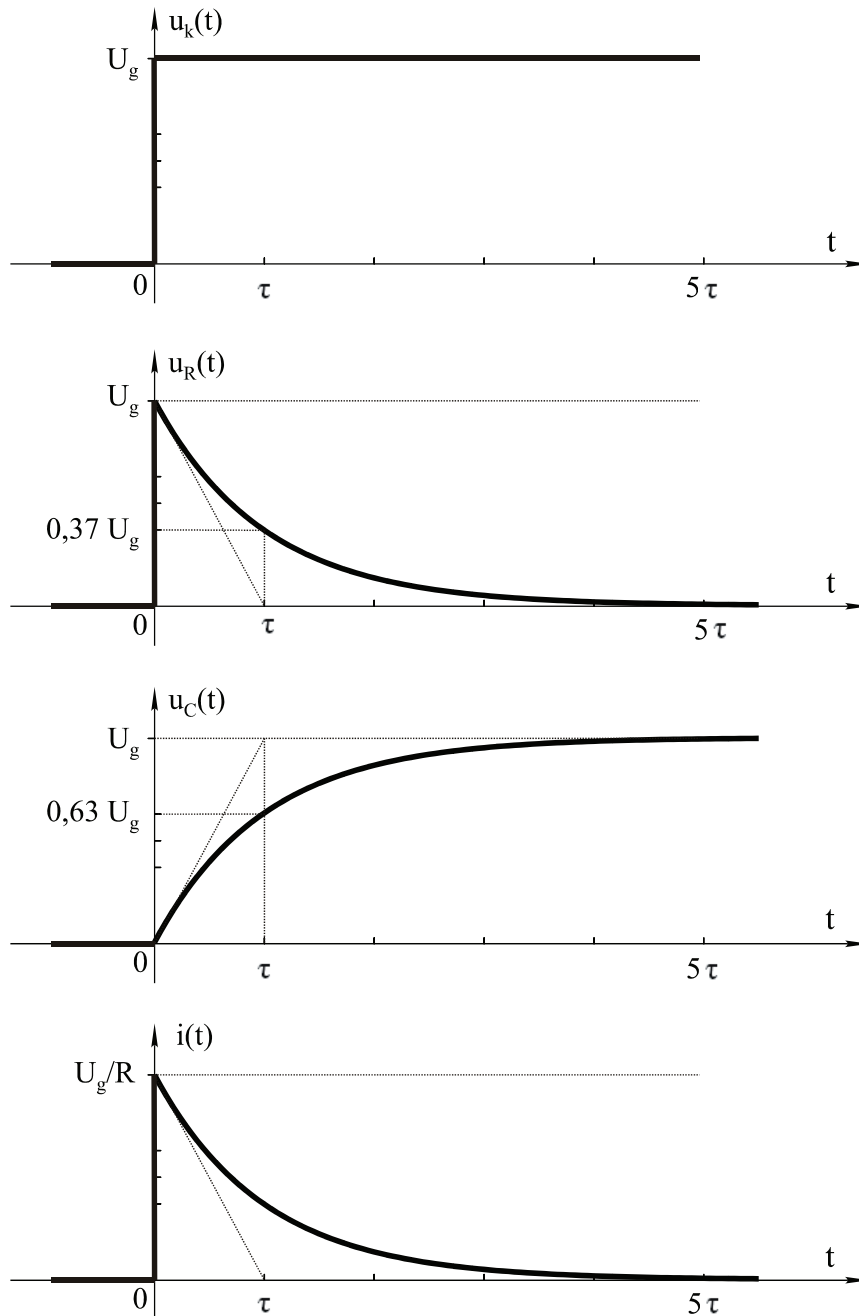
$$U_g = R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

Egy inhomogén differenciálegyenletet kaptunk, melyben a kondenzátor feszültségének időfüggvénye az egyetlen ismeretlen. A differenciálegyenlet megoldása függvénykeresés. Keressük a kondenzátor feszültségének azon időfüggvényét, amely kielégíti a differenciálegyenletet. Az ilyen típusú differenciálegyenlet megoldása az e^x exponenciális függvény valamely alkalmas transzformáltja.

A kondenzátor (1) differenciálegyenletéből még egy hasznos következtetést vonhatunk le. Ha a kondenzátor feszültségében ugrás van, akkor abban a pillanatban a feszültség deriváltja és ezzel az árama végtelen értéket vesz fel, ami gyakorlatilag lehetetlen. A kondenzátor feszültsége tehát a bekapcsolás pillanatában meg kell, hogy tartsa a bekapcsolás előtti nulla értékét. Az ezt a feltételt is teljesítő, a differenciálegyenletet kielégítő megoldás:

$$u_C(t) = U_g \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad 0 \leq t < \infty$$

Az időfüggvényt a 18.2. ábrán tekinthetjük meg. A kondenzátor feszültsége bekapcsoláskor nulláról indulva aszimptotikusan közelíti U_g értékét.



18.2. ábra

Az exponenciális függvény kitevőjében a független változó, az idő, fizikai mennyiség, tehát van mértékegysége. A kitevő nevezőjében szereplő konstans szintén idő mértékegységű mennyiség, így a teljes kitevő mértékegység nélküli, és akár egészként, akár törtként a matematika szabályai szerint értelmezhető. Az áramkör további időfüggvényei:

$$u_R(t) = U_g \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad 0 \leq t < \infty$$

$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{U_g}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad 0 \leq t < \infty$$

A huroktörvény teljesül:

$$u_R(t) + u_C(t) = U_g \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + U_g \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U_g \cdot (e^{-\frac{t}{\tau}} + 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U_g \quad 0 \leq t < \infty.$$

Az időállandó

A kitevőben szereplő konstans értékének változtatása vízszintes nyújtást vagy zsugorítást eredményez. A neve: időállandó, jele: τ . Szerkesztéssel a bekapcsolás pillanatában az időfüggvényhez húzott érintővel az érintési pontja és a végtelenbeli vízszintes érintő metszéspontja közötti vízszintes távolságként kaphatjuk meg. Algebrai kifejezését a differenciálegyenletben a deriváltfüggvény szorzójaként szereplő kifejezésként találjuk meg. Soros RC kapcsolás időállandója:

$$\tau = R \cdot C$$

Ellenőrizzük a mértékegységeket:

$$[R] \cdot [C] = \frac{V}{A} \cdot \frac{A \cdot s}{V} = s = [\tau] = [t].$$

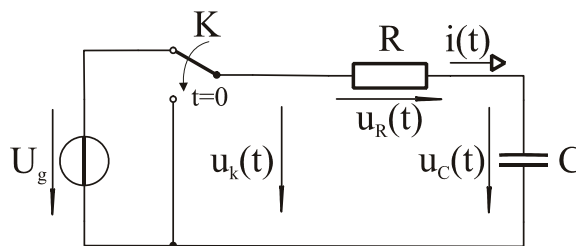
Figyeljük meg gondosan a 18.2. ábra négy, azonos léptékben egymás alá rajzolt időfüggvényét! Bármely pillanatban húzott függőleges rendező négy olyan pillanatértéket jelöl ki, melyek között a huroktörvény ellenőrizhető.

Az exponenciális függvények elméletileg csak a végtelenben érik el vízszintes érintőjüket. De mennyi idő alatt zajlik le a bekapcsolás gyakorlatilag? Ezt ahhoz az időponthoz kötjük, amelynél a görbék az U_g feszültségnek az 1%-ánál kisebb hibával megközelítik a végső értéküket. Keressük a

következő egyenlet megoldását: $0,01 = e^{-\frac{t}{\tau}}$. A megoldás: $t = 4,6 \cdot \tau$. A műszaki gyakorlatban a leegyszerűsített szabály: 5τ idő alatt a tranziens folyamat lezajlik, és állandósult állapot jön létre.

Állandósult állapot

Soros RC kapcsolásunkban ez az állandósult állapot azt jelenti, hogy az ellenálláson elhanyagolhatóan kis feszültség esik, és a kondenzátor magára veszi gyakorlatilag a teljes U_g feszültséget, ami megfelel az egyenáramú állapotnak.



18.3. ábra

Soros RC elemek kikapcsolása

Ha a feltöltött kondenzátort a soros ellenállással $t = 0$ pillanatban rövidre zárjuk (18.3. ábra), egy kikapcsolási tranziens folyamat játszódik le. A feltöltött kondenzátor a kikapcsolás pillanatában az ellenállásra az előzővel ellentétes irányú, U_g nagyságú feszültségugrást kényszerít rá. A megoldást most egy homogén differenciálegyenlet adja.

A végeredmények ($0 \leq t < \infty$):

$$u_R(t) = -U_g \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(t) = U_g \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t) = -\frac{U_g}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

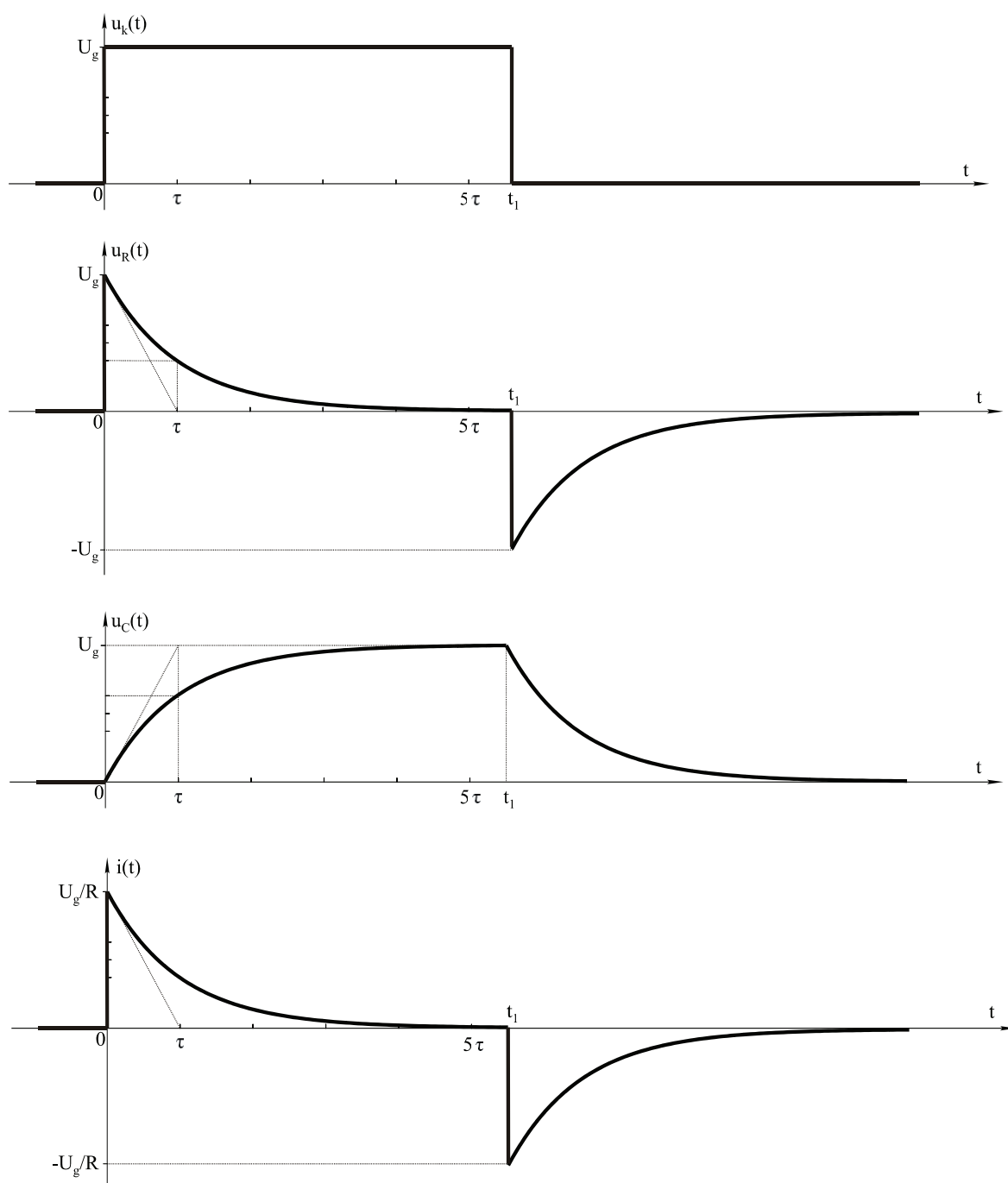
A huroktörvény szerint:

$$u_R(t) + u_C(t) = -U_g \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + U_g \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

Az időállandó most is:

$$\tau = R \cdot C.$$

Ha az ellenállás és kondenzátor soros kapcsolását $t = 0$ pillanatban U_g egyenfeszültségű generátorra kapcsoljuk, majd az állandósult állapot jó megközelítését, legalább 5τ időt kivárva t_1 pillanatban kikapcsoljuk, a 18.4. ábra szerinti folyamatok játszódnak le.

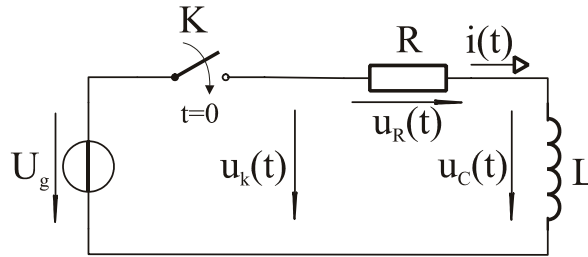


18.4. ábra

19. Be- és kikapcsolási jelenségek soros RL körben

Soros RL elemek egyenfeszültségre kapcsolása

Tekintsük a 19.1. ábrán látható kapcsolást!



19.1. ábra

Most az ellenállás és a tekercs soros kapcsolását csatlakoztatjuk a K kapcsolóval $t = 0$ pillanatban U_g egyenfeszültségű generátorra. A kapcsoló zárása előtt, $t < 0$ esetén, minden elemet feszültség-, áram- illetve energiamentesnek tekintünk, a három feszültség és az áram nulla. A kapcsoló zárása után U_g egyenfeszültség jut a kapcsolásra. A hurokegyenlet:

$$u_k(t) = u_R(t) + u_L(t)$$

A kapcsoló zárása után:

$$U_g = u_R(t) + u_L(t) \quad 0 \leq t < \infty$$

Felhasználva az ellenállás feszültsége és árama közötti kapcsolatot:

$$U_g = R \cdot i(t) + u_L(t)$$

A tekercs differenciálegyenlete alapján:

$$U_g = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Az ellenállás értékével osztva:

$$\frac{U_g}{R} = i(t) + \frac{L}{R} \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Az RC kapcsoláshoz nagyon hasonló differenciálegyenletet kapunk. A megoldás is hasonló:

$$i(t) = \frac{U_g}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad 0 \leq t < \infty$$

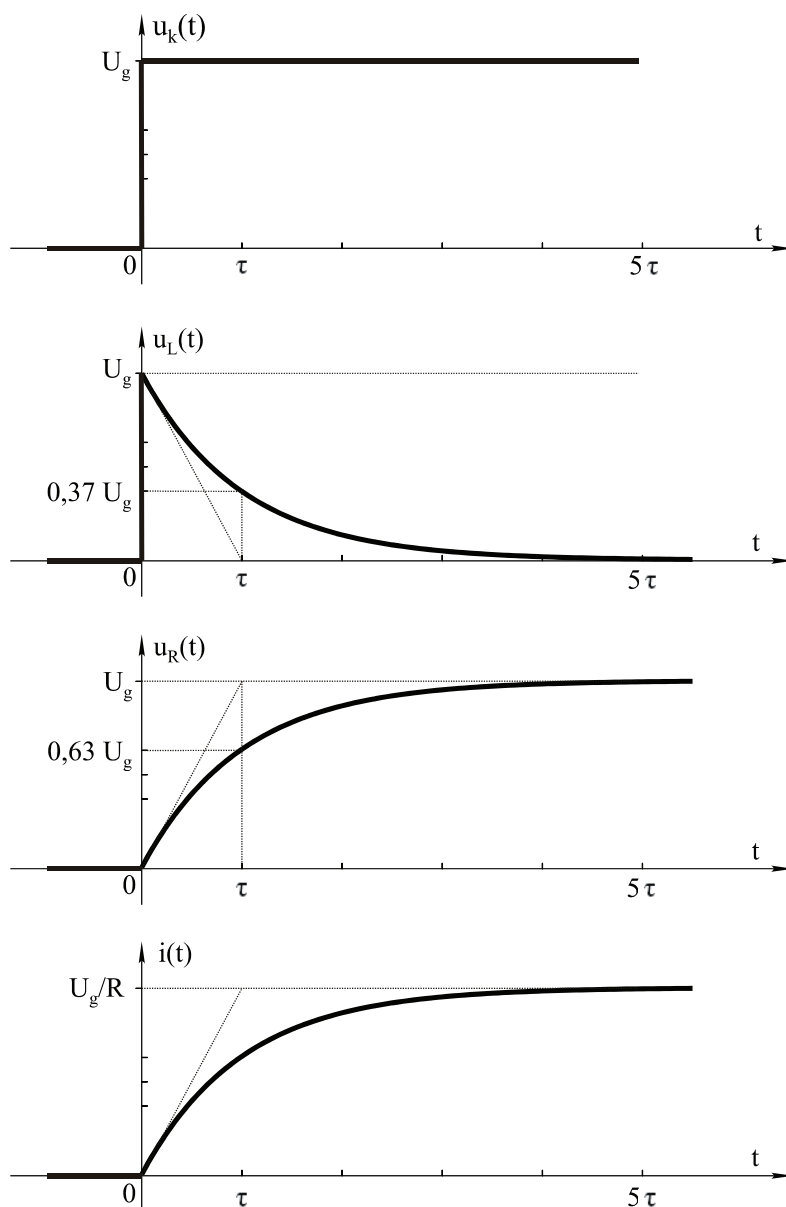
A további időfüggvények:

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = U_g \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$u_R(t) = U_g \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad 0 \leq t < \infty$$

$$u_L(t) = U_g \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad 0 \leq t < \infty$$

Az időfüggvényeket a RC kapcsoláshoz hasonlóan, egymás alatt a 19.2. ábrán szemlélhetjük.



19.2. ábra

Az időállandó:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

A mértékegységekkel ellenőrizve:

$$\frac{[L]}{[R]} = \frac{\frac{V \cdot s}{A}}{\frac{V}{A}} = s = [\tau] = [t]$$

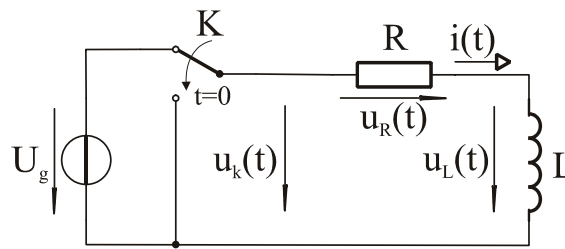
Az időfüggvények megrajzolásánál τ helye ugyanaz, mint RC kapcsolás esetében.

Tulajdonképpen az ellenállás és a reaktáns elem feszültségét cseréltük fel. Az áram pedig mindig az ellenállás feszültségének időfüggvényéhez kötődik.

A tekercs differenciálegyenletéből itt kikövetkeztethető, hogy a tekercsnél annak áramában nem lehet ugrás. (Megjegyzés: ez a magyarázata annak a gyakorlatban tapasztalt jelenségnek, hogy a nagyobb tekercset tartalmazó kapcsolások kikapcsolásakor erős szikrázás tapasztalható, ami a kapcsoló élettartamát csökkenti.)

Soros RL elemek kikapcsolása

Az előző, bekapcsolási esetet követheti a kikapcsolás a 19.3. ábra szerinti kapcsolásban.



19.3. ábra

A kikapcsolás a K kapcsolónak a felső állásból az alsó állásba elvileg nulla idő alatt történő átváltásával valósul meg. A gyors, gyakran elektronikus átváltás lehetővé teszi, hogy az áram változatlan maradjon. A kapocsfeszültségben a kapcsoló átváltásakor most a generátorfeszültségből nullába való ugrás következik be. A differenciálegyenlet is egyszerűbb:

$$u_K(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Az átkapcsolás, $t=0$ után:

$$0 = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad 0 \leq t < \infty$$

$$0 = i(t) + \frac{L}{R} \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad 0 \leq t < \infty$$

Ez egy homogén differenciálegyenlet, mely átrendezve így alakul:

$$i(t) = \frac{L}{R} \cdot \frac{di(t)}{dt},$$

és azt a kérdést veti fel számunkra, hogy (a konstansoktól eltekintve) melyik az a függvény, amelynek a deriváltja önmaga. Erre a matematikában a közismert megoldás a természetes alapú exponenciális függvény.

$$y = e^x$$

A mi esetünkben a megoldás, a következő:

$$i(t) = \frac{U_g}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A tekercs lassan elveszti áramát, árammentessé válik. Az időfüggvény kiinduló értékét a bekapcsolás utáni, állandósult állapotból "megörököltük". Ez indokolja, hogy bár a kikapcsolás után nem marad U_g forrásfeszültségű generátor az áramkörünkben, annak értéke az áram időfüggvényében mégis szerepel. Az időállandó változatlan.

$$\tau = \frac{L}{R}$$

A feszültségek:

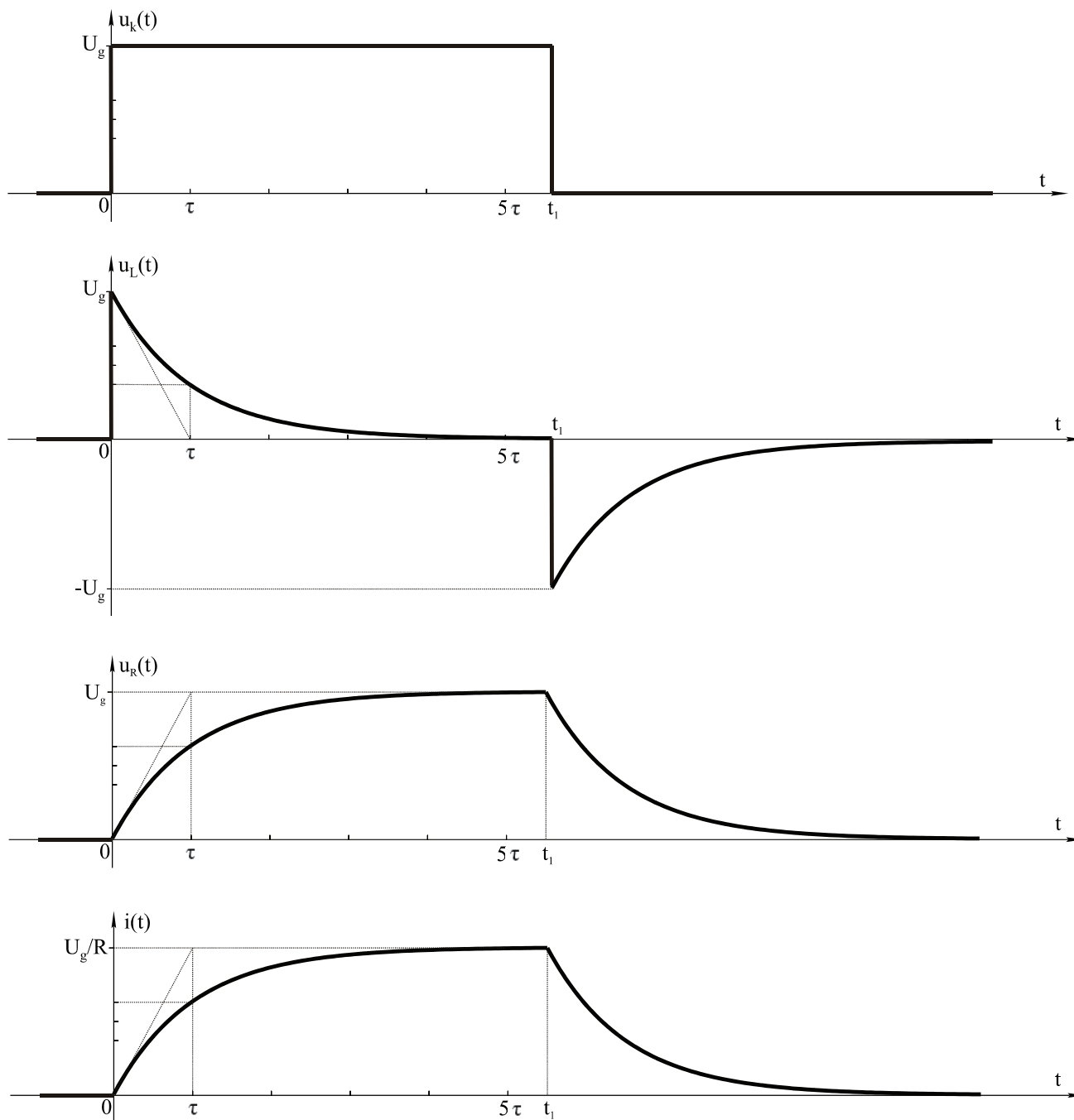
$$u_R(t) = R \cdot i(t) = U_g \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L(t) = U_g \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L(t) = -u_R(t) = -U_g \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L(t) = -U_g \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A kikapcsolási tranziens (átmeneti) folyamat is gyakorlatilag 5τ idő alatt lezajlottnak tekinthető. Utána az elemek feszültség- és árammentesek lesznek. Egy bekapcsolási, majd annak gyakorlatilag teljes lezajlása után, t_l pillanattól a kikapcsolási átmeneti folyamat időfüggvényeit a 19.4. ábrán szemlélhetjük.



19.4. ábra

Soros RL és RC elemek egyenfeszültségre kapcsolása esetén a feszültségek és az áram keresése a differenciálegyenlet egyértelmű megoldásával exponenciális időfüggvényeket eredményezett. Összetettebb kapcsolás vagy gerjesztő időfüggvény összetettebb megoldást eredményez. Például egy ellenállás-tekercs-kondenzátor kapcsolás saját frekvenciával rendelkezik, és csillapodó lengéseket eredményezhet. Az általános hálózat és időfüggvény tárgyalása elvileg is nehézkes, bonyolult feladat. Jól kezelhetővé problémáink akkor válnak, ha vizsgálatainkat periodikus időfüggvényekre korlátozzuk.

20. Váltakozóáramú hálózatok. Periodikus időfüggvény matematikai jellemzése. A periódusidő. Fourier tétele. Szinuszos feszültség- illetve áram-időfüggvény jellemzése az időtartományban. Frekvencia és körfrekvencia

Periodikus időfüggvény matematikai jellemzése

Az általános időfüggvények két csoportba sorolhatók, a véletlenszerű vagy sztochasztikus és a determinisztikus időfüggvények csoportjába. A determinisztikus időfüggvények lehetnek nem periodikusak vagy periodikusak. A periodikus időfüggvény eleget tesz a következő egyenletnek:

$$f(t) = f(t + T) \quad -\infty < t < +\infty$$

Szavakkal: bármely t időpontban választott függvényérték megegyezik a T idővel későbbi (vagy korábbi) függvényértékkel. Másképp megfogalmazva ez azt is jelenti, hogy ha egy T szélességű „ablakon” keresztül vizsgáljuk a függvényünket, akkor pontosan ugyanazt látjuk, mintha az ablakot T -vel egyszer vagy többször, balra vagy jobbra eltoljuk. Egy megtalált T érték mellett annak kétszerese, háromszorosa, négyszerese stb. is természetesen kielégíti a feltételül szabott egyenletet. Nekünk a legkisebb T értékre van szükségünk.

Definíció: T a függvény periódusideje, ha nem létezik annál kisebb $0 < T_0 < T$ érték, amely a feltételi egyenletet szintén kielégíti.

(Megjegyzés: Itt fizikai mennyiségeknek az idő $[-\infty, +\infty]$ teljes intervallumán értelmezett folytonos, egyértékű függvényeivel foglalkozunk. Vegyük észre, hogy semmi más kikötést nem teszünk a vizsgált függvényre, mint azt, hogy T periódusidőnként ismétlődjön. A periódusidő a periodikus függvény egyetlen jellemzője.)

A periódusidő reciproka a frekvencia.

$$f = \frac{1}{T}$$

A frekvencia a másodpercenkénti periódusok száma. A frekvencia mértékegysége a hertz, jele: Hz.

$$1\text{Hz} = \frac{1}{s}$$

1 Hz a periodikus függvény frekvenciája, ha egy másodperc alatt egyetlen periódus zajlik le. A gyakorlatban általában lényegesen nagyobb frekvenciájú jelenségekkel találkozunk. Szokásos mértékegységek: Hz, kHz, MHz, GHz (GHz: ejtsd „gigahertz”).

$$1\text{GHz} = 10^9 \text{ Hz}$$

Szinuszos időfüggvény matematikai jellemzése

A periodikus időfüggvények egy speciális esete a szinuszos vagy harmonikus időfüggvény:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Ahol t a független változó, az idő, u a függő változó, most éppen a feszültség, továbbá

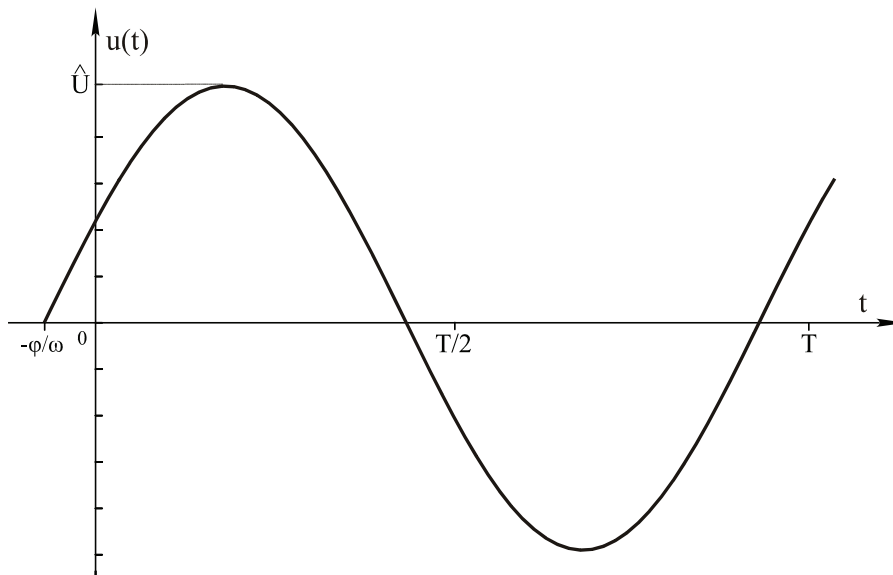
$\hat{U}$ a csúcserő vagy amplitúdó,
 ω a körfrekvencia vagy szögsebesség és
 φ a fáziseltolás vagy kezdőfázis.

A körfrekvencia az egy másodperc alatti szögelfordulást adja meg radiánban. A szögelfordulás lehet tényleges és lehet, mint esetünkben is, elképzelt.

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}}$$

A körfrekvencia mértékegységében szereplő radián egy pusztán viszonyszám. A mértékegységek közötti műveletek során elhagyható, de a körfrekvencia mértékegységében szerepeltetni kell. Az amplitúdó az a szélső érték, amelyet pozitív és negatív előjellel a függvény még éppen felvesz.



20.1. ábra

Egy általános szinuszos feszültség-időfüggvényt láthatunk a 20.1. ábrán.

Fourier tétele

Tétel: Minden periodikus időfüggvény felbontható szinuszos összetevőkre.

Az összetevők:

- egyenkomponens,
- alapharmonikus,
- felharmonikusok.

Az egyenkomponens segítségével megadhatjuk, hogy a függvény az alaphelyzethez, vagy egy azzal azonos másik függvényhez képest függőleges irányban mennyire van eltolva. Az egyenkomponenst itt a koszinuszfüggvény végtelen periódusidejű határesetének tekinthetjük.

Az alapharmonikus a periodikus időfüggvény periódusidejével kifejezve

$$f = \frac{1}{T} \text{ frekvenciájú szinuszos jel.}$$

Az alapharmonikus a felbontandó periodikus függvényhez igazodó kezdőfázissal és amplitúdóval, a periódusidőnyi szélességű ablakban egyetlen teljes periódust ír le.

A felharmonikusok a periodikus függvénynek olyan, különböző amplitúdójú és kezdőfázisú (szinuszos) összetevői, amelyeknek frekvenciája rendre

$$f = k \cdot \frac{1}{T}, \text{ ahol } k=2, 3, 4, 5, 6 \dots$$

(Megjegyzés: „alharmonikus” nincs! A $k=1$ értékhez pedig az alapharmonikus tartozik.)

A váltakozóáramú hálózat linearitásáról

Az egyenáramú hálózatok tárgyalása során megtudtuk, hogy lineáris hálózatban alkalmazható a szuperpozíció elve. A csak ohmos ellenállást tartalmazó váltakozóáramú hálózat természetesen szintén ugyanúgy lineárisnak tekinthető. De vajon érvényes-e a kondenzátorra, hogy rajta kétszer, háromszor négyszer nagyobb feszültség hatására kétszer, háromszor, négyszer nagyobb áram folyik? Ha az

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

differenciálegyenletbe a feszültség-időfüggvény konstansszorosát írjuk, akkor a differenciálás szabályai szerint a konstans kiemelve az áram-időfüggvény konstansszorosát kapjuk.

$$C \cdot \frac{dkonst \cdot u(t)}{dt} = konst \cdot C \cdot \frac{du(t)}{dt} = konst \cdot i(t)$$

Tehát a kondenzátor – és ugyanilyen gondolatmenettel belátható, hogy a tekercs is – lineáris elem. Ebből következik, hogy a csak ohmos ellenállást, kondenzátort és tekercset tartalmazó váltakozóáramú hálózat lineáris hálózat, tehát alkalmazható és érvényes rá a szuperpozíció tétele. (Megjegyzés: a hálózat linearitása tetszőlegesen változó áramú hálózat esetén is igaz, de ez most számunkra kevésbé fontos.)

Fourier tételének és a hálózat linearitásának következménye

Egy tetszőleges, periodikus időfüggvényű feszültséggenerátor felfogható Fourier tételét figyelembe véve, szinuszos feszültséggenerátorok soros kapcsolásának. Egy tetszőleges, periodikus időfüggvényű áramgenerátor pedig hasonló megfontolások alapján felfogható szinuszos áramgenerátorok párhuzamos kapcsolásának. Ha a szuperpozíció elvét alkalmazzuk, akkor elegendő minden szinuszos generátorral külön-külön foglalkozni.

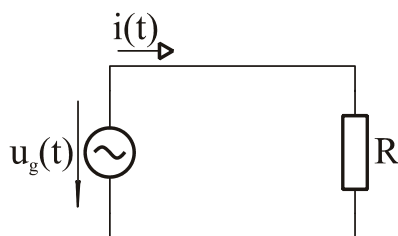
Ez a gondolatmenet igen nagy elvi jelentőséggel bír. Nemcsak az általános periodikus időfüggvényű egyes gyakorlati esetek számítását befolyásolja, hanem meghatározó jelentőségű a váltakozóáramú hálózatok elméletét tárgyaló fejezet elvi felépítésében is. Végkövetkeztetésként ugyanis kijelentjük, hogy elegendő csak szinuszos áramú hálózatokkal foglalkoznunk, mindaddig, amíg R , L és C passzív elemeket használunk. Ez lényegesen egyszerűbb matematikai tárgyalást tesz majd lehetővé.

Következzen tehát a megismert három elem és az ezekkel felépített hálózatok vizsgálata szinuszos feszültségű vagy áramú generátorok mellett.

21. Ellenállás, tekercs és kondenzátor viselkedése váltakozóáramú körben. Frekvenciafüggés

Ellenállás viselkedése szinuszos feszültség hatására

Kapcsoljunk egy ellenállásra szinuszos feszültséggenerátort (21.1 ábra)!



21.1. ábra

Legyen a generátor feszültségének időfüggvénye

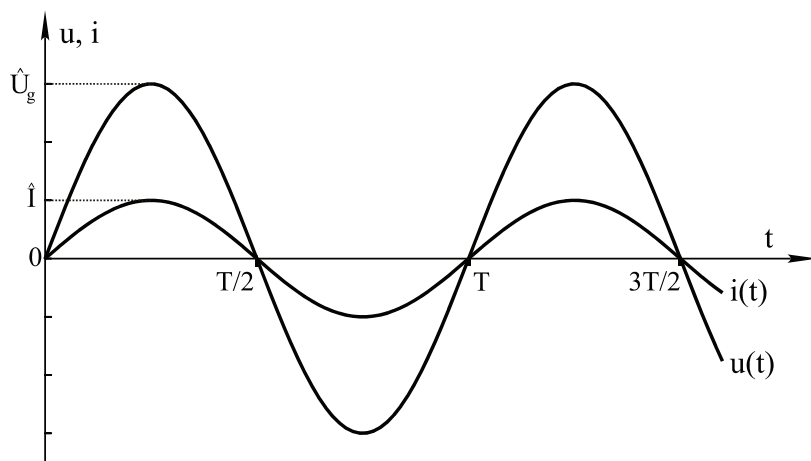
$$u_g(t) = \hat{U}_g \cdot \sin \omega \cdot t .$$

Az ellenállás árama kiszámítható:

$$R = \frac{u_R(t)}{i_R(t)} = \frac{u_g(t)}{i(t)} ,$$

$$i(t) = \frac{u_g(t)}{R} = \frac{\hat{U}_g \cdot \sin \omega \cdot t}{R} = \frac{\hat{U}_g}{R} \cdot \sin \omega \cdot t .$$

Az ellenállás árama $\frac{\hat{U}_g}{R}$ amplitúdójú, a feszültségével megegyező körfrekvenciájú és kezdőfázisú időfüggvény lesz. A két időfüggvény közös koordináarendszerben a 21.2. ábrán szemléltethető.

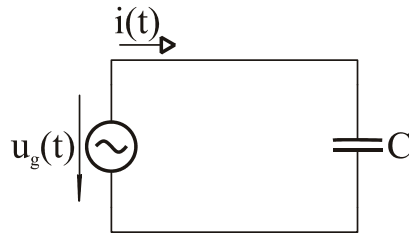


21.2. ábra

Tétel: Ellenálláson a feszültség és az áram fázisban van.

Kondenzátor viselkedése szinuszos feszültség hatására.

Kapcsoljunk egy kondenzátorra szinuszos feszültséggenerátort.



21.3. ábra

Legyen a generátor feszültségének időfüggvénye

$$u_g(t) = \hat{U}_g \cdot \sin \omega \cdot t .$$

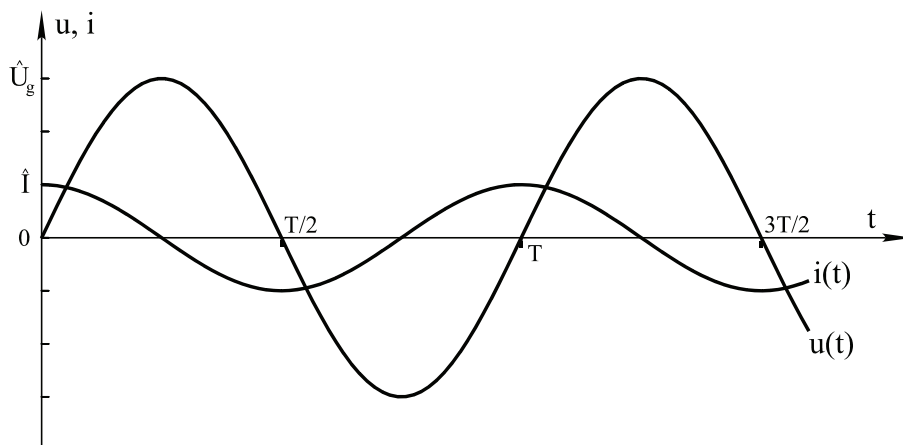
A kondenzátor árama kiszámítható:

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \text{ általában, esetünkben pedig}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{d\hat{U}_g \cdot \sin \omega \cdot t}{dt} = C \cdot \hat{U}_g \cdot \frac{d \sin \omega \cdot t}{dt} = \hat{U}_g \cdot \omega \cdot C \cdot \cos \omega \cdot t = \hat{U}_g \cdot \omega \cdot C \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ)$$

$$\hat{I} = \hat{U}_g \cdot \omega \cdot C$$

A kondenzátor árama $\hat{I}$ amplitúdójú, a feszültségével azonos körfrekvenciájú, de ahhoz képest 90° -kal, egy negyed periódussal siető szinuszos időfüggvényű.



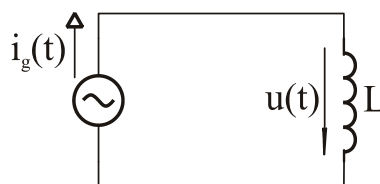
21.4. ábra

A kondenzátor feszültség- és áramidőfüggvénye közös koordináta-rendszerben a 21.4. ábrán szemléltethető.

Tétel: Kondenzátoron az áram 90° -ot siet a feszültséghez képest.

Tekercs viselkedése szinuszos áram hatására

Kapcsoljunk egy tekercsre szinuszos áramgenerátort (21.5. ábra).



21.5. ábra

Legyen a generátor áramának időfüggvénye:

$$i_g(t) = \hat{I}_g \cdot \sin \omega \cdot t$$

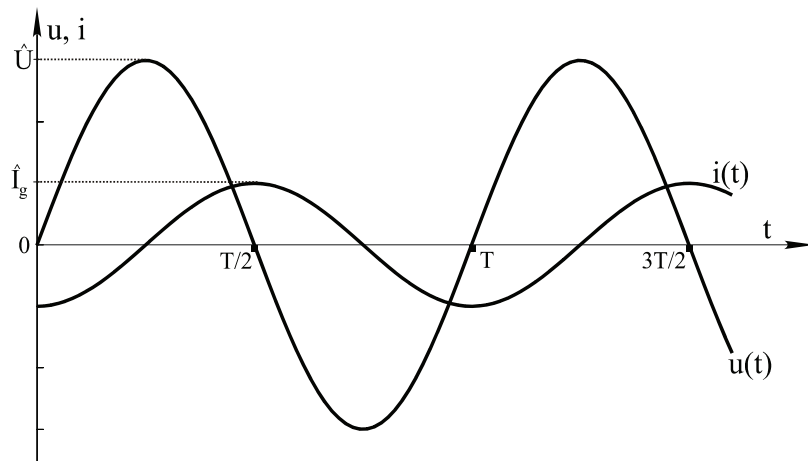
A tekercs feszültsége:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \text{ általában, esetünkben}$$

$$u(t) = L \cdot \frac{d\hat{I}_g \cdot \sin \omega \cdot t}{dt} = L \cdot \hat{I}_g \cdot \frac{d \sin \omega \cdot t}{dt} = \hat{I}_g \cdot \omega \cdot L \cdot \cos \omega \cdot t = \hat{I}_g \cdot \omega \cdot L \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ) .$$

$$\hat{U} = \hat{I}_g \cdot \omega \cdot L$$

A tekercs feszültsége $\hat{U}$ amplitúdójú, a feszültségével azonos körfrekvenciájú, az áramhoz képest 90° -kal, azaz egy negyed periódussal siető, szinuszos időfüggvényű. A tekercs feszültség- és áram-időfüggvénye a 21.6. ábrán szemlélhető.



21.6. ábra

Az előző időfüggvény-párokkal való összehasonlíthatóság érdekében az ábrázolást negyed periódussal korábban kezdjük, hogy a feszültség-időfüggvény szinuszos legyen.

Tétel: A tekercs feszültsége 90° -ot siet az áramához képest.

Következtetések: az ellenállásokból, tekercsekből és kondenzátorokból álló általános hálózatra is érvényes úgy, ahogy az elemekre, hogy a hálózatot szinuszos generátorra kapcsolva a hálózat minden feszültsége és árama a generátoréval azonos körfrekvenciájú. A feszültségeket és áramokat két jellemző, amplitúdójuk és kezdőfázisuk különbözteti meg.

A kondenzátor és a tekercs esetén a feszültség és áram pillanatértékek hányadosa nem hordoz információt, mint az ellenállásnál. Egy negyed periódus alatt a hányados nulla és végtelen között minden értéket felvesz. A feszültség és az áram közötti kapcsolat az amplitúdók hányadosában fogalmazható meg. Kondenzátor és tekercs esetén a két amplitúdó közötti kapcsolat frekvenciafüggő, azt a körfrekvencia és a kapacitás illetve az induktivitás szorzata teremti meg.

22. Szinuszos feszültség- illetve áram-időfüggvény komplex leírása. Komplex időfüggvény és komplex amplitúdó

A szinuszos időfüggvények megadásához két adat, az amplitúdó és a kezdőfázis szükséges. Ellentétben az egyenáramú hálózatokkal, ahol elegendő egyetlen adat. A mennyiségenként két adat síkbeli vektoros megadással lehetséges. Erre a komplex számok matematikai eszközkészletét használjuk.

Komplex számok

Egy $\bar{K}$ komplex szám két részből, a valós vagy reális és a képzetes vagy imaginárius részből áll. A képzetes rész a képzetes egységgel meg van szorozva. A képzetes egység jele az elektrotechnikában: j .

$$j = \sqrt{-1}$$

A komplex számok négy alakját használjuk.

Algebrai alak: $\bar{K} = a + j \cdot b$, ahol

a valós vagy reális rész,

b képzetes vagy imaginárius rész.

Trigonometrikus alak: $\bar{K} = K \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$, ahol

K abszolút érték, $K = \sqrt{a^2 + b^2}$

φ kezdőfázis, $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$

Exponenciális vagy Euler alak: $\bar{K} = K \cdot e^{j \cdot \varphi}$.

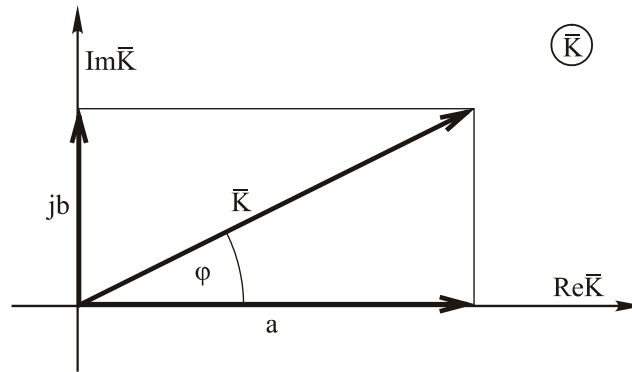
Az $e^{j \cdot \varphi}$ kifejezés jelentése: egységnyi abszolút értékű, φ fázisszögű komplex szám.

$$e^{j \cdot \varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{j \cdot \varphi} + e^{-j \cdot \varphi}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{j \cdot \varphi} - e^{-j \cdot \varphi}}{2 \cdot j}$$

Grafikus ábrázolás (22.1. ábra): egy komplex számot derékszögű koordináta-rendszerben tudunk megadni. A fázisszöget a valós tengelytől óramutató járásával ellentétes irányban mérjük. Az egyenáramú hálózatokban három alaptörvényünk volt. Ohm törvényében szorzás vagy osztás, Kirchhoff törvényeiben összeadás és kivonás műveleteket kellett végeznünk. A törvények általánosítása után a komplex számok körében is a négy alpművelettel kell majd számításainkat végeznünk. Az összeadás és a kivonás elvégzésére az algebrai alak a legmegfelelőbb. De fogjuk komplex vektorok összegét és különbségét képezni grafikusán is, az ismert nyílfolyam vagy paralelogramma módszerrel.



22.1. ábra

Műveletek komplex számokkal

Legyen két komplex számunk:

$$\overline{K_1} = a_1 + j \cdot b_1 = K_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1} ,$$

$$\overline{K_2} = a_2 + j \cdot b_2 = K_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_2} .$$

Összeadás, kivonás:

$$\overline{K_1} + \overline{K_2} = (a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$$

Szorzás:

$$\overline{K_1} \cdot \overline{K_2} = K_1 \cdot K_2 \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Osztás:

$$\frac{\overline{K_1}}{\overline{K_2}} = \frac{K_1}{K_2} \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Konjugált:

A $\overline{K}$ komplex szám konjugáltját kapjuk a képzetes rész előjelének váltásával, vagy a vektornak a valós tengelyre való tükrözésével. A konjugált jele a felső csillag.

Ha $\overline{K} = a + j \cdot b$, akkor a konjugált

$$\overline{K}^* = a - j \cdot b .$$

Jó tudni, hogy az imaginárius egységgel való szorzás 90 fokkal való forgatás pozitív irányban. A j -vel való osztás megfelel mínusz j -vel való szorzásnak, azaz forgatás 90 fokkal negatív irányban.

Például:

$$\overline{K_3} = a$$

$$j \cdot \overline{K_3} = j \cdot a$$

$$\frac{\overline{K_3}}{j} = \frac{a}{j} = \frac{a}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j \cdot a}{j^2} = \frac{j \cdot a}{-1} = -j \cdot a$$

Szinuszos időfüggvények komplex leírása

Tekintsük a következő általános szinuszos időfüggvényt:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad .$$

A komplex időfüggvény

Képezzünk komplex időfüggvényt az amplitúdó és a szinusz argumentumában levő teljes kifejezés, mint fázisszög felhasználásával.

$$\overline{u(t)} = \hat{U} \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}$$

A komplex időfüggvényből visszatérhetünk a valós időfüggvényhez a trigonometrikus alakon keresztül.

$$\overline{u(t)} = \hat{U} \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} = \hat{U} \cdot (\cos(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)) = \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\boxed{u(t) = \text{Im} \overline{u(t)}}$$

A valós időfüggvény a komplex időfüggvény képzetes része. (A differenciálegyenletek a komplex időfüggvényekre is érvényesek.)

A komplex amplitúdó

A feszültség és áramidőfüggvény komplex leírásával célunk olyan tárgyalási módot találni, amely a számításainkat egyszerűsíti. Ehhez a komplex időfüggvény még nem megfelelő. Alakítsuk tovább kifejezésünket!

$$\overline{u(t)} = \hat{U} \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} = \hat{U} \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = \hat{\overline{U}} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

Az $\hat{\overline{U}} = \hat{U} \cdot e^{j \cdot \varphi}$ kifejezést komplex amplitúdónak nevezzük. Ez nem tartalmazza az időfüggő részt – ebből származik az amplitúdó elnevezés, de a valós amplitúdó mellett a fázisszöget is megtaláljuk benne. Ezek miatt a tulajdonságok miatt a szinuszos időfüggvényű hálózatok tárgyalása jelentősen leegyszerűsödik a komplex amplitúdó alkalmazásával.

Kirchhoff törvényei érvényesek komplex amplitúdókkal is. A csomóponti törvény:

$$\boxed{\sum_{j=1}^n \hat{\overline{I}}_j = 0}$$

A huroktörvény:

$$\boxed{\sum_{i=1}^m \hat{\overline{U}}_i = 0}$$

23. A komplex impedancia fogalma és elemei

Impedancia

Az egyenáramú hálózatokban valamely passzív elem feszültségének és áramának hányadosát, az áramakadályozó-képességet ellenállásnak nevezzük. A szinuszos áramú hálózatokban új fogalmat vezetünk be. Valamely passzív elem komplex feszültség- és áram-amplitúdójának hányadosát impedanciának nevezzük.

$$\bar{Z} = \frac{\bar{\hat{U}}}{\bar{\hat{I}}}$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{\hat{U}}}{\bar{\hat{I}}} = \frac{\hat{U} \cdot e^{j\varphi_U}}{\hat{I} \cdot e^{j\varphi_I}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}$$

Az impedancia abszolút értéke a feszültség- és az áram-amplitúdó hányadosa ohmban. Fázisszöge pedig megadja a feszültség és az áram-időfüggvény egymáshoz képesti eltoltságát, fáziseltolását. Az impedancia fázisszöge természetesen nem változik, ha az idő-koordinátarendszerünk kezdőpontját balra vagy jobbra eltoljuk, hiszen ugyan mindkét fázisszög változik, de a különbségük ugyanakkora marad. (Megjegyzés: a pillanatértékek hányadosa csak ellenállások estén használható. Reaktanciák esetén teljesen értelmezhetetlen, mert egy negyed periódus alatt a hányados befutja a teljes $0, \infty$ tartományt.)

Ellenállás impedanciája

Kapcsoljuk az ellenállásunkra a következő szinuszos feszültséget!

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega \cdot t$$

A feszültség komplex időfüggvénye:

$$\bar{u}(t) = \hat{U} \cdot e^{j\omega t}$$

Az ellenállás feszültségének komplex amplitúdója tiszta valós:

$$\bar{\hat{U}} = \hat{U}$$

Az ellenállás árama:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

$$\bar{i}(t) = \frac{\bar{u}(t)}{R} = \frac{\hat{U} \cdot e^{j\omega t}}{R} = \frac{\hat{U}}{R} \cdot e^{j\omega t} = \hat{I} \cdot e^{j\omega t}, \text{ ebből}$$

$$\bar{\hat{I}} = \frac{\hat{U}}{R}, \text{ az ellenállás áramának komplex amplitúdója is tiszta valós.}$$

Ebből az impedancia:

$$\bar{Z}_R = \frac{\bar{\hat{U}}}{\bar{\hat{I}}} = \frac{\hat{U}}{\frac{\hat{U}}{R}} = R$$

Az ellenállás impedanciája tiszta valós, megegyezik az egyenáramú ellenállással. A feszültség és az áram között nincs fázistolás, ennek megfelelően az ellenállás impedanciájának fázisszöge nulla.

$$\bar{Z}_R = R$$

Kondenzátor impedanciája

Válasszuk a kondenzátor feszültségének a következő időfüggvényt.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega \cdot t$$

A feszültség komplex időfüggvénye:

$$\overline{u(t)} = \hat{U} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

A feszültség komplex amplitúdója ismét tiszta valós:

$$\overline{\hat{U}} = \hat{U}$$

Az áram időfüggvénye:

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$\overline{i(t)} = C \cdot \frac{d\overline{u(t)}}{dt} = C \cdot \frac{d(\hat{U} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t})}{dt} = C \cdot \hat{U} \cdot \frac{de^{j \cdot \omega \cdot t}}{dt} = j \cdot \omega \cdot C \cdot \hat{U} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = \hat{I} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} .$$

Ebből az áram komplex amplitúdója:

$$\overline{\hat{I}} = j \cdot \omega \cdot C \cdot \hat{U} .$$

A kondenzátor impedanciája:

$$\overline{Z_c} = \frac{\overline{\hat{U}}}{\overline{\hat{I}}} = \frac{\hat{U}}{j \cdot \omega \cdot C \cdot \hat{U}} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{j^2 \cdot \omega \cdot C} = \frac{j}{-\omega \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} .$$

A kondenzátor impedanciája negatív, tiszta képzetes.

$$\boxed{\overline{Z_c} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}}$$

Tekercs impedanciája

Válasszuk a tekercs áramának a következő időfüggvényt.

$$i(t) = \hat{I} \cdot \sin \omega \cdot t$$

A feszültség komplex időfüggvénye:

$$\overline{i(t)} = \hat{I} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

A feszültség komplex amplitúdója ismét tiszta valós:

$$\overline{\hat{I}} = \hat{I}$$

Az feszültség időfüggvénye:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$\overline{u(t)} = L \cdot \frac{d\overline{i(t)}}{dt} = L \cdot \frac{d(\hat{I} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t})}{dt} = L \cdot \hat{I} \cdot \frac{de^{j \cdot \omega \cdot t}}{dt} = j \cdot \omega \cdot L \cdot \hat{I} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = \overline{\hat{U}} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} .$$

Ebből a feszültség komplex amplitúdója:

$$\overline{\hat{U}} = j \cdot \omega \cdot L \cdot \hat{I} .$$

A tekercs impedanciája:

$$\overline{Z_L} = \frac{\overline{\hat{U}}}{\overline{\hat{I}}} = \frac{j \cdot \omega \cdot L \cdot \hat{I}}{\hat{I}} = j \cdot \omega \cdot L .$$

A tekercs impedanciája pozitív, tiszta képzetes.

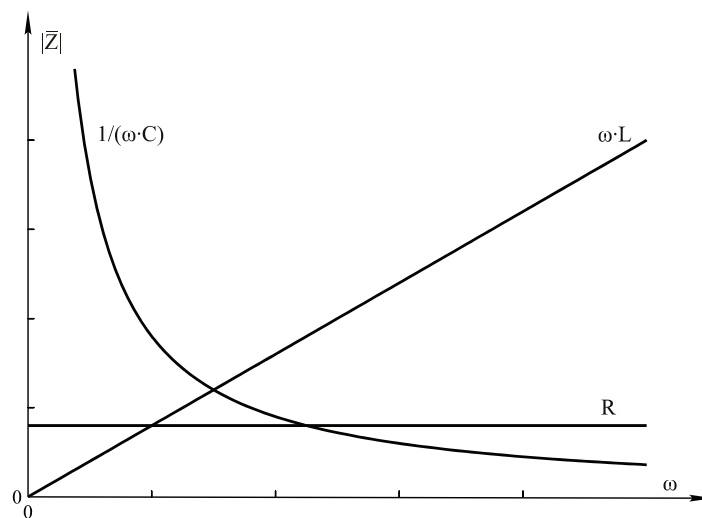
$$\overline{Z_L} = j \cdot \omega \cdot L$$

A tekercs és a kondenzátor impedanciája abszolút értékének, az úgynevezett látszólagos ellenállásnak a jelölésére használjuk:

$$X_L = \omega \cdot L ,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} .$$

A három passzív elem közül az ellenállás frekvenciától független impedanciájú. A tekercs és a kondenzátor látszólagos ellenállása frekvenciafüggő. A tekercs látszólagos ellenállása a frekvenciával egyenesen arányos, egyenáramon nulla és a frekvencia növekedésével tart a végtelenhez. A kondenzátor látszólagos ellenállása a frekvenciával fordítottan arányos. Egyenáramon végtelen és a frekvencia növekedésével tart a nullához. A passzív elemek látszólagos ellenállásának frekvenciafüggését a 23.1. ábra mutatja. (Megjegyzés: a tekercs és a kondenzátor impedanciájának fázisszöge 90° illetve -90° , frekvenciától függetlenül!!)



23.1. ábra

A frekvenciafüggés az időfüggvények mellett a másik fontos vizsgálati, szemléleti mód melynek elsősorban jelfeldolgozási, hírközlési berendezések, eszközök minősítésénél van nagy szerepe.

Sorosan kapcsolt elemek eredő impedanciája

Az egyenáramú hálózatoknál megismert levezetés alapján általánosíthatunk.

Tétel: Sorosan kapcsolt passzív elemek eredője az egyes elemek impedanciájának összege.

$$\overline{Z_{es}} = \sum_{i=1}^n \overline{Z_i}$$

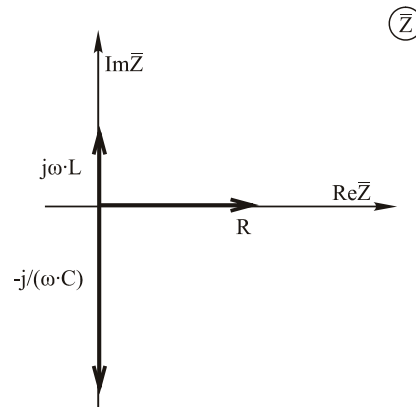
Párhuzamosan kapcsolt elemek eredő impedanciája

Szintén az egyenáramú esethez hasonló a megoldás.

Tétel: Párhuzamosan kapcsolt passzív elemek eredője az egyes elemek impedanciája reciprokából képzett összeg reciproka.

$$\overline{Z}_{ep} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\overline{Z}_j}$$

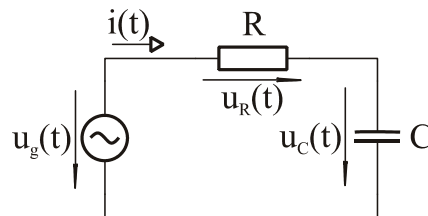
Az impedancia-vektorokat ábrázolhatjuk komplex vektorként. Az erre szolgáló koordináta-rendszerben megadunk egy hosszúság-ellenállás egyenértéket, amely nemcsak a tengelyek mentén, hanem ferde irányban is megszabja az egy-egy vektornak vagy szakasz hosszának megfelelő ellenállást. Ebben a koordináta-rendszerben más mértékegységű mennyiség ábrázolása értelmetlen! A megismert három passzív elem impedancia-vektorát ábrázolja példaképpen a 23.2. ábra.



23.2. ábra

24. Soros RC kapcsolás analízise

Kapcsoljunk sorosan egy ellenállást és egy kondenzátort szinuszos feszültséggenerátorra (24.1. ábra)!

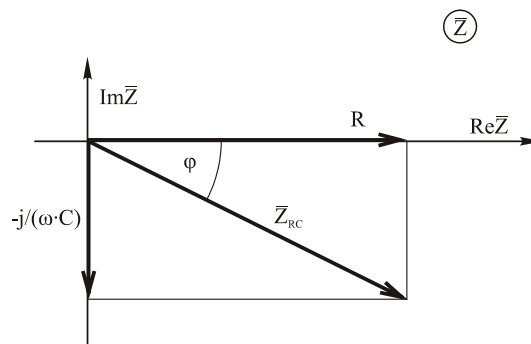


24.1. ábra

A generátort a két soros elem eredő impedanciája terheli.

$$\overline{Z}_{RC} = \overline{Z}_R + \overline{Z}_C = R - j \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Az impedancia-elemek összegzését grafikusan is elvégezhetjük a 24.2. ábra szerint. Az ellenállás és a kondenzátor impedancia-vektorával párhuzamost rajzolva a két vektort téglalappá egészítjük ki. A két vektor összege a téglalap átlójában húzott ferde eredő vektor.



24.2. ábra

Az eredő abszolút értéke Pythagorasz tétellel számítható. A képzetes egység az abszolút értéket nem befolyásolja, a képletben nem szabad szerepeltetni. Az impedancia abszolút értékét a felülvonás elhagyásával is jelölhetjük.

$$|\overline{Z_{RC}}| = Z_{RC} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

Az impedancia fázisszöge

$$\varphi = \arctg \frac{-\frac{1}{\omega \cdot C}}{R} = -\arctg \frac{1}{\omega \cdot R \cdot C}$$

A fázisszög 0 és -90° közötti érték (a kapcsolás „kapacitív”).

Válasszunk a generátor feszültségének tiszta szinuszos feszültséget:

$$u_g(t) = \hat{U}_g \cdot \sin \omega \cdot t .$$

A komplex időfüggvény:

$$\overline{u_g(t)} = \hat{U}_g \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} .$$

A komplex amplitúdó:

$$\overline{\hat{U}_g} = \hat{U}_g .$$

Az eredő impedancia a generátor feszültsége és az áram között teremt kapcsolatot

$$\overline{Z_{RC}} = \frac{\overline{\hat{U}_g}}{\hat{I}} .$$

Ebből kifejezhető az áram komplex amplitúdója:

$$\hat{I} = \frac{\overline{\hat{U}_g}}{\overline{Z_{RC}}} = \frac{\hat{U}_g}{Z_{RC}} .$$

Az áram komplex amplitúdója ismeretében a részfeszültségek komplex amplitúdói is számíthatók.

$$\overline{\hat{U}_R} = \hat{I} \cdot \overline{Z_R} = \hat{I} \cdot R$$

$$\overline{\hat{U}_C} = \hat{I} \cdot \overline{Z_C} = \hat{I} \cdot \left(-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}\right)$$

Ebből a valós amplitúdók:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_g}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}} ,$$

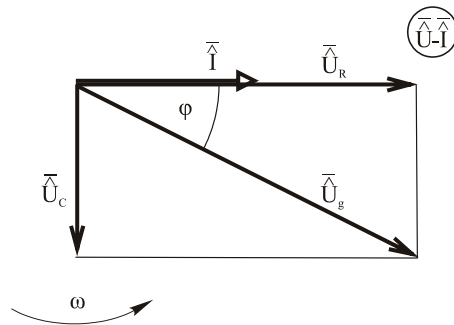
$$\hat{U}_R = \hat{I} \cdot R ,$$

$$\hat{U}_C = \hat{I} \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = \hat{I} \cdot X_C .$$

Feszültség-áram vektorábra

A kiszámított feszültségeket és az áramot vektorosan az impedancia-vektorábrától függetlenül, egy újabb, úgynevezett feszültség-áram vektorábrában ábrázolhatjuk (24.3. ábra). Ez a vektorábra a

másiktól kissé eltér. Nem rajzolunk tengelyeket és az egymáshoz képest elforgatott, de egyébként egybevágó ábrák ugyanazon vektoregyüttes különböző pillanatbeli állapotát tükrözik. A komplex időfüggvényt egy óramutató járásával ellentétes irányú nyíllal és az „ ω ” felirattal érzékeltetjük.



24.3. ábra

A feszültség-áram vektorára az impedancia-vektorábrával lehet egybevágó, de mindenképpen hasonló. Ezt erősíti meg a vektorábrákon a „ φ ” fázisszög szerepeltetése. Az áram és az ellenállás-feszültség vektora egy egyenesbe esik, szorosan egymás mellé kell rajzolni.

Az időfüggvények a vektorábrából felírhatók. Az áram időfüggvényéből célszerű kiindulni, amely φ fázisszöggel siet a generátorfeszültséghez képest.

$$i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

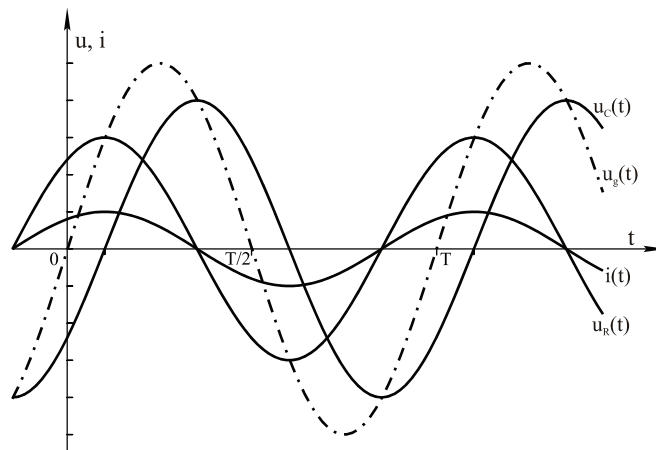
Az ellenállás feszültsége az árammal fázisban van.

$$u_R(t) = \hat{U}_R \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

A kondenzátor feszültsége 90° -ot késik az áramhoz képest.

$$u_C(t) = \hat{U}_C \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi - 90^\circ)$$

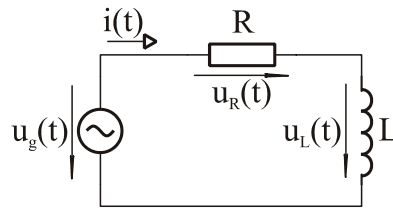
Az időfüggvényeket a jó összehasonlíthatóság érdekében közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk. A vízszintes tengelyen felmért értékeket időben adjuk meg (a fázisszögeket a körfrekvenciával osztani kellene) (24.4. ábra).



24.4. ábra

25. Soros RL kapcsolás analízise

Kapcsoljunk sorosan egy ellenállást és egy tekercset szinuszos feszültséggenerátorra (25.1. ábra)!

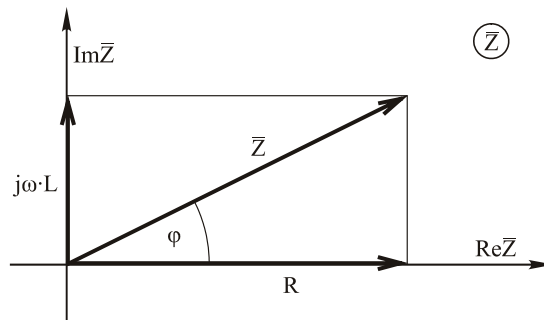


25.1. ábra

A generátort a két soros elem eredő impedanciája terheli.

$$\overline{Z}_{RL} = \overline{Z}_R + \overline{Z}_L = R + j \cdot \omega \cdot L$$

A két impedanciaelem összegzése a vektorábrában szemléletesen követhető (25.2. ábra). Az ellenállás és a tekercs impedancia-vektorát téglalappá egészítjük ki. A két vektor összege a téglalap átlójában húzott ferde vektor.



25.2. ábra

Az eredő abszolút értéke Pythagorasz tétellel számítható.

$$|\overline{Z}_{RL}| = Z_{RL} = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}$$

Az impedancia fázisszöge

$$\varphi = \arctg \frac{\omega \cdot L}{R}$$

A fázisszög 0 és +90° közötti érték (a kapcsolás „induktív”).

Legyen a kapcsolást tápláló generátor feszültsége ismét tiszta szinuszos feszültség.

$$u_g(t) = \hat{U}_g \cdot \sin \omega \cdot t$$

A generátorfeszültség komplex időfüggvénye:

$$\overline{u_g(t)} = \hat{U}_g \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

A komplex amplitúdó:

$$\overline{\hat{U}_g} = \hat{U}_g$$

Az eredő impedancia:

$$\overline{Z}_{RL} = \frac{\overline{\hat{U}_g}}{\hat{I}}$$

Ebből az áram komplex amplitúdója:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_g}{Z_{RL}} = \frac{\hat{U}_g}{Z_{RL}}$$

Az áram komplex amplitúdója ismeretében a részfeszültségek komplex amplitúdói számíthatók.

$$\hat{U}_R = \hat{I} \cdot Z_R = \hat{I} \cdot R$$

$$\hat{U}_L = \hat{I} \cdot Z_L = \hat{I} \cdot j \cdot \omega \cdot L$$

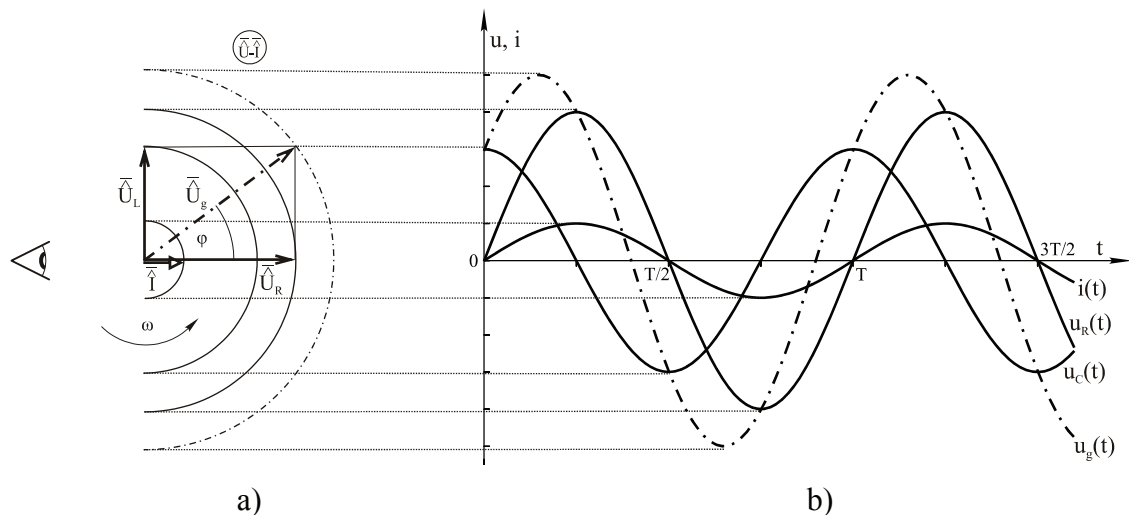
Ebből a valós amplitúdók:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_g}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}}$$

$$\hat{U}_R = \hat{I} \cdot R$$

$$\hat{U}_L = \hat{I} \cdot \omega \cdot L = \hat{I} \cdot X_L$$

Az eredményt a feszültség-áram vektorábrán vizsgálhatjuk (25.3.a ábra).



25.3. ábra

A vektorábrát olyan helyzetben vettük fel, hogy a generátorfeszültség időfüggvényét kissé módosítottuk.

$$u_g(t) = \hat{U}_g \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Vizsgáljuk meg most azt, hogyan származtathatók a vektorábrából az időfüggvények. A feszültség-áram vektorábra elemei komplex amplitúdók. A komplex időfüggvényre utalunk a körbeforgás jelzésével és hozzá az ω körfrekvencia megadásával. A vektorábra a $t=0$ pillanatban mutatja a vektoraink helyzetét. Egy más, t_1 időpontban a vektorok $\omega \cdot t_1$ szöggel elfordított helyzetben vannak. A valós időfüggvény úgy képezhető, hogy a komplex időfüggvény képzetes részét vesszük.

$$u(t) = \text{Im} \overline{u(t)}$$

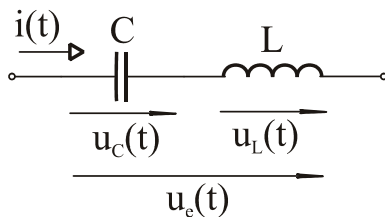
Ez a mi ábrázolásunk mellett megfelel a függőleges vetületnek. Az időfüggvényeket tehát úgy származtathatjuk, hogy először vektoraink végpontjait a függőleges tengelyre vetítjük. Utána tetszőleges időpontnak megfelelően a vektorábrát elforgatjuk, és a vektorok végpontjait az új időpontnak megfelelő függőleges rendezőre vetítjük. A vetítést érzékeltetjük a vektorábra mellé, balra rajzolt, stilizált szem-mel. Az eredményt a 25.3.b ábra szemlélteti. Az ábrán ellenőrizhető, hogy minden pillanatértékre érvényesül Kirchhoff huroktörvénye.

$$u_g(t) = u_R(t) + u_L(t)$$

26. Soros RLC kapcsolás, rezgőkör. Rezonancia, rezonanciafrekvencia. Jósági tényező. Feszültség-áram vektorábrák különböző frekvenciákon. Az elemek feszültségeinek és áramának frekvenciafüggése. Az impedancia frekvenciafüggése. Párhuzamos rezgőkör

Soros LC kapcsolás

Kapcsoljunk sorosan egy tekercset és egy kondenzátort (26.1. ábra)!



26.1. ábra

Tegyük fel, hogy elemeinken egy külső hálózat szinuszos áramot hajt keresztül.

$$i(t) = \hat{I} \cdot \sin \omega \cdot t$$

A kondenzátor és a tekercs látszólagos ellenállása:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} ,$$

$$X_L = \omega \cdot L .$$

Az áram az elemeken szinuszosan váltakozó feszültségeket hoz létre, melyek körfrekvenciája az áraméval azonos. A feszültségek amplitúdói számíthatók.

$$\hat{U}_C = \hat{I} \cdot X_C = \hat{I} \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} ,$$

$$\hat{U}_L = \hat{I} \cdot X_L = \hat{I} \cdot \omega \cdot L .$$

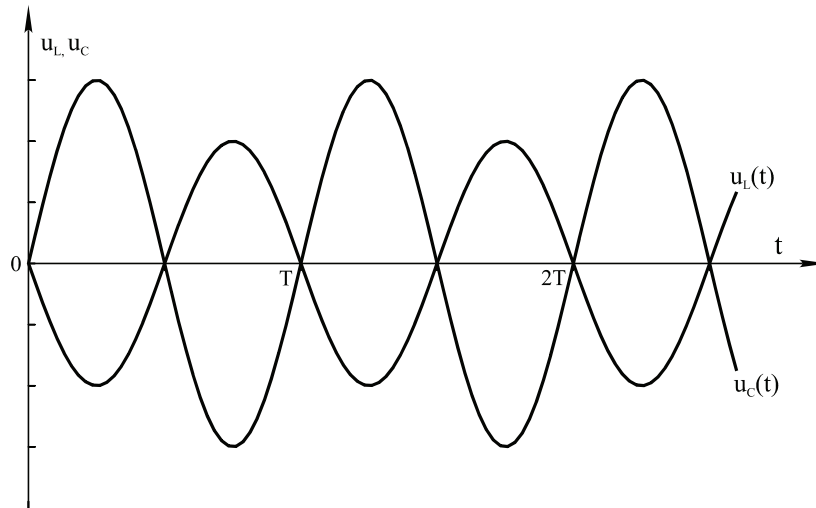
A képletekben a kapacitás és az induktivitás a két passzív elem felépítéséből származó jellemző. Ezért a két feszültség arányát kizárólag a közös áram körfrekvenciájával tudjuk befolyásolni.

Ahhoz, hogy a két elem közös eredő feszültségét meghatározzuk, vizsgálunk kell a részfeszültségek időfüggvényét. A korábbi ismeretek alapján tudjuk, hogy a kondenzátoron a feszültség késik, és a tekercsen a feszültség siet bármilyen szinuszos áram esetén, éspedig pontosan 90° -ot. Ez elegendő az időfüggvények felírásához.

$$u_C(t) = \hat{U}_C \cdot \sin(\omega \cdot t - 90^\circ) = -\hat{U}_C \cdot \cos \omega \cdot t$$

$$u_L(t) = \hat{U}_L \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ) = \hat{U}_L \cdot \cos \omega \cdot t$$

Ábrázolva a három időfüggvényt a két feszültség között egy sajátos kapcsolatot láthatunk (26.2. ábra).



26.2. ábra

A két feszültség pillanatértékei mindig ellentétes előjelűek, egymásból kivonódnak. Kirchhoff huroktörvénye szerint

$$u_e(t) = u_L(t) + u_C(t)$$

Az eredő feszültség amplitúdója a két amplitúdó különbsége.

$$\hat{U}_e = \hat{U}_L - \hat{U}_C$$

Az eredő feszültség koszinuszos, ha a különbség pozitív, és mínusz koszinuszos, ha negatív. Ebben a sajátos esetben sikerült csupán az időfüggvények vizsgálatával feladatunkat megoldani. Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk a komplex számítás mód alkalmazásával is.

A két soros elem eredő impedanciája a részimpedanciák összege.

$$\overline{Z}_{LC} = \overline{Z}_L + \overline{Z}_C = j \cdot \omega \cdot L + (-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}) = j \cdot (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})$$

Az áram nulla kezdőfázisú, tiszta szinuszos.

$$\bar{\hat{I}} = \hat{I}$$

A részfeszültségek komplex amplitúdói:

$$\overline{\hat{U}}_C = \bar{\hat{I}} \cdot (-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}) = -j \cdot \frac{\hat{I}}{\omega \cdot C} = \frac{\hat{I}}{\omega \cdot C} \cdot e^{(-j90^\circ)}$$

$$\overline{\hat{U}}_L = \bar{\hat{I}} \cdot j \cdot \omega \cdot L = j \cdot \hat{I} \cdot \omega \cdot L = \hat{I} \cdot \omega \cdot L \cdot e^{j90^\circ}$$

Az eredő feszültség komplex amplitúdója:

$$\overline{\hat{U}}_e = \bar{\hat{I}} \cdot \overline{Z}_{LC} = j \cdot \hat{I} \cdot (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}) = \hat{I} \cdot (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}) \cdot e^{j90^\circ}$$

Az időfüggvények amplitúdói és kezdőfázisai a komplex amplitúdókból kiolvastva előző eredményeinkkel megegyeznek.

Rezonancia

Az eredő feszültség komplex amplitúdójának zárójeles kifejezése két látszólagos ellenállás különbségét tartalmazza. A körfrekvencia növekedésével a tekercs monoton nő, a kondenzátoré monoton csökken. Létezik egy olyan speciális eset, amikor a két látszólagos ellenállás egyenlő, a különbségük nulla. Az így előálló helyzet a rezonancia. Ekkor az ideális tekercs és kondenzátor soros kapcsolása rövidzárként viselkedik. Az az érték amelynél a két elem látszólagos ellenállása megegyezik, a rezonancia-körfrekvencia, jele: ω_0 , értéke a következőképpen számítható:

$$\omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C}$$

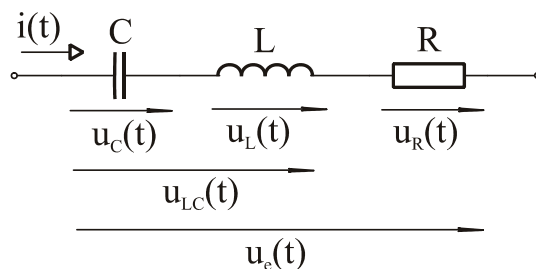
$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Ez az úgynevezett Thomson képlet. Rezonancián az a sajátos helyzet áll elő, hogy miközben a tekercsen is és a kondenzátoron is jól mérhető szinuszos feszültség esik, a két elem eredő feszültsége nulla. Ez azzal is magyarázható, hogy a 26.2. ábrán a kondenzátor és a tekercs feszültségének amplitúdója azonos, pillanatértékeik minden időpontban kivonódva egymásból nullát adnak eredményül. (Megjegyzés: A rendszer energia-felvétel nélkül sajátrezgést végez. Hasonló történik, mint a mechanikában egy rugóra függesztett tömeg csillapítatlan rezgése esetén.)

Soros RLC kapcsolás

Az előző, ideális soros rezgőkörhöz képest a gyakorlatban – elsősorban a tekercsek veszteségei miatt – egy soros ellenállással kiegészített modell a megfelelő (26.3. ábra).



26.3. ábra

Ennek vizsgálatát már csak komplex számításmóddal végezzük el. A kapcsolás eredő impedanciája:

$$\overline{Z_{RLC}} = \overline{Z_R} + \overline{Z_L} + \overline{Z_C} = R + j \cdot \omega \cdot L + (-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}) = R + j \cdot (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})$$

Tételezzük fel, hogy továbbra is nulla kezdőfázisú, szinuszos áram folyik az elemeken.

$$i(t) = \hat{I} \cdot \sin \omega \cdot t$$

$$\bar{\hat{I}} = \hat{I}$$

Az egyes elemek feszültségének komplex amplitúdói:

$$\overline{\hat{U}_R} = \bar{\hat{I}} \cdot R = \hat{I} \cdot R$$

$$\overline{\hat{U}_L} = \bar{\hat{I}} \cdot j \cdot \omega \cdot L = j \cdot \hat{I} \cdot \omega \cdot L = \hat{I} \cdot \omega \cdot L \cdot e^{j90^\circ}$$

$$\overline{\hat{U}_C} = \bar{\hat{I}} \cdot (-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}) = -j \cdot \frac{\hat{I}}{\omega \cdot C} = \frac{\hat{I}}{\omega \cdot C} \cdot e^{(-j90^\circ)}$$

Az eredő feszültség komplex amplitúdója:

$$\overline{\hat{U}_e} = \bar{\hat{I}} \cdot \overline{Z_{RLC}} = \hat{I} \cdot [R + j \cdot (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})] = \hat{I} \cdot Z_{RLC} \cdot e^{j\varphi}, \text{ ahol}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}$$

Rezonancia továbbra is az

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \text{ körfrekvencia mellett áll elő.}$$

Ilyenkor

$$\overline{\hat{U}_L} - \overline{\hat{U}_C} = 0$$

$$\hat{U}_L = \hat{U}_C$$

$$u_{LC}(t) \equiv 0$$

Rezonancián impedancia-minimum van, melynek értéke

$$\overline{Z_{RLC \min}} = \overline{Z_{RLC}(\omega_0)} = R \text{ .}$$

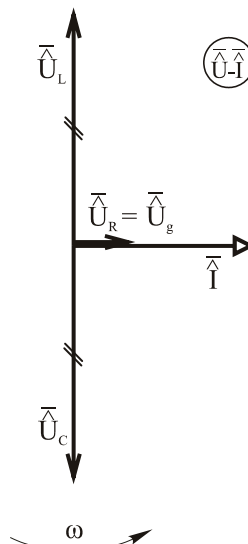
Ezért rezonancián alakul ki a legnagyobb áram, feltéve, hogy nem ideális áramgenerátor táplálja a rezgőkört. A soros rezgőkörnek a rezonancia környékén mutatott viselkedését frekvenciaszelektív tulajdonságnak nevezzük. Ugyanis kevert, sok, különböző frekvenciájú szinuszos feszültségből álló táplálás hatására a rezonanciafrekvenciával megegyező, vagy ahhoz közeli frekvenciájú komponensekre kiugróan nagy árammal válaszol. (Megjegyzés: sokfrekvenciás, kevert jel fordul elő például rádiótechnikai vevőkészülékek – rádió, TV, mobiltelefon stb. – bemenetén, és sokcsatornás, úgynevezett frekvenciamultiplex kábeles rendszerekben.) A frekvenciaszelektív tulajdonsággal kapcsolatban szokás a soros rezgőkör jóságát definiálni.

Jósági tényező

A jósági tényező jele: Q_0 . A rezonancia-körfrekvencián mutatott látszólagos ellenállások hányadosával számítható.

$$Q_0 = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} = \frac{\frac{1}{\omega_0 \cdot C}}{R}$$

A soros rezgőkör jó, ha $Q_0 \gg 1$.



26.4. ábra

Vektorábra

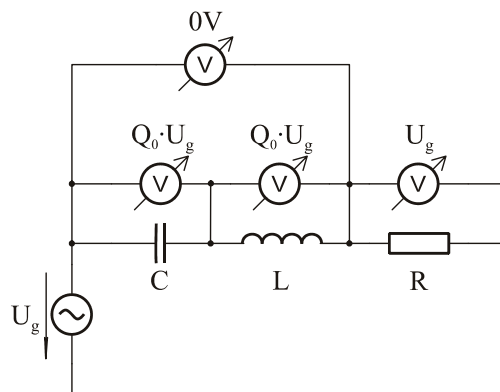
Rajzoljuk meg a soros rezgőkör feszültség-áram vektorábráját (26.4. ábra) rezonanciafrekvencián, $\omega = \omega_0$ és $Q_0 \approx 4$ mellett.

$\overline{\hat{U}_L} + \overline{\hat{U}_C} = 0$, mert a két vektor azonos hosszúságú és pontosan ellentétes irányú. Ezért a generátorfeszültség teljes egészében az ellenállásra jut.

$$\overline{\hat{U}_R} = \overline{\hat{U}_g}.$$

Az áramot csak az – általában kis értékű – ellenállás korlátozza.

$$\bar{\hat{I}} = \frac{\overline{\hat{U}_g}}{R}, \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}_g}{R}.$$



26.5. ábra

Frekvenciafüggés

A soros rezgőkör látszólagos ellenállása a rezonanciafrekvencián kis érték (R), attól távolodva mind a csökkenő, mind a növekvő frekvenciák felé tart a végtelenhez:

$$Z_{RLC} = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

Létrehozhatunk R , L és C elemek párhuzamos kapcsolásával is rezgőkört. Ennek neve párhuzamos rezgőkör. Rezonanciafrekvenciája a soroséval megegyező, de frekvenciafüggése fordított. Ennek látszólagos ellenállása a rezonanciafrekvencián nagy érték (R), attól távolodva mind a csökkenő, mind a növekvő frekvenciák felé tart a nullához.

27. Teljesítmény-időfüggvény és átlagteljesítmény ellenálláson. A hatásos teljesítmény

Váltakozóáramú teljesítmény

Az egyenáramú hálózatokhoz hasonlóan, foglalkozzunk most is, a bennünket érdeklő kapcsolások feszültség- és áramállapotainak vizsgálata után, a teljesítményviszonyokkal. Az egyenáramú hálózatoknál ez egyszerű feladat volt, mert ott konstans értékeket kaptunk eredményül. Változó áram és feszültség esetén a szorzatuk, a teljesítmény is természetesen időben változó érték.

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Előző vizsgálatainkból azt is tudjuk, hogy a szinuszos feszültség és az áram időfüggvény egymáshoz képest eltérő helyzetű aszerint, hogy milyen áramköri elemen jön létre. A teljesítményviszonyokat is célszerű külön vizsgálni ellenállásra, reaktanciákra és általános impedanciákra vonatkozóan. Az időfüggvény jellegét tekintve csak a periodikus időfüggvény esetén érdemes részletes vizsgálatot végezni. A nemperiodikus időfüggvény vagy véges időtartamú és véges energiájú, tranziens, vagy időben nem korlátozott, és így összességében végtelen energiájú.

Váltakozóáramú teljesítmény ellenálláson

Kapcsoljunk egy ellenállást szinuszos feszültségre.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega \cdot t$$

Az ellenállás árama:

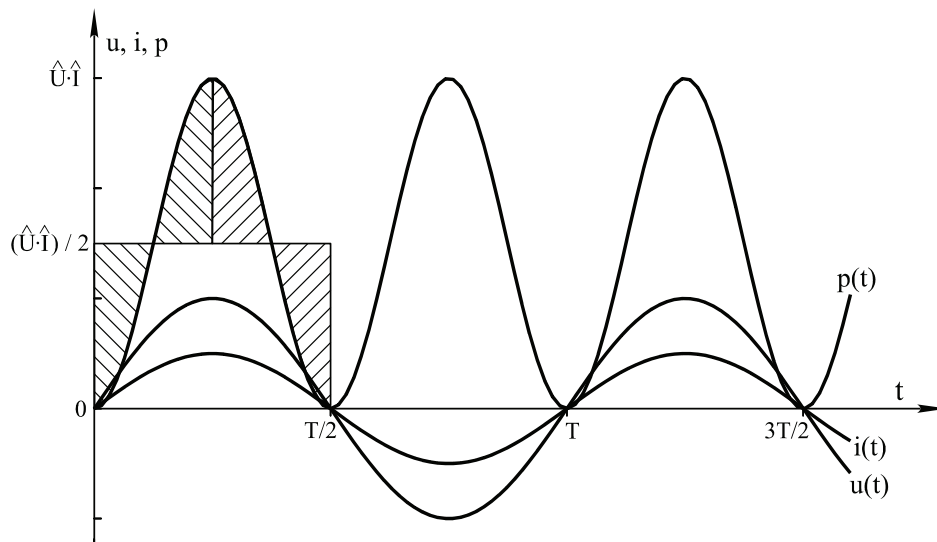
$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{\hat{U} \cdot \sin \omega \cdot t}{R} = \frac{\hat{U}}{R} \cdot \sin \omega \cdot t = \hat{I} \cdot \sin \omega \cdot t$$

Az ellenállás teljesítménye:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot (\sin \omega \cdot t)^2$$

A szinusznégyszet-függvényt ismert trigonometriai átalakítással tovább írhatjuk:

$$p(t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot (\sin \omega \cdot t)^2 = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \frac{1 - \cos 2 \cdot \omega \cdot t}{2}$$



27.1. ábra

Ezt a teljesítmény-időfüggvényt ábrázolja a 27.1. ábra. Az időfüggvény a vízszintes tengelyt felülről érinti, minden pillanatértéke nemnegatív, vagyis nulla vagy pozitív érték. Kétszeres frekvenciájú, az $\hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \frac{1}{2}$ amplitúdóértékkel fölfelé eltolt, a jelen ábrázolásban mínusz koszinuszos függvény. A változó teljesítményértéket bármelyik pillanatban leolvashatjuk. Ennél azonban sokkal nagyobb jelentősége van annak, hogy milyen közepes, átlagos teljesítményre számíthatunk hosszabb idő után.

A villamos energiaellátás hazánkban 50 Hz frekvenciájú szinuszos feszültséggel valósul meg.

$$f = 50\text{Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50\text{Hz}} = 20\text{ms}$$

A periódusidő rövid az emberi cselekvésekhez képest, ezért a mindennapi életben a teljesítmény-időfüggvény helyett valamely elem teljesítményállapotát az egy periódusra vett átlagértékkel jellemezzük. Ezt a felírt függvénynek egy periódusra vett integráljával számítjuk. (Tekintettel arra, hogy a teljesítmény-időfüggvény dupla frekvenciájú, a fél periódusra végzett integrálás is ugyanazt az eredményt adná.) Az átlagteljesítmény jelölésére vezessük be: P.

$$P = \frac{1}{T} \int_T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_T \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot (\sin \omega \cdot t)^2 dt = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2}$$

Az integrálás eredménye, az átlagteljesítmény a feszültség- és az áramamplitúdó szorzatának a fele, ahogyan az időfüggvények ábrájából is sejthető. A vonalkázott területek leforgatva éppen kiegészítik téglalappá a görbe alatti felületet. A kettes osztót pedig megoszthatjuk a két amplitúdó között.

$$P = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

Effektív érték

Az így kapott két értéket effektív értéknek nevezzük. Az effektív értéket a teljesítményszámításnál használjuk. Az effektív érték *szinuszos* időfüggvények esetén a csúcserték osztva $\sqrt{2}$ -vel.

$$U_{\text{eff}} = U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

$$I_{\text{eff}} = I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

Az effektív érték a leggyakrabban használt érték, ezért jelölését elhagyhatjuk. Szinuszos áramú hálózatokban az alsó index nélküli feszültség vagy áram jel az effektív értéket jelenti, és csak akkor használunk jelölést, ha a csúcsertékre vagy más középértékre akarunk utalni. A szinuszos feszültségre való hivatkozáskor is az effektív értéket adjuk meg. Például az energiaellátó hálózat hagyományosan 220 voltosnak mondott, vagy a napjainkban szabványos 230 voltos értéke is effektív érték. Az ezekhez tartozó csúcsertékek számíthatók.

$$220 \cdot \sqrt{2}\text{V} \cong 310\text{V}$$

$$230 \cdot \sqrt{2}\text{V} \cong 325\text{V}$$

A villamos mérőműszereket is effektív értékre szokás skálázni. Az effektív érték tulajdonképpen egy középérték, mégpedig négyzetes középérték. Kiszámítása általános periodikus

időfüggvény esetén integrálással lehetséges.

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T [u(t)]^2 dt}$$

A számítás során rövid, dt időtartamra állandónak tekintjük a pillanatérték négyzetét és egy kicsiny dt szélességű, $[u(t)]^2$ magasságú téglalap területét képezzük. Az integrálás ezen keskeny téglalapoknak az összegzése egy teljes periódusidőre. Az integrálás eredményét úgy tekintjük, mint egy periódusidő szélességű, átlagos feszültségnégyzet magasságú téglalap területét. A téglalap magasságát periódusidővel való osztás révén kapjuk meg. A négyzetes középérték a téglalap magasságából vont négyzetgyök. (Megjegyzés: nyelvünk szépen érzékelteti, hogy egy középérték “közepes”, azaz a csúcserőknél nem nagyobb. A középértékek, és így az effektív értékek is általában csúcserőknél kisebbek, nulla és csúcserő közé esnek. Kivétel az időtengelyre szimmetrikusan azonos értéket felvevő négyszögjel, melynek effektív értéke megegyezik a csúcserővel, nem kisebb annál.)

Hatásos teljesítmény

A vizsgálatainkban szereplő szinuszos feszültség az ellenálláson munkát végez. Az egy periódus alatt elvégzett munkát integrálással számíthatjuk.

$$W_T = \int_T p(t) dt = P \cdot T$$

A teljesítmény-pillanatértéket rövid időre állandónak tekintjük, és képezzük egy elemi, keskeny $p(t) \cdot dt$ téglalapnak a területét. A terület egy elemi munkarész. Az integrálás az elemi, keskeny téglalapok területének összegét, a görbe alatti területet eredményezi. Ez éppen az a mód, ahogyan korábban ellenállásunkon az átlagteljesítményt is számítottuk. Ezért az integrálás helyett az átlagteljesítményt felhasználva is kifejezhetjük az egy periódus alatt elvégzett munkát a $P \cdot T$ szorzattal.

Az ellenálláson a villamos teljesítmény elfogyasztásra kerül. Átalakul más (mechanikai, hő, fény, kémiai, stb.) teljesítménytípusra. Azt a változóáramú teljesítményt, amely más teljesítménytípusra átalakul, hatásos teljesítménynek nevezzük. (Megjegyzés: a hatásos teljesítmény nem tévesztendő össze a “hasznos”-sal).

Tétel: Ellenálláson mindig hatásos teljesítmény jön létre.

Tétel: Hatásos teljesítmény csak ellenálláson jön létre.

A hatásos teljesítmény jele: P .

Mértékegység jele: W , neve: watt.

28. Teljesítmény-időfüggvény és átlagteljesítmény kondenzátoron illetve tekercsen. A meddő teljesítmény

Váltakozóáramú teljesítmény kondenzátoron

Kapcsoljunk a kondenzátorunkra szinuszos feszültséget.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega \cdot t$$

Az kondenzátor árama:

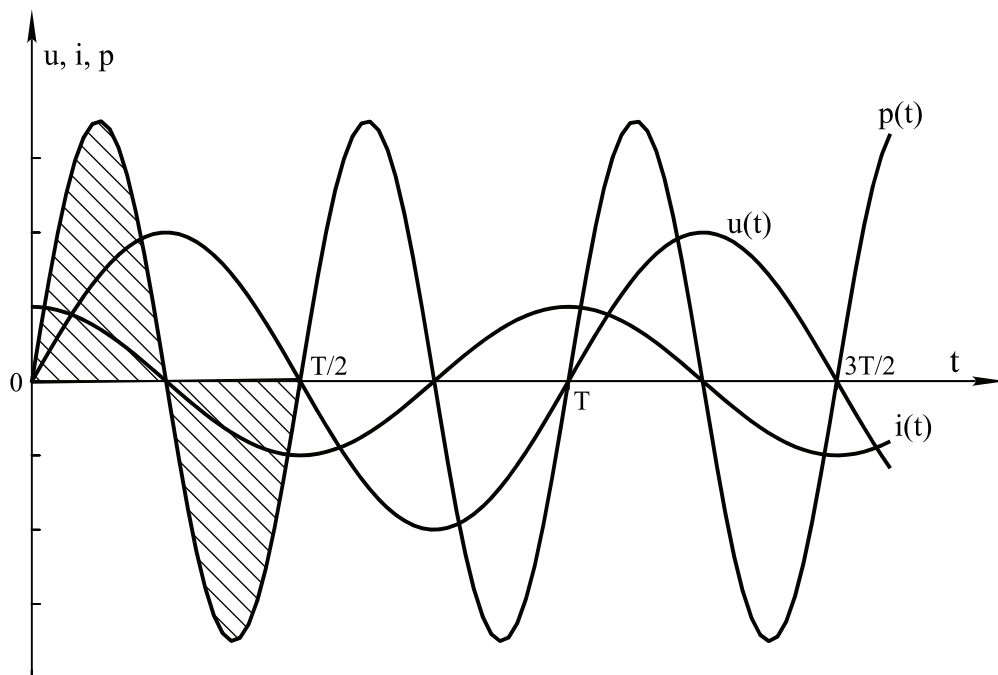
$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C \frac{d\hat{U} \cdot \sin \omega \cdot t}{dt} = \hat{U} \cdot \omega \cdot C \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ) = \hat{I} \cdot \cos \omega \cdot t$$

Az kondenzátor teljesítménye:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega \cdot t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Az időfüggvényt trigonometriai átalakítással tovább írhatjuk:

$$p(t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \frac{\sin 2 \cdot \omega \cdot t}{2}$$



28.1. ábra

A teljesítmény-időfüggvényt a 28.1. ábrán vizsgálhatjuk. Az időfüggvény a vízszintes tengelyre szimmetrikus, pillanatértékei váltakozva pozitív és negatív értékek. Kétszeres frekvenciájú,

$\hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \frac{1}{2}$ amplitúdójú, a jelen ábrázolásban szinuszos függvény. A teljesítmény-időfüggvény pozitív és negatív félperiódusa vonalkázott területe megegyezik. Ezért az integrálás eredménye félperiódusra a két vonalkázott terület különbsége, tehát nulla.

Váltakozóáramú teljesítmény tekercsen

Kapcsoljunk a tekercsre szinuszos áramot.

$$i(t) = \hat{I} \cdot \sin \omega \cdot t$$

A tekercs feszültsége:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d\hat{I} \cdot \sin \omega \cdot t}{dt} = \hat{I} \cdot \omega \cdot L \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ) = \hat{U} \cdot \cos \omega \cdot t$$

A tekercs teljesítménye:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Trigonometriai átalakítás után:

$$p(t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \frac{\sin 2 \cdot \omega \cdot t}{2}$$

A teljesítmény-időfüggvény tehát hasonló a kondenzátoréhoz. A vízszintes tengelyre szimmetrikus, kétszeres frekvenciájú, $\hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \frac{1}{2}$ amplitúdójú. Mindkét esetre érvényes, hogy az egy teljes periódusra vett átlag nulla. A teljesítmény pozitív és negatív félperiódusai azonos görbe alatti területet fednek.

$$\int_T p(t) dt = \int_T \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \frac{\sin 2 \cdot \omega \cdot t}{2} dt = 0$$

A tekercs és a kondenzátor tehát teljes periódusra nézve energiát nem fogyaszt. Ez úgy lehetséges, hogy a belsejükben felépítenek egy villamos illetve mágneses teret, ehhez egy negyed periódus alatt energiát vesznek fel a tápláló generátorból, majd a második negyed periódus alatt a térből az energia visszatáplálódik a generátorba. A harmadik negyed periódusban ellentétes irányú tér épül fel, amelyben tárolt energia a negyedik negyedben jut vissza a generátorba. Röviden *teljesítménylengés* alakul ki anélkül, hogy energia elfogyasztásra kerülne.

Meddő teljesítmény

A kondenzátoron és a tekercsen fellépő teljesítményt meddő teljesítménynek nevezzük. A tekercsen pozitív, a kondenzátoron negatív előjellel vesszük figyelembe a meddő teljesítményt, tehát ha egy kapcsolatban tekercs és kondenzátor is található, akkor a hálózat eredő meddő teljesítménye az induktív és a kapacitív meddő teljesítmény különbsége, a két meddő teljesítmény egymást kompenzálja. (Megjegyzés: a meddő teljesítmény nem tévesztendő össze a "veszteségi" teljesítménnyel).

Tétel: Kondenzátoron és tekercsen mindig meddő teljesítmény jön létre.

Tétel: Meddő teljesítmény csak kondenzátoron vagy tekercsen jön létre.

A meddő teljesítmény jele: Q .

Mértékegység jele: Var , neve: voltamperreaktív (a mértékegység régebbi, ma már nem szabványos, de előforduló jelölése: var).

29. Váltakozóáramú teljesítménytípusok és kiszámításuk általános impedancia esetén. A teljesítmény komplex vektora. A teljesítménytényező. A fázisjavítás

Váltakozóáramú teljesítmény általános impedancián

Tegyük fel, hogy általános váltakozóáramú hálózatunk valamely két pontja között ellenállások, tekercsek, és kondenzátorok vegyes kapcsolása található. Ez a passzív hálózatrész helyettesíthető egyetlen eredő impedanciával. Az eredő impedancia meghatározását az egyenáramú hálózatok tárgyalásakor megismert elvek (soros, párhuzamos eredő, stb.) továbbgondolásával elvégezhetjük, itt most nem részletezzük. Ha az általános eredő impedanciánk áramának és feszültségének csak az effektív értékét ismerjük, de a kettő közötti fázisszöveget nem, akkor a két érték összeszorozásával egy új teljesítményt kapunk. Ez a teljesítmény sem nem kerül teljes egészében elfogyasztásra, sem nem jelent teljes egészében teljesítménylengést.

Látszólagos teljesítmény

Valamely általános impedancián eső szinuszos feszültség és az átfolyó áram effektív értékének szorzatát látszólagos teljesítménynek nevezzük. A látszólagos teljesítmény jele: S , mértékegysége jele: VA , neve: voltamper.

$$S = U \cdot I$$

Hatásos teljesítmény általános impedancián

Írjuk fel az eredő impedanciánkat!

$$\overline{Z_e} = Z_e \cdot e^{j\varphi} = Z_e \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \operatorname{Re}(\overline{Z_e}) + j \cdot \operatorname{Im}(\overline{Z_e})$$

A két impedanciarész összege megfelel egy ohmos ellenállás és egy reaktancia soros kapcsolásának. Valós áramamplitúdót feltételezve az impedanciához hasonló feszültségamplitúdót is képezhetünk.

$$\hat{I} \cdot \overline{Z_e} = \hat{I} \cdot \overline{Z_e} = \hat{I} \cdot Z_e \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \hat{U} \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$$

Hasonlóan írható komplex effektív értékekkel is.

$$\overline{I} \cdot \overline{Z_e} = I \cdot \overline{Z_e} = I \cdot Z_e \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = U \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$$

A feszültség valós részéből származtatható az elfogyasztásra kerülő, azaz hatásos teljesítmény

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

Általános hálózatban a hatásos teljesítményt úgy számíthatjuk, hogy a feszültség és az áram effektív értékeinek szorzatát képezzük, és szorozzuk a feszültség és az áram közötti fáziseltolódás koszinuszával. (Az áramot a feszültségnek az árammal fázisban levő komponensével szorozzuk.)

Meddő teljesítmény általános impedancián

Az előző gondolatmenetet folytatva a feszültségvektor képzetes részéből származtathatjuk a meddő teljesítményt.

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

Általános hálózat valamely pontján a meddő teljesítményt úgy számíthatjuk, hogy a feszültség és az áram effektív értékeinek szorzatát képezzük, és szorozzuk a feszültség és az áram közötti fáziseltérés szinuszával. (Az áramot a feszültségnek az áramvektorra merőleges vektorkomponensével szorozzuk.)

Kapcsolat az egyes teljesítménytípusok között

Képezzük a hatásos és a meddő teljesítmény négyzetének összegét!

$$P^2 + Q^2 = (U \cdot I \cdot \cos \varphi)^2 + (U \cdot I \cdot \sin \varphi)^2 = U^2 \cdot I^2 \cdot (\cos \varphi)^2 + U^2 \cdot I^2 \cdot (\sin \varphi)^2 = \\ = U^2 \cdot I^2 \cdot ((\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2) = U^2 \cdot I^2 \cdot 1 = U^2 \cdot I^2 = S^2$$

Tehát $P^2 + Q^2 = S^2$, azaz

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Komplex teljesítmény

A látszólagos teljesítményt tehát Pythagorasz tételére emlékeztető módon számíthatjuk. Ugyanúgy, mint feszültség vagy áram vagy impedancia valós és képzetes részéből az abszolút értéket. Így képezhetjük a hatásos, elfogyasztásra kerülő teljesítményből, mint valós részből és a meddő, elfogyasztásra nem kerülő teljesítményből, mint képzetes részből a komplex teljesítményt, $\bar{S}$ -t.

$$\bar{S} = P + j \cdot Q$$

A komplex teljesítmény vektora a harmadik független komplex vektor a feszültség-áram és az impedancia vektoregyüttes mellett. A három vektorára hasonló.

Váltakozóáramú teljesítménytípusok megítélése

A hatásos teljesítmény átalakul más teljesítménytípussá, elfogyasztásra kerül, ugyanúgy, mint az egyenáramú teljesítmény.

A meddő teljesítmény más, nincs egyenáramú megfelelője. Teljesítménylengés generátor és reaktancia között. Elfogyasztásra nem kerül, ezért az áramszolgáltató a fogyasztótól ellenszolgáltatásra nem tarthat igényt. Ugyanakkor a tekercs vagy kondenzátor jelentős áramot igényelhet. Ezt az áramot kell az áramszolgáltatónak a távvezetékein szállítani. Számolni kell a távvezeték véges ellenállásával és az ezen létrejövő teljesítményvesztéssel. A P_v veszteség számítható a vezetékellenállás, R_v és a rajta átfolyó szinuszos áram I effektív értékének felhasználásával.

$$P_v = I^2 \cdot R_v$$

Az áramszolgáltatónak tehát vesztesége keletkezik, miközben ebből bevétele nem származik. Ezért a meddő teljesítmény *kerülendő*.

A meddő teljesítmény jelenlétének jelzésére a *teljesítménytényezőt* használjuk. A teljesítménytényező: $\cos \varphi$.

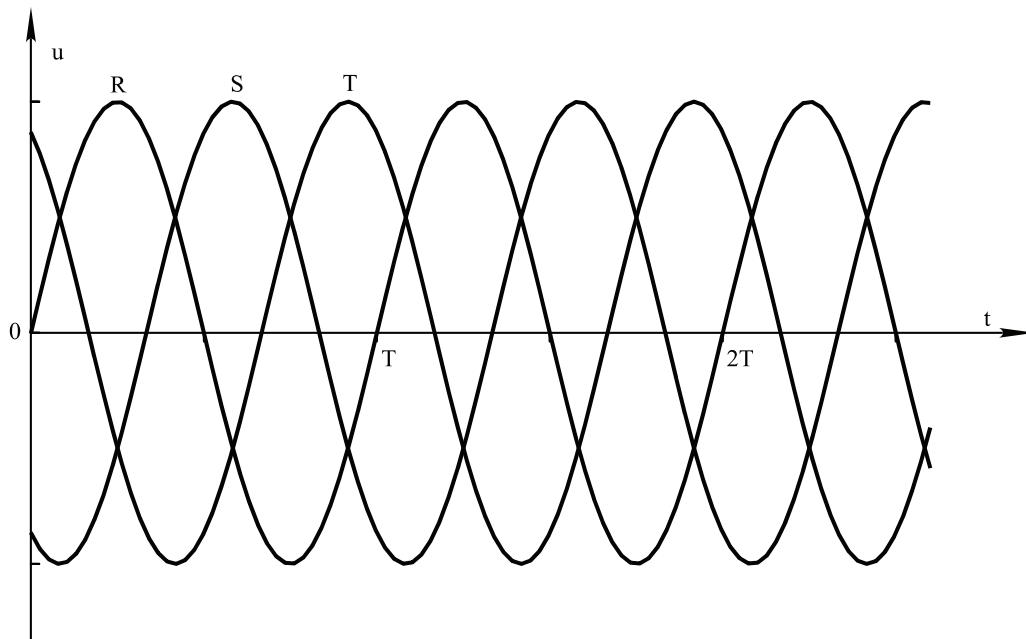
A teljesítménytényező optimális, ha $\cos \varphi = 1$. Ilyenkor nincs meddő teljesítmény, mert ugyanekkor $\sin \varphi = 0$. Ha a teljesítménytényező nem optimális, akkor a meglevő meddő teljesítmény kompenzálására *fázisjavítást* kell alkalmazni. A gyárak, üzemek, nagy fogyasztók általában induktív meddő teljesítményt okoznak. Ezt kell a fogyasztás helyén párhuzamosan kapcsolt kondenzátorokkal, a változó terheléshez állandóan igazodva kompenzálni. Ez a fázisjavítás. Az áramszolgáltató kedvezményben részesíti a nagy fogyasztóit, ha a teljesítménytényező értékét folyamatosan az előre megállapított érték felett tartják. A teljesítménytényező folyamatos figyelemmel kísérése céljából $\cos \varphi$ -regisztráló készüléket használnak.

30. Szimmetrikus háromfázisú hálózatok. Vonali- és fázisjellemzők. Aszimmetria

A villamos energiaellátás kezdeti időszakában a generátorokat és fogyasztókat független, pont-pont közötti összeköttetésekkel kötötték össze. Napjainkban a kontinenseket behálózzák a távvezetékek. Sok országot magukba foglaló egységes villamosenergia-rendszerek működnek. Az ellátó rendszerek, távvezetékek és berendezések létesítése és üzemeltetése költséges. A költségek optimalizálhatók háromfázisú hálózatok alkalmazásával. Ma a villamos energiaellátás csaknem kizárólag háromfázisú rendszerben történik.

Három szinuszos feszültséggenerátor szimmetrikus generátorhármast alkot, ha
 frekvenciájuk pontosan megegyezik,
 feszültségük amplitúdója megegyezik,
 szimmetrikusan eltoltak úgy, hogy kezdőfázisuk rendre 0° , 120° , és 240° .

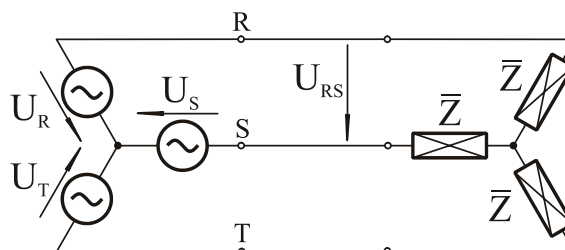
A három „fázis” szokásos elnevezése: R, S és T fázis. A három fázis időfüggvénye a 30.1. ábrán látható.



30.1. ábra

Az ábrán figyelemmel kísérhető, hogy bármely időpontban a három időfüggvény pillanatértékeinek összege nullát ad eredményül:

$$u_R(t) + u_S(t) + u_T(t) = 0 .$$



30.2. ábra

A három generátorból csillag és háromszög kapcsolást egyaránt képezhetünk. A 30.2. ábrán egy csillagkapcsolású generátorhármast csillagkapcsolású három impedancia terhel. A szimmetria feltétele a korábban a generátorokra tett kikötések mellett az, hogy a három terhelő impedancia legyen azonos. Ha ez teljesül, akkor például abban a pillanatban amikor az R és S fázis vezetékén a generátortól a terhelés felé folyik áram, a T fázis vezetékén éppen az előző két áram összege folyik ellenkező irányba.

$$i_R(t) + i_S(t) + i_T(t) = 0$$

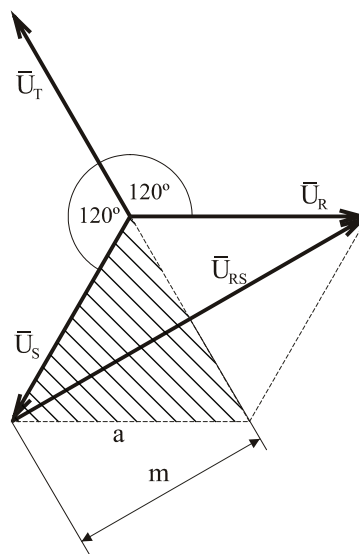
Ez indokolja, hogy a két csillagpontot nem kötjük össze, háromvezetékes rendszert használunk. Ha a két csillagpontot összekötnénk, ezen a negyedik vezetéken nem folyna áram a szimmetria következtében.

A generátoron folyó áramot fázisáramnak, a generátoron eső feszültséget fázisfeszültségnek nevezzük. A távvezeték árama a vonali áram, feszültsége a vonali feszültség. Csillagkapcsolású generátorok esetében a fázisáram, I_f , és a vonali áram, I_v mint az előbb vizsgáltuk, megegyezik.

$$I_f = I_v$$

Nem így a két feszültség. Kapcsolatukhoz rajzoljuk fel először a generátorok szimmetrikus vektorhármast, $\overline{U_R}$ -t, $\overline{U_S}$ -t és $\overline{U_T}$ -t (30.3. ábra). Három azonos hosszúságú, egymással 120° -os szöget bezáró feszültségvektor alkotja. A vonali feszültséget megfelelő két fázisfeszültség vektoriális különbségeként határozhatjuk meg. Például:

$$\overline{U_{RS}} = \overline{U_R} - \overline{U_S}.$$



30.3. ábra

Vektorábránkon a vonalkázott terület egy egyenlő oldalú háromszög. Tudjuk, hogy ebben az oldalhosszúság, a és a magasságvonal, m hossza közötti összefüggés:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

Az oldalhosszúságnak a fázisfeszültség, a magasságnak a vonali feszültségnek a fele felel meg, ezért csillagkapcsolású generátoraink esetében az összefüggés:

$$U_v = U_f \cdot \sqrt{3}$$

Háromszögkapcsolású generátorok esetén a fázis- és a vonali feszültség megegyezik. Az áramokra pedig a következő összefüggés érvényes.

$$U_{vh} = U_{fh}$$

$$I_{vh} = I_{fh} \cdot \sqrt{3}$$

A háromfázisú hálózatok üzemeltetése során folyamatosan ügyelünk a szimmetria fenntartására. Ennek ellenére előfordulhat fáziskimaradás, aszimmetrikus terhelés, vagy más rendellenesség.

Aszimmetria háromvezetékes rendszerben

Az aszimmetria a 30.2. ábra szerinti csillag-csillag kapcsolású háromvezetékes rendszerben nem várt feszültség-eltolódásokat okoz. A két csillagpont között úgynevezett „csillagponteltolódás” jön létre. A csillagpontok közötti $\overline{U_0}$ komplex amplitúdójú eltolódási feszültség szinuszos időfüggvényű. Az aszimmetria hatására az egyes fázisokra is a névleges feszültségtől eltérő nagyobb vagy kisebb feszültség jut. A névlegestől eltérő feszültség az üzemeltetett berendezések, eszközök tönkremenetelét vagy hibás működését okozza, tehát nem engedhető meg.

Aszimmetria négyvezetékes rendszerben

A feszültségtartást biztosítja és a két csillagpont közötti feszültségetolódást akadályozza meg, ha a két csillagpontot egy negyedik vezetékkel összekötjük. Ez az úgynevezett nullvezeték. Rajta szimmetrikus esetben nem folyik áram. Aszimmetria esetén viszont szinuszos kiegyenlítő áram alakul ki benne. A kiegyenlítő áram biztosítja a fázisáramok kívánt aszimmetriáját, mely utóbbi pedig lehetővé teszi, hogy fázisonként eltérő terhelő impedanciák ellenére a fázisfeszültségek azonosak maradjanak.

Ma otthonainkban és a gyárak, üzemek, intézmények számára a villamos energiaellátás szimmetrikus háromfázisú rendszerben történik. A fázisfeszültség ma szabványosan 230V-os effektív értékű. A közvélemény nagy része azonban a régi, megszokott és a feliratokon ma is szereplő 220V-os értéket ismeri. Lakásainkba tehát fázisfeszültség jut. Többlakásos épületben lakásonként más-más fázisról biztosítják a táplálást. Egy-egy fázisra sok lakást csatlakoztatva a szimmetria statisztikusan megvalósul. A nullvezetéknek a lakásokba, irodákba bevezetett szakasza természetesen az energiaellátáshoz szükséges teljes áramot vezeti, árammentessége szimmetria esetén csak a háromfázisú szakaszra érvényes.

Magyarországon a villamos energiaellátó hálózat szabványosan földelt csillagpontú. Jó tudni, hogy az épületek fémről készült gáz- és vízvezetékei, a vízcsapok, az épületvasalás, a nedves padló a nullvezetékkel összeköttetésben van. A másik vezetéknek, az úgynevezett fázisvezetőnek az érintése ezért önmagában is elegendő lehet ahhoz, hogy zárt áramkör alakuljon ki, és áramütés következzen be.

A nagyobb fogyasztók háromfázisú táplálást kapnak, és gyakran üzemeltetnek is háromfázisú gépeket, berendezéseket. Az előbb említett 220V-os fázisfeszültség effektív értékhez a

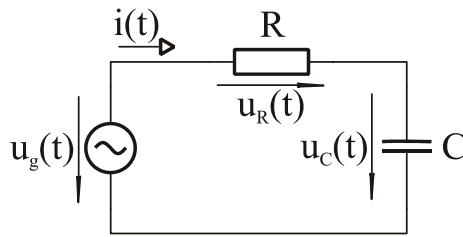
$$220V \cdot \sqrt{3} \cong 380V$$

vonali feszültség tartozik, amit például transzformátorállomások, elosztók, villamos közlekedéssel kapcsolatos létesítmények közelében, figyelmeztető feliratokon gyakran láthatunk.

31. Számítási feladatok gyakorlása

31.1 példa

Tekintsük a 31.1. ábrán látható soros RC kapcsolást.



31.1. ábra

Kiinduló időfüggvény és adatok:

$$u_g(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t \text{ [V]},$$

$$R = 80 \Omega ,$$

$$I = 1 \text{ A} .$$

Határozzuk meg a feszültségeket, az áram időfüggvényét, rajzoljuk meg a vektorábrákat!

Megoldás

A generátor időfüggvényéből kiolvasható adatok:

$$U_g = 100 \text{ V} \text{ (ez effektív érték!!).}$$

$$\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} .$$

A frekvencia és a periódusidő:

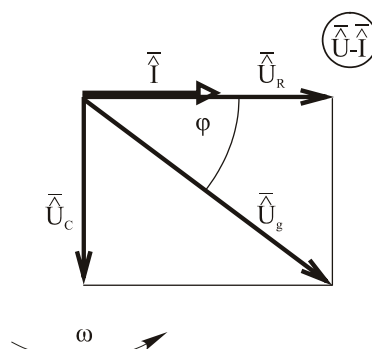
$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = 50 \text{ Hz} ,$$

$$T = \frac{1}{f} = 20 \text{ ms} .$$

Az ellenállás feszültsége:

$$U_R = I \cdot R = 1 \text{ A} \cdot 80 \Omega = 80 \text{ V} .$$

Mivel az áram megadott értéke effektív érték, ezért az eredmény is effektív érték. A feszültség-áram vektorábra megrajzolható. Csak a kondenzátor feszültsége ismeretlen, ezért a generátor és az ellenállás feszültségének vektoriális különbségként meg tudjuk szerkeszteni (31.2. ábra).



31.2. ábra

A kondenzátor feszültségének effektív értéke Pythagorasz tétele szerint:

$$U_C = \sqrt{U_g^2 - U_R^2} = \sqrt{(100V)^2 - (80V)^2} = 60V$$

A kondenzátor látszólagos ellenállása:

$$X_C = \frac{U_C}{I} = \frac{60V}{1A} = 60\Omega .$$

A kondenzátor kapacitása:

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{314 \frac{rad}{s} \cdot 60\Omega} = \frac{1}{314 \cdot 60} \cdot \frac{As}{V} = 53,08\mu F .$$

Az eredő impedancia abszolút értéke:

$$Z_{RC} = \frac{U_g}{I} = \frac{100V}{1A} = 100\Omega .$$

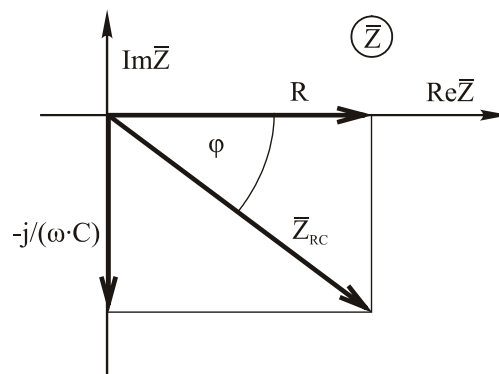
Ez megegyezik azzal amit Pythagorasz-tétellel számíthatunk.

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{(80\Omega)^2 + (60\Omega)^2} = 100\Omega .$$

A fázisszög a feszültség-vektorábrából:

$$\varphi = -ar \operatorname{ctg} \frac{U_C}{U_R} = -ar \operatorname{ctg} \frac{60V}{80V} = -ar \operatorname{ctg} 0,75 = 36,9^\circ .$$

Most már megrajzolhatjuk az impedancia-vektorábrát.



31.3. ábra

A hatásos teljesítmény:

$$P = U_g \cdot I \cdot \cos \varphi = U_R \cdot I = 80V \cdot 1A = 80W .$$

A meddő teljesítmény:

$$Q = U_g \cdot I \cdot \sin \varphi = U_C \cdot I = 60V \cdot 1A = 60Var \text{ kapacitív.}$$

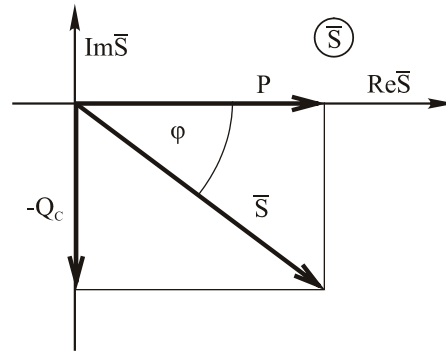
A látszólagos teljesítmény:

$$S = U_g \cdot I = 100V \cdot 1A = 100VA .$$

A teljesítmény komplex értéke:

$$\bar{S} = 80 - j \cdot 60 \text{ [VA].}$$

A teljesítmény-vektorábra:



31.4. ábra

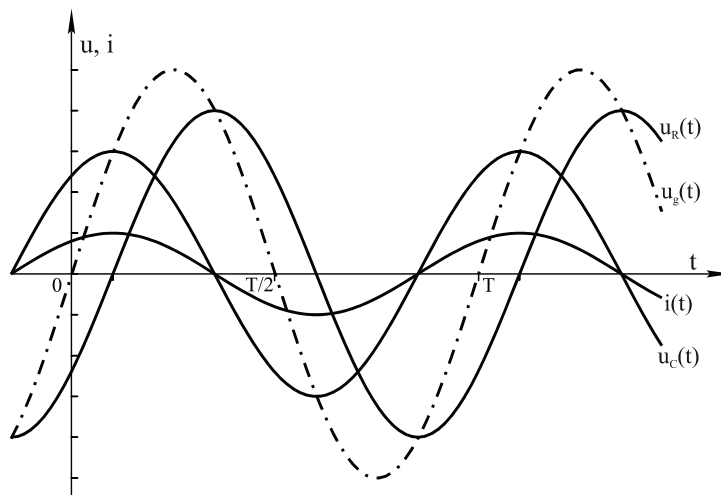
A három vektorábra egybevigó!

Az időfüggvények:

$$u_R(t) = 80 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t + 36,9^\circ\right) [\text{V}],$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t + 36,9^\circ\right) [\text{A}],$$

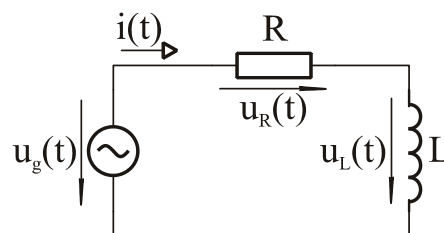
$$u_C(t) = 60 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t + 36,9^\circ - 90^\circ\right) = 60 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t - 53,1^\circ\right) [\text{V}].$$



31.5. ábra

31.2. példa

Tekintsük a 31.6. ábrán látható soros RL kapcsolást.



31.6. ábra

A kapcsolat által felvett hatásos teljesítmény:

$$P = 100 \text{ W} .$$

További adatok:

$$L = 100\text{mH} , \quad \omega = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} , \quad U_L = 100\text{V}$$

A fenti adatokból számítsuk ki a hiányzó feszültségeket, impedanciákat, teljesítményeket, az áramot, a fázisszöget és határozzuk meg a szükséges fázisjavító kondenzátor értékét!

Megoldás

A tekercs látszólagos ellenállása:

$$X_L = \omega \cdot L = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 100 \cdot 10^{-3} \text{H} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 100\Omega .$$

Ebből a kör árama:

$$I = \frac{U_L}{X_L} = \frac{100\text{V}}{100\Omega} = 1\text{A} .$$

$$P = U_g \cdot I \cdot \cos \varphi = U_R \cdot I = 100\text{W} , \text{ ebből}$$

$$U_R = \frac{P}{I} = \frac{100\text{W}}{1\text{A}} = 100\text{V} ,$$

Az ellenálláson és a tekercsen a feszültség megegyezik, a feszültség-vektorábra egy négyzet, a fázisszög 45° .

$$\varphi = \arctg \frac{U_L}{U_R} = \arctg \frac{100\text{V}}{100\text{V}} = \arctg 1 = 45^\circ ,$$

$$S = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{100\text{W}}{\cos 45^\circ} = \frac{100\text{W}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cong 141\text{VA} ,$$

$$Q = S \cdot \sin \varphi = 141\text{VA} \cdot \sin 45^\circ = \frac{141\text{VA}}{\sqrt{2}} = 100\text{Var} , \text{ induktív,}$$

$$U_g = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{(100\text{V})^2 + (100\text{V})^2} \cong 141\text{V}$$

Az eredő impedancia:

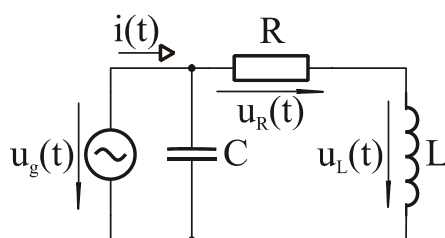
$$Z_{RL} = \frac{U_g}{I} \cong \frac{141\text{V}}{1\text{A}} = 141\Omega .$$

A komplex impedancia és a komplex teljesítmény:

$$\overline{Z}_{RL} = R + j \cdot X_L = 100 + j \cdot 100[\Omega] ,$$

$$\overline{S} = 100 + j \cdot 100[\text{VA}] .$$

Fázisjavítás érdekében a soros RL kapcsolással párhuzamosan csatlakoztatunk egy kondenzátort (31.7. ábra).



31.7. ábra

Értékét úgy kell megválasztanunk, hogy meddő teljesítménye megegyezzen a tekercs által okozott meddő teljesítménnyel.

$$Q_C = Q_L = 100 \text{Var}$$

Mivel a kondenzátorra a generátor feszültsége jut

$$I_C = \frac{Q_C}{U_g} = \frac{Q_L}{U_g} \cong \frac{100 \text{Var}}{141 \text{V}} \cong 0,707 \text{ A} , \text{ ebből}$$

$$X_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{U_g}{I_C} \cong \frac{141 \text{V}}{0,707 \text{ A}} \cong 200 \Omega .$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} , \text{ ebből a keresett kapacitás:}$$

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} \cong \frac{1}{10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 200 \Omega} = \frac{10^{-5}}{2} \cdot \frac{\text{As}}{\text{V}} = 5 \mu\text{F} .$$

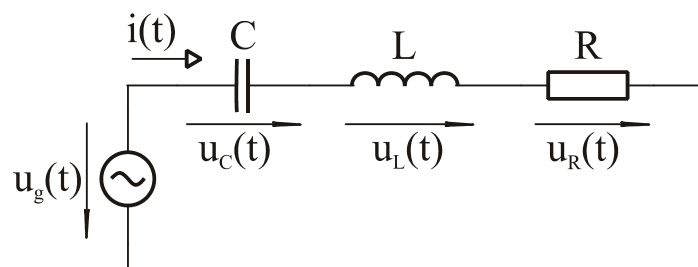
Tökéletes fázisjavítás érdekében tehát $5 \mu\text{F}$ kapacitású kondenzátort kell a kapcsolással párhuzamosan csatlakoztatni. Ilyenkor a generátor csak hatásos teljesítményt ad le, ezért árama

$$I_{g, \text{fázisjavított}} = \frac{P}{U_g} \cong \frac{100 \text{W}}{141 \text{V}} \cong 0,707 \text{ A} .$$

Eközben az ellenállás és a tekercs feszültség-, áram- és teljesítményállapota természetesen változatlan!!

31.3. példa

Soros R, L és C elemeket $U_g=5\text{V}$ feszültségű szinuszos generátor táplál (31.8. ábra).



31.8. ábra

Mekkora feszültség jelenik meg az egyes elemeken és mekkora a kör árama, ha a generátor frekvenciája éppen a rezonanciafrekvencia? Mekkora a jósági tényező és mekkora a rezonanciafrekvencia?

$$L = 100 \mu\text{H} , \quad C = 10 \text{nF} , \quad R = 25 \Omega$$

Megoldás

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot 10^{-8} \frac{\text{As}}{\text{V}}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-12} \text{s}^2}} = 10^6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} .$$

Rezonancia-körfrekvencián a látszólagos ellenállások megegyeznek.

$$X_L = \omega_0 \cdot L = 10^6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 100\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} = \frac{1}{10^6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 10^{-8} \frac{\text{As}}{\text{V}}} = \frac{1}{10^{-2} \frac{\text{A}}{\text{V}}} = 100\Omega$$

Rezonanciafrekvencián a kondenzátor és a tekercs látszólagos ellenállása kivonódva egymásból nullát ad eredményül. Az eredő impedancia ezért az ellenállás értékével egyezik meg

$$Z_{RLC} = R = 25\Omega$$

A generátorfeszültség teljes egészében az ellenállásra jut.

$$U_R = U_g = 5V \text{ (effektív érték!!)}$$

Az áram:

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{5V}{25\Omega} = 0,2A \text{ .}$$

A két reaktancia együttes feszültsége rezonancián $U_{LC} = 0V$, de ezen belül a két feszültség azonos, nem nulla.

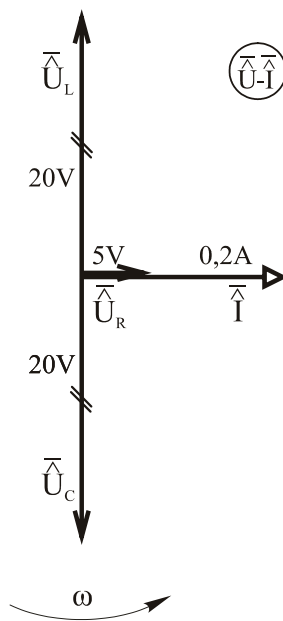
$$U_L = I \cdot X_L = 0,2A \cdot 100\Omega = 20V \text{ .}$$

$$U_C = I \cdot X_C = 0,2A \cdot 100\Omega = 20V \text{ .}$$

A jósági tényező:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} = \frac{100\Omega}{25\Omega} = 4 \text{ .}$$

A feszültség-áram vektorábra rezonancián a 31.9. ábrán látható, a vektorokon azok effektív értéke is olvasható.

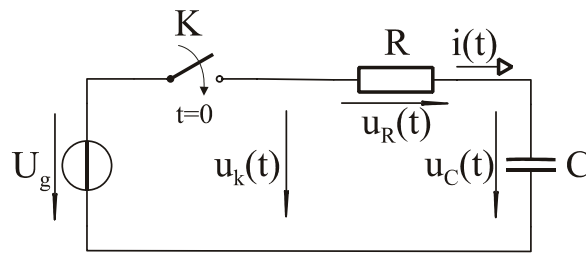


31.9. ábra

Ellenőrző feladatok**1. Feladat**

Soros RC kört $U_0=10\text{V}$ egyenfeszültségre kapcsolunk (31.10. ábra).

$$R=1\text{k}\Omega, \quad C=10\text{nF}.$$



31.10. ábra

Válassza ki a helyes végeredményeket!

Mekkora az időállandó, τ ?

$$0,01\mu\text{s} ,$$

$$0,01\text{ms} ,$$

$$1\text{ms} ,$$

$$10\mu\text{s} ,$$

$$10^{-2}\text{s} ,$$

$$10^{-5}\text{s} ,$$

$$10^{-8}\text{s} .$$

Mekkora az áram a bekapcsolás pillanatában?

$$1\text{A},$$

$$10\text{A},$$

$$0,$$

$$\infty,$$

$$10\text{mA},$$

$$0,01\text{mA}.$$

Mekkora az áram a bekapcsolás után, állandósult állapotban?

$$1\text{A},$$

$$10\text{A},$$

$$0,$$

$$\infty,$$

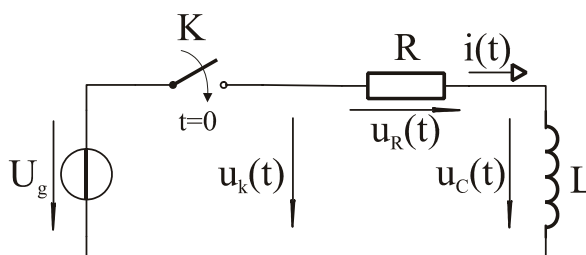
$$10\text{mA},$$

$$0,01\text{mA}.$$

2. Feladat

Soros RL kört $U_0=100\text{V}$ egyenfeszültségre kapcsolunk (31.11. ábra).

$$R=100\Omega, \quad L=100\mu\text{H}.$$



31.11. ábra

Válassza ki a helyes végeredményeket!

Mennyi idő után tekintjük befejezettnek a bekapcsolás utáni átmeneti változásokat?

- 1 μ s,
- 5 μ s,
- 10 μ s,
- 50 μ s,
- 10ms,
- 50ms.

Mekkora az áram a bekapcsolás pillanatában?

- 1A,
- 10A,
- 0,
- ∞ ,
- 10mA,
- 0,01mA.

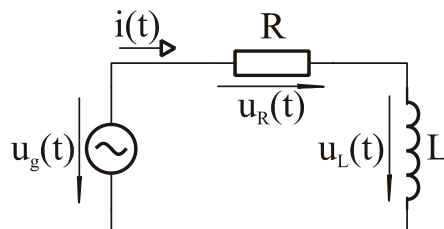
Mekkora az áram a bekapcsolás után, állandósult állapotban?

- 1A,
- 10A,
- 0,
- ∞ ,
- 10mA,
- 0,01mA.

3. Feladat

Színuszos feszültséggenerátorral táplált soros RL kapcsolásban (31.12. ábra):

$$R=100\Omega, \quad L=100\text{mH}, \quad \omega = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad I_{\text{eff}} = 1\text{A}.$$



31.12. ábra

Válassza ki a helyes végeredményeket!

Mekkora a generátor feszültségének effektív értéke, U_g ?

- 0V,
- 2V,
- 14,14V,
- 20V,
- 141,4V,
- 200V,
- ∞ V.

Mekkora az ellenállás feszültségének effektív értéke, U_R ?

- 0V,
- 1V,
- 10V,
- 100V,
- 141,4V,
- 1000V,
- ∞ V.

Mekkora a tekercs feszültségének effektív értéke, U_L ?

- 0V,
- 1V,
- 10V,
- 100V,
- 141,4V,
- 1000V,
- ∞V .

Mekkora a hatásos teljesítmény?

- 0,
- 10VA,
- 10VAr,
- 10W,
- 100VA,
- 100VAr,
- 100W.

Mekkora a meddő teljesítmény?

- 0,
- 10VA,
- 10VAr,
- 10W,
- 100VA,
- 100VAr,
- 100W.

Mekkora a látszólagos teljesítmény?

- 0,
- 100VA,
- 100W,
- 141,4W,
- 141,4VA,
- 200W,
- 200VAr.

Mekkora a teljesítménytényező?

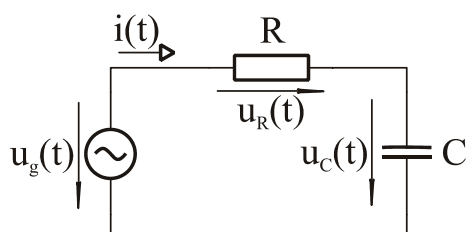
- 100W,
- 10%,
- 1,
- 1,414,
- 0,707,
- 0,5,
- 50%.

4. Feladat

Színuszos feszültséggenerátorral táplált soros RC kapcsolásban (31.13. ábra):

$$u_g(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \sin \omega \cdot t [V],$$

$$R=40\Omega, \quad U_C=60V, \quad C=106\mu F.$$



31.13. ábra

Válassza ki a helyes végeredményeket!

Mekkora a generátor feszültségének effektív értéke, U_g ?

- 0V,
- 10V,
- 14,14V,
- 100V,
- 141,4V,
- 1000V,
- ∞V ,

Mekkora az ellenállás feszültségének effektív értéke, U_R ?

- 0V,
- 40V,
- 80V,
- 81,4V,
- 160V,
- 136V,
- 141,4V,
- ∞V .

Mekkora az áram effektív értéke?

- 0A,
- 1A,
- 2A,
- 2,04A,
- 4A,
- ∞A .

Mekkora a szinuszos feszültségek és áramok frekvenciája?

- $25 \frac{rad}{s}$,
- $50 \frac{rad}{s}$,
- $314 \frac{rad}{s}$,
- 25Hz,
- 50Hz,
- 100Hz.

Mekkora a hatásos teljesítmény?

- 0,
- 40W,
- 80VA,
- 160W,
- 166VA,
- 640W.

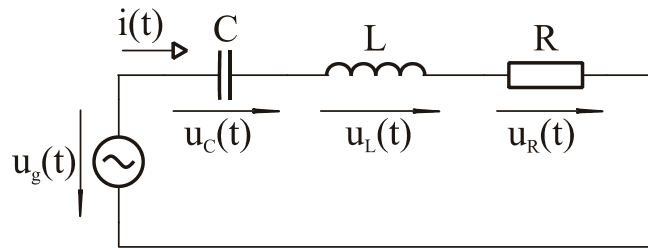
Mekkora az eredő látszólagos ellenállás?

- 0,
- 25Ω ,
- 50Ω ,
- $70,7\Omega$,
- 100Ω ,
- $141,4\Omega$,
- $\infty\Omega$.

5. Feladat

Soros rezgőkör (31.14. ábra) elemei:

$$R=10\Omega, \quad L=1\text{mH}, \quad C=1\text{nF}.$$



31.14. ábra

A rezgőkört $U_g=10\text{V}$ feszültségű szinuszos feszültséggenerátorra kapcsoljuk.

Válassza ki a helyes végeredményeket!

Mekkora a rezonancia-körfrekvencia?

$$10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$10^6 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$10^{-12} \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$1\text{kHz},$$

$$1\text{MHz},$$

$$1\text{GHz}.$$

Mekkora a jósági tényező?

$$1,$$

$$5,$$

$$10,$$

$$50,$$

$$100,$$

$$500.$$

Mekkora a feszültség az ellenálláson rezonancián?

$$0\text{V},$$

$$5\text{V},$$

$$10\text{V},$$

$$50\text{V},$$

$$100\text{V},$$

$$500\text{V}.$$

Mekkora a feszültség a kondenzátoron rezonancián?

$$0\text{V},$$

$$5\text{V},$$

$$10\text{V},$$

$$100\text{V},$$

$$500\text{V},$$

$$1000\text{V}.$$

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ.....	3
16. Változó feszültség és áram jellemzése, jelölése. Ellenállás viselkedése változó áram esetén	5
17. Kondenzátor és tekercs mibenléte, jellemzése.....	5
18. Be- és kikapcsolási jelenségek soros RC körben.....	7
19. Be- és kikapcsolási jelenségek soros RL körben.....	11
20. Váltakozóáramú hálózatok. Periodikus időfüggvény matematikai jellemzése. A periódusidő. Fourier tétele. Szinuszos feszültség- illetve áram-időfüggvény jellemzése az időtartományban. Frekvencia és körfrekvencia.....	15
21. Ellenállás, tekercs és kondenzátor viselkedése váltakozóáramú körben. Frekvenciafüggés	18
22. Szinuszos feszültség- illetve áram-időfüggvény komplex leírása. Komplex időfüggvény és komplex amplitúdó.....	21
23. A komplex impedancia fogalma és elemei.....	24
24. Soros RC kapcsolás analízise.....	27
25. Soros RL kapcsolás analízise.....	30
26. Soros RLC kapcsolás, rezgőkör. Rezonancia, rezonanciafrekvencia. Jósági tényező. Feszültség-áram vektorábrák különböző frekvenciákon. Az elemek feszültségeinek és áramának frekvenciafüggése. Az impedancia frekvenciafüggése. Párhuzamos rezgőkör.....	32
27. Teljesítmény-időfüggvény és átlagteljesítmény ellenálláson. A hatásos teljesítmény.....	37
28. Teljesítmény-időfüggvény és átlagteljesítmény kondenzátoron illetve tekercsen. A meddő teljesítmény.....	40
29. Váltakozóáramú teljesítménytípusok és kiszámításuk általános impedancia esetén. A teljesítmény komplex vektora. A teljesítménytényező. A fázisjavítás.....	42
30. Szimmetrikus háromfázisú hálózatok. Vonali- és fázisjellemzők. Aszimmetria.....	44
31. Számítási feladatok gyakorlása.....	47
TARTALOMJEGYZÉK.....	59