

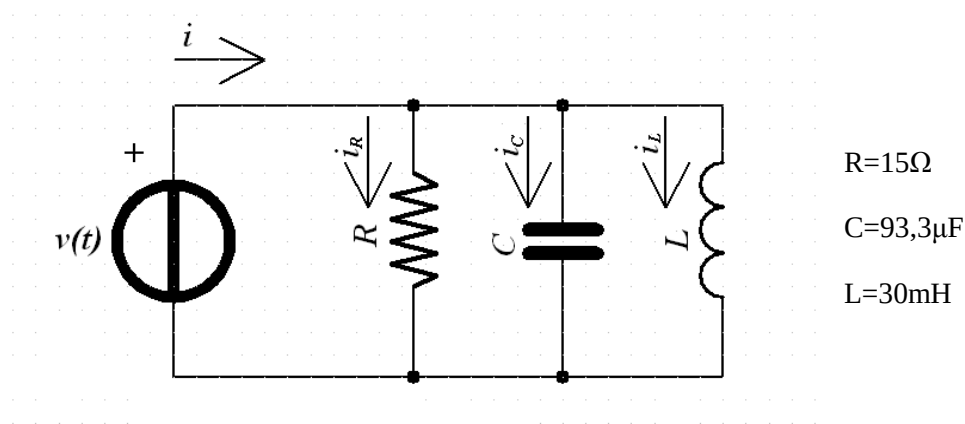
4. Gyakorlat: Állandósult állapotú AC áramkörök analízise

Célkitűzés:

- Idő/komplex amplitúdó tartomány közötti átmenet bemutatása
- Hálózati tételek érvényességét bemutatni
- Ragaszkodjunk az anyaghoz, a villamosmérnöki trükköket (pl.:benézek) NE mutassuk be
- Használjunk különféle jelöléseket
- A radián nem dimenzió, csak az egyértelműsítés miatt jelöljük
- A dimenziókat érdemes beírni/ellenőrizni, mert így az esetleges hibák könnyen felismerhetők

1. Példa

Az alábbi kapcsolásban $v(t) = 120\sqrt{2} \cos(1000t + 90^\circ)$ V határozzuk meg az $i(t)$ időfüggvényt



Transzformáció a komplex amplitúdók tartományába

$$v(t) = 120\sqrt{2} \cos(1000t + 90^\circ) \text{ V} \Rightarrow V = 120\angle 90^\circ \text{ V}$$

Impedanciák:

$$\omega = 1000 \text{ rad/s}$$

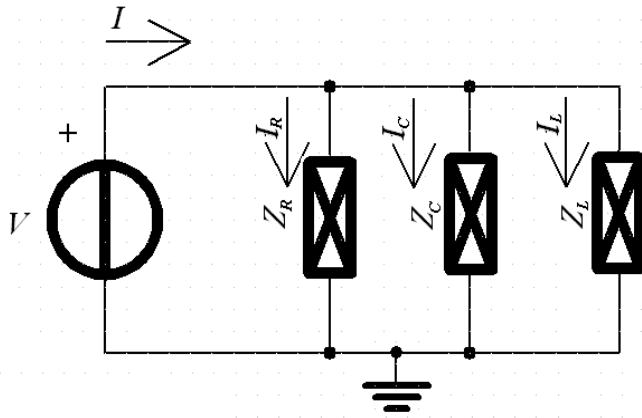
$$Z_R = (15 + j0)\Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = (0 - j12)\Omega = 12\angle -90^\circ\Omega$$

$$Z_L = j\omega L = (0 + j30)\Omega = 30\angle 90^\circ\Omega$$

a. Kirchhoff egyenletekkel

Kapcsolás a transzformált tartományban



$$I_R = \frac{V}{Z_R} = \frac{120\angle 90^\circ}{15} = 8\angle 90^\circ \text{ A}$$

$$I_C = \frac{V}{Z_C} = \frac{120\angle 90^\circ}{12\angle -90^\circ} = 10\angle 180^\circ \text{ A}$$

$$I_L = \frac{V}{Z_L} = \frac{120\angle 90^\circ}{30\angle 90^\circ} = 4\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$I = I_R + I_C + I_L = 8\angle 90^\circ + 10\angle 180^\circ + 4\angle 0^\circ$$

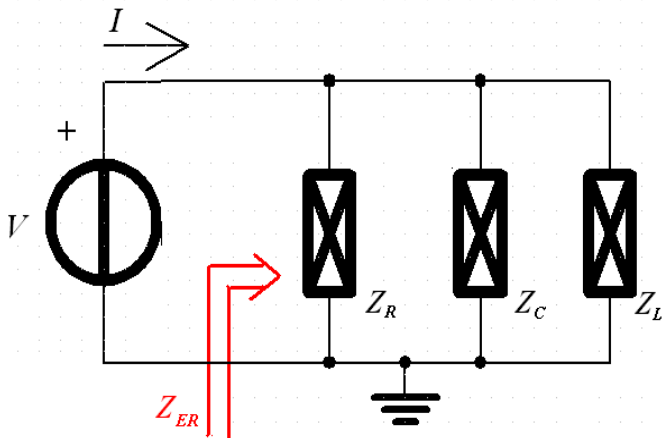
$$I = (0 + j8) + (-10 + j0) + (4 + j0) = (-6 + j8) = 10\angle 126.9^\circ \text{ A}$$

Inverz transzformáció:

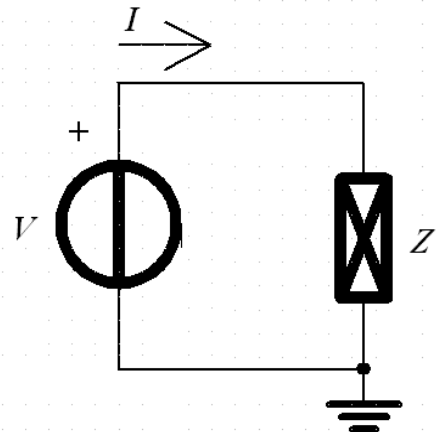
$$I = 10\angle 126.9^\circ \text{ A} \Rightarrow i(t) = 10\sqrt{2} \cos(1000t + 126.9^\circ) \text{ A}$$

b. Impedanciákkal

Kapcsolás a transzformált tartományban



$\Rightarrow$



$$Z_{ER} = Z_R \parallel Z_C \parallel Z_L = (15 + j0) \parallel (0 - j12) \parallel (0 + j30) = (15 + j0) \parallel \left(\frac{12 \cdot 30}{-j12 + j30} \right) = (15 + j0) \parallel \frac{360}{0 + j18} =$$

$$= \frac{15 \cdot 360}{360 + j18 \cdot 15} = \frac{5400}{360 + j270} = \frac{5400}{450\angle 36.9^\circ} = 12\angle -36.9^\circ \Omega$$

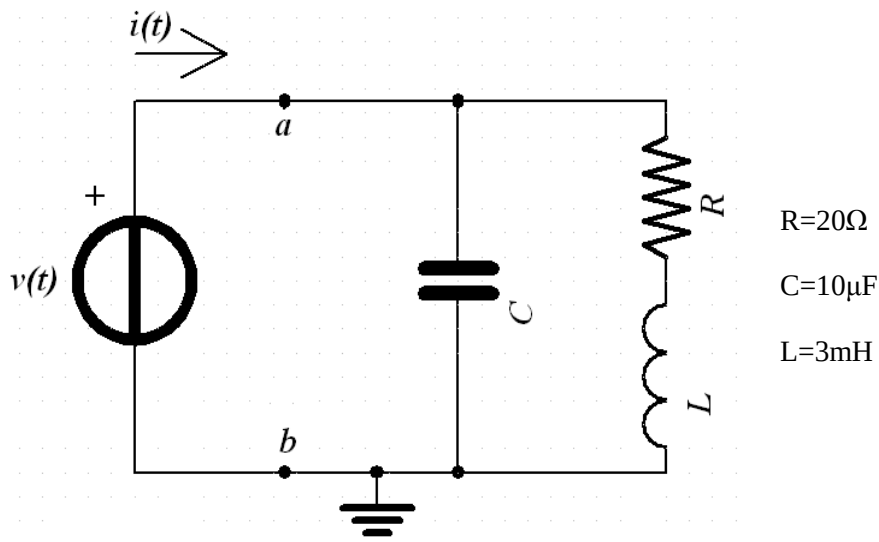
$$I = \frac{V}{Z_{ER}(\omega)} \Big|_{\omega=1krad/sec} = \frac{120\angle 90^\circ}{12\angle -36,9^\circ} = 10\angle 126,9^\circ \text{ A}$$

Inverz transzformáció

$$I = 10\angle 126,9^\circ \quad \Rightarrow \quad i(t) = 10\sqrt{2} \cos(1000t + 126,9^\circ) \text{ A}$$

2. Példa

Az a-b kapocspárra számított eredő impedancia alapján határozza meg $i(t)$ értékét, ha $v(t) = 12\sqrt{2} \cos(5000t) \text{ V}$



Transzformáció a komplex amplitúdó tartományba

$$v(t) = 12\sqrt{2} \cos(5000t) \text{ V} \quad \Rightarrow \quad V = 12\angle 0^\circ \text{ V}$$

Impedanciák

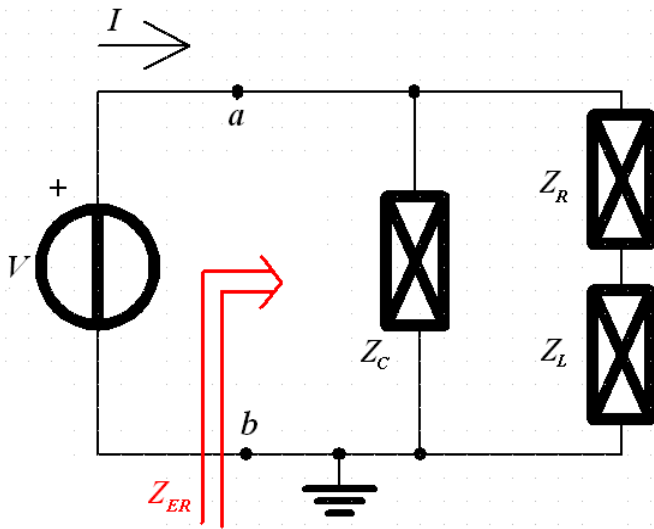
$$\omega = 5 \text{ krad / s}$$

$$Z_R = (20 + j0)\Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = (0 - j20)\Omega = 20\angle -90^\circ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = (0 + j15)\Omega = 15\angle 90^\circ \Omega$$

Kapcsolás a transzformált tartományban



$$\begin{aligned}
 Z_{ER} &= Z_C \parallel (Z_R + Z_L) = (-j20) \parallel (20 + j15) = \\
 &= \frac{(-j20)(20 + j15)}{-j20 + 20 + j15} = \frac{300 - j400}{20 - j5} = \\
 &= \frac{500 \angle -53,1^\circ}{20,62 \angle -14,0^\circ} = 24,3 \angle -39,1^\circ \Omega
 \end{aligned}$$

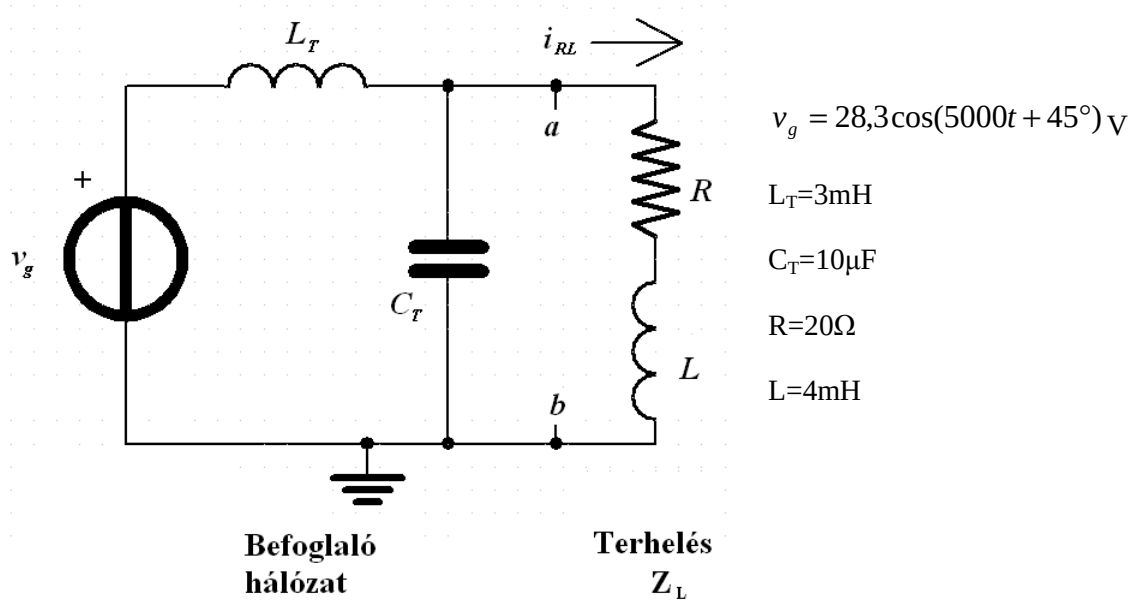
$$I = \frac{V}{Z_{ER}(\omega)} \bigg|_{\omega = \frac{5\text{krad}}{s}} = \frac{12 \angle 0^\circ}{24,3 \angle -39,1^\circ} = 0,49 \angle 39,1^\circ \text{ A}$$

Inverz transzformáció

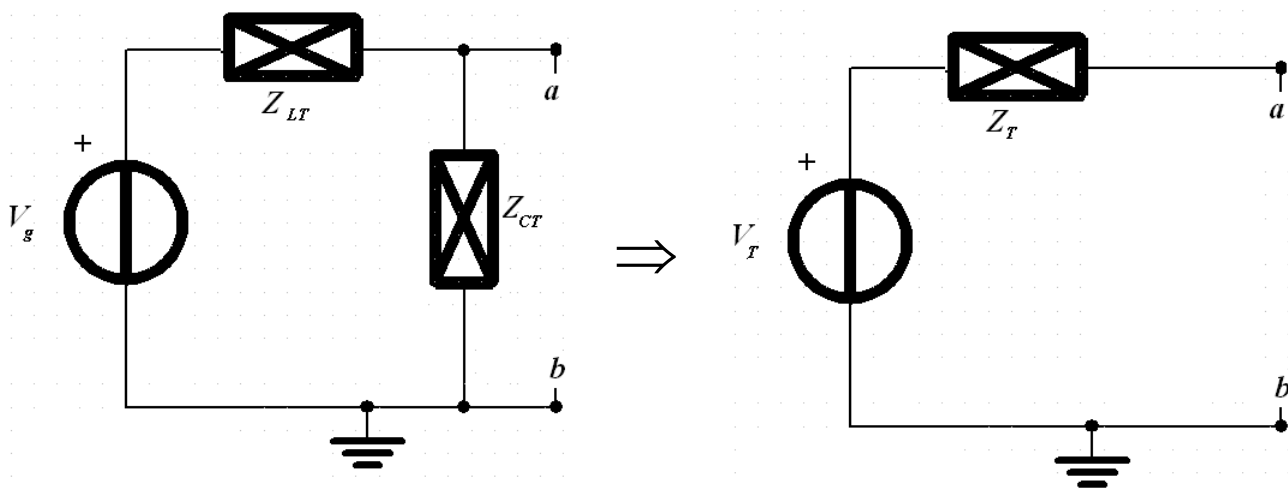
$$I = 0,49 \angle 39,1^\circ \text{ A} \quad \Rightarrow \quad i(t) = 0,49\sqrt{2} \cos(5000t + 39,1^\circ) \text{ A}$$

3. Példa

Az a-b kapocspárra meghatározott Thèvenin ekvivalenssel határozzuk meg $i_{RL}(t)$ időfüggvényt.



Thèvenin helyettesítő kép meghatározása a transzformált tartományban



$$V_g = \frac{28,3}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = 20 \angle 45^\circ \text{ V}$$

$$\omega = 5 \text{ krad/s} \Rightarrow Z_{LT} = j\omega L_T = j15 \Omega \Rightarrow Z_{CT} = \frac{1}{j\omega C_T} = -j20 \Omega$$

V_T meghatározása:

- Szakadással való lezárás
- Feszültségosztó tétel

$$V_T = V_{OC} = V_g \frac{Z_{CT}}{Z_{CT} + Z_{LT}} = 20e^{j45} \frac{-j20}{-j20 + j15} = 80\angle 45^\circ \text{ V}$$

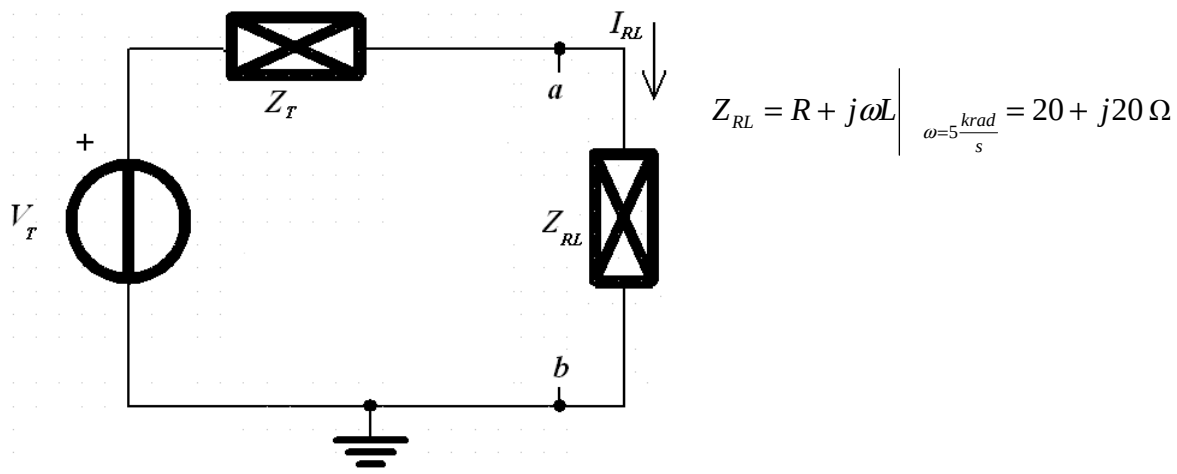
ISC meghatározása:

- Rövidzárral való lezárás

$$I_{SC} = \frac{V_g}{Z_{LT}} = \frac{20\angle 45^\circ}{j15} = \frac{20\angle 45^\circ}{15\angle 90^\circ} = 1,33e^{j45^\circ} \text{ A}$$

Thèvenin ekvivalens belső ellenállása

$$Z_T = \frac{V_T}{I_{SC}} = \frac{80\angle 45^\circ}{1,33\angle -45^\circ} = 60\angle 90^\circ \Omega$$



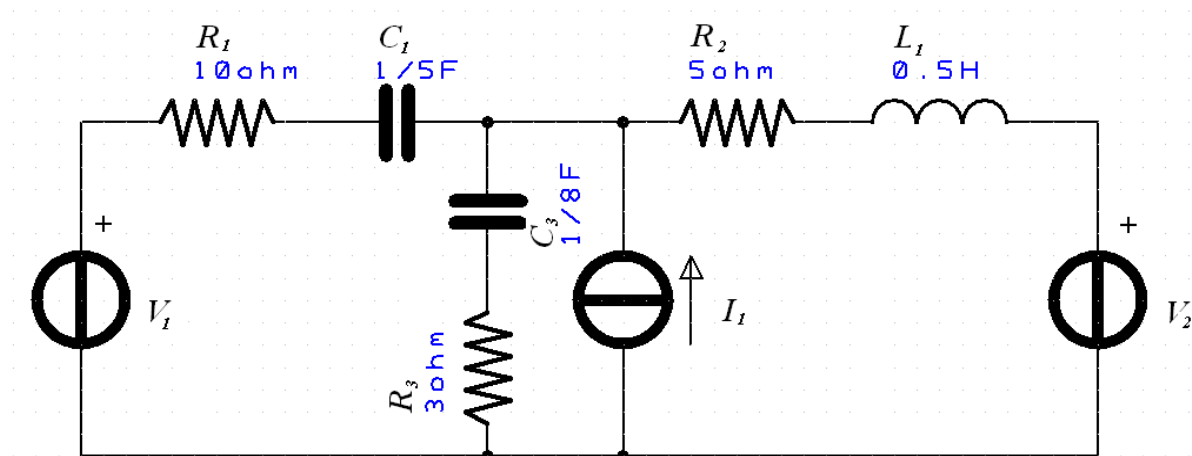
$$I_{RL} = \frac{V_T}{Z_T + Z_{RL}} = \frac{80\angle 45^\circ}{0 + j60 + 20 + j20} = \frac{80\angle 45^\circ}{82,61\angle 76^\circ} = 0,97\angle -31^\circ \text{ A}$$

Inverz transzformáció

$$I = 0,97\angle -31^\circ \quad \Rightarrow \quad i(t) = 0,97\sqrt{2} \cos(5000t - 31^\circ) \text{ A}$$

4. Példa

Az alábbi állandósult állapotú AC áramkörben határozzuk meg az $i(t)$ áramot az időtartományban.

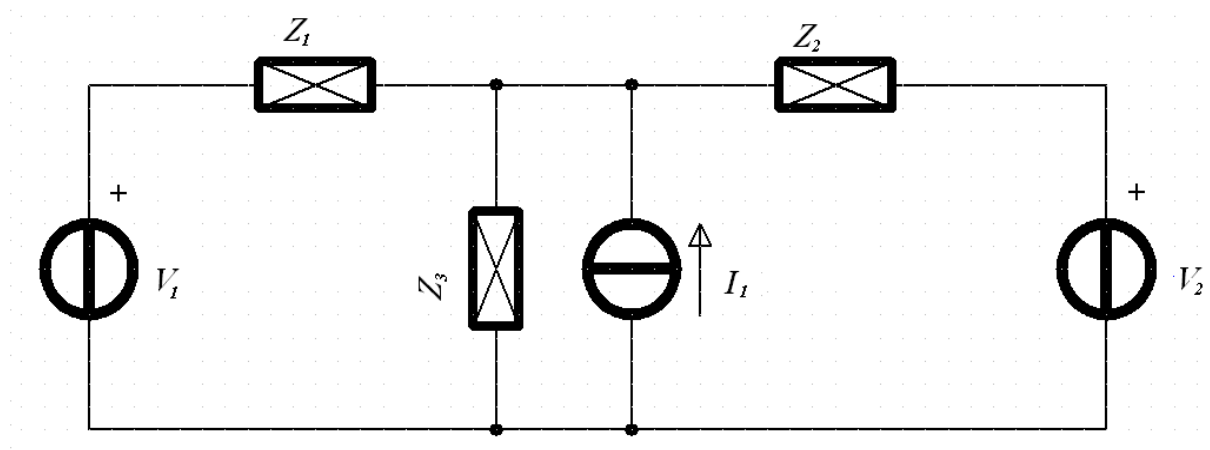


$$v_1 = V_{1\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) \Rightarrow V_{1\text{eff}} = 5V \quad \Phi_1 = \frac{1}{2} \text{rad} \quad \omega_1 = 5 \text{rad/sec}$$

$$v_2 = V_{2\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega_2 t + \Phi_2) \Rightarrow V_{2\text{eff}} = 10V \quad \Phi_2 = \frac{3}{2} \text{rad} \quad \omega_2 = 5 \text{rad/sec}$$

$$i_1 = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \sin(\omega_1 t + \Phi_1) \Rightarrow I_{\text{eff}} = 1A \quad \Phi_1 = \frac{1}{2} \text{rad} \quad \omega_1 = 8 \text{rad/sec}$$

1. Átrajzolás, és AC impedanciák felírása



$$Z_1(j\omega) = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \Omega \Rightarrow Z_1(j\omega) = 10 + \frac{1}{j\omega 0.2} \Omega$$

$$Z_2(j\omega) = R_2 + j\omega L_2 \Omega \Rightarrow Z_2(j\omega) = 5 + j\omega 0.5 \Omega$$

$$Z_3(j\omega) = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \Omega \Rightarrow Z_3(j\omega) = 3 + \frac{1}{j\omega 0.125} \Omega$$

VEDD ÉSZRE, IMPEDANCIA FÜGGVÉNYEK MIND ω_1 -EN, MIND ω_2 -ÖN ÉRVÉNYESEK!

2. Gerjesztéshez tartozó komplex amplitúdók felírása

$$v_1(t) = V_{1eff} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) \Rightarrow V_1 = 5 \cdot \sqrt{2} \angle \frac{1}{2} \Rightarrow 5 \cdot \sqrt{2} \angle 90^\circ \text{ V } \omega_1 = 5 \text{ rad/sec}$$

$$v_2(t) = V_{2eff} \sqrt{2} \cos(\omega_1 t + \Phi_2) \Rightarrow V_2 = 10 \cdot \sqrt{2} \angle -\frac{1}{2} \Rightarrow 10 \cdot \sqrt{2} \angle -90^\circ \text{ V } \omega_1 = 5 \text{ rad/sec}$$

$$i_1(t) = I_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega_2 t + \Phi_3) \Rightarrow I_1 = 1 \cdot \sqrt{2} \angle \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \cdot \sqrt{2} \angle 90^\circ \text{ A } \omega_2 = 8 \text{ rad/sec}$$

A mérés során minden alkalommal az effektív értéket használjuk szinuszos hullámforma esetén. A matematikai összefüggéseket pedig a csúcértékekkel kell helyettesíteni. Azért szerepel a $\sqrt{2}$ -es szorzó, mert az effektív értékből így számolható a csúcérték szinuszos hullámforma esetén.

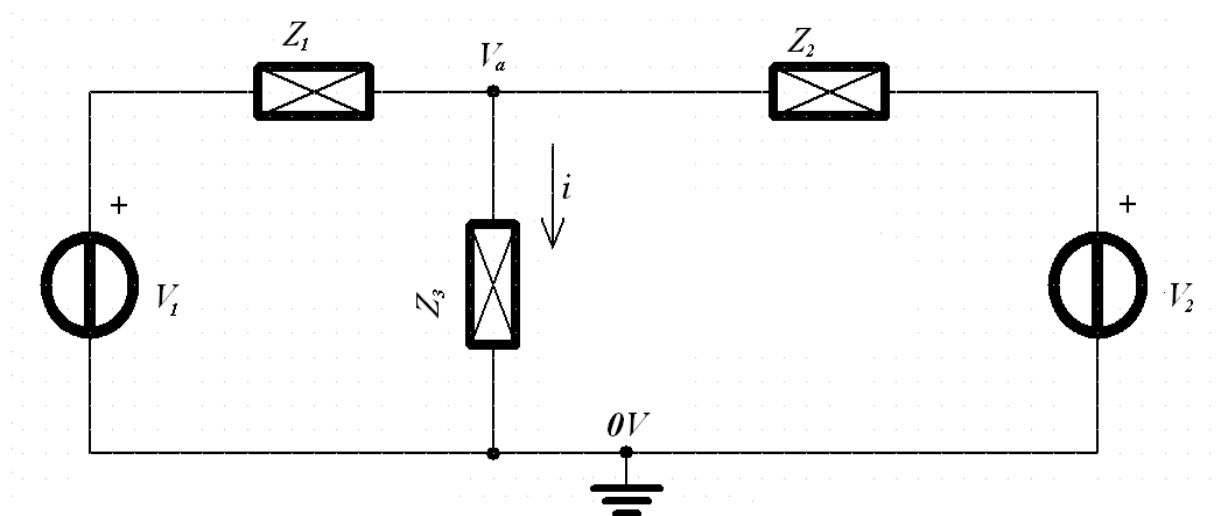
Mivel két frekvencia van, szuperpozíciót kell alkalmazni:

$$\omega_1 \Rightarrow i^{\omega_1}(t)$$

$$\omega_2 \Rightarrow i^{\omega_2}(t)$$

$$i(t) = i^{\omega_1}(t) + i^{\omega_2}(t)$$

3. Számítás ω_1 -en, csomóponti potenciálokkal



$$\frac{V_1 - V_a}{Z_1(j\omega_1)} - \frac{V_a}{Z_3(j\omega_1)} + \frac{V_2 - V_a}{Z_2(j\omega_1)} = 0$$

$$Z_1(j\omega) = 10 + \frac{1}{j\omega 0.2} \Omega \Rightarrow \omega = \omega_1 \Rightarrow (10 - j)$$

$$Z_2(j\omega) = 5 + j\omega 0.5 \Omega \Rightarrow \omega = \omega_1 \Rightarrow (5 + j2.5)$$

$$Z_3(j\omega) = 3 + \frac{1}{j\omega 0.125} \Omega \Rightarrow \omega = \omega_1 \Rightarrow (3 - j1.6)$$

Feszültségek helyettesítése effektív értékben!

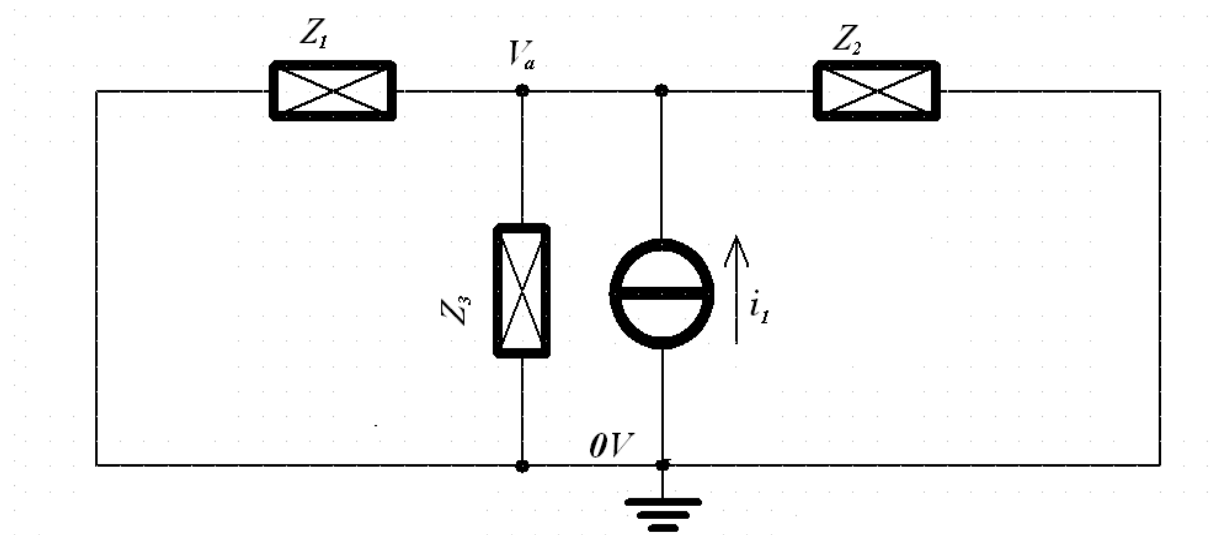
$$V_a = \frac{Z_2 Z_3 V_1 + Z_1 Z_3 V_2}{Z_3 Z_2 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3} \Big|_{\omega=\omega_1} = \frac{(5 + j2.5)(3 - j1.6)(0 + j5) + (10 - j)(3 - j1.6)(10 - j)}{(3 - j1.6)(5 + j2.5) + (10 - j)(5 + j2.5) + (10 - j)(3 - j1.6)}$$

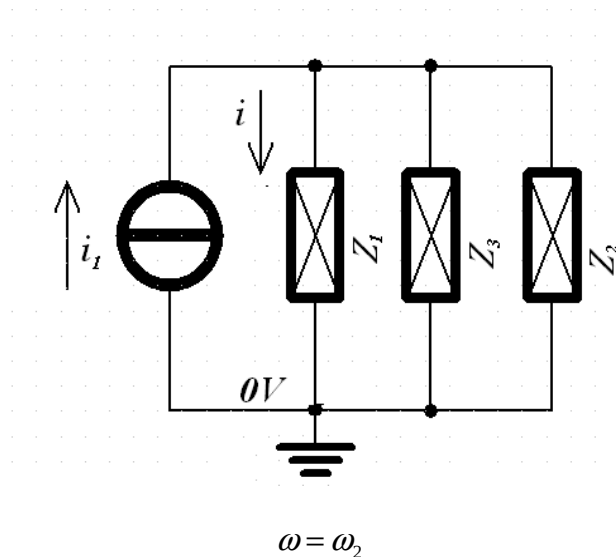
$$\frac{(2.5 + j9.5) + (265 - j218.4)}{(19 - j0.5) + (52.5 + j20) + (28.4 - j19)} = \frac{-187.5 - j183.4}{99.9 + j0.5} = \frac{-1.89 - j1.86}{2.67 - j1.25} V_{eff}$$

$$I^{\omega_1} = \frac{V_a}{Z_3(j\omega_1)} = \frac{(-1.89 - j1.86)}{(3 - j1.6)} = \frac{-0.223 - j0.750}{0.866 + j0.045} = \frac{0.784 \angle -1.867 \text{ rad}}{0.867 \angle 0.0527 \text{ rad}} A$$

$$i^{\omega_1}(t) = \sqrt{2} \cdot |I^{\omega_1}| \cos(\omega_1 t + \angle I^{\omega_1}) = \sqrt{2} \cdot 0.784 \cos(5t + 0.0527) A$$

4. Számítás ω_2 -ön, áramosztóval





$$Z_1(j\omega) = 10 + \frac{1}{j\omega 0.2} \Omega \Rightarrow \omega = \omega_2 \Rightarrow (10 - j1,6)$$

$$Z_2(j\omega) = 5 + j\omega 0.5 \Omega \Rightarrow \omega = \omega_2 \Rightarrow (5 + j4)$$

$$Z_3(j\omega) = 3 + \frac{1}{j\omega 0.125} \Omega \Rightarrow \omega = \omega_2 \Rightarrow (3 - j)$$

$$Z_e(j\omega_2) = Z_1(j\omega_2) \parallel Z_2(j\omega_2) = \frac{(10 - j1,6)(5 + j4)}{(10 - j1,6) + (5 + j4)} = \frac{56,4 + j32}{15 + j2,4} = 3,99 + j1,49 \Omega$$

Az effektív áramot helyettesítjük.

$$I^{\omega_2} = I_1 \frac{Z_e(j\omega_2)}{Z_3(j\omega_2) + Z_e(j\omega_2)} = \frac{j}{(3 - j) + (3,99 + j1,49)} (3,99 + j1,49) = \frac{-0,172 + j0,582}{0,583 - j0,1722} = 0,608 \angle 1,876 \text{ rad, } \cancel{0}$$

$$i^{\omega_2}(t) = \sqrt{2} \cdot |I^{\omega_2}| \sin(\omega_2 t + \angle I^{\omega_2}) = \sqrt{2} \cdot 0.608 \cdot \sin(8t + 1,876) \text{ A}$$

5. Szuperpozíció értelmében a megoldás a két áram összege

$$i(t) = i^{\omega_1}(t) + i^{\omega_2}(t) = \sqrt{2} \cdot 0,867 \cos(5t + 0,0527) + \sqrt{2} \cdot 0.608 \cdot \sin(8t + 1,876) \text{ A}$$