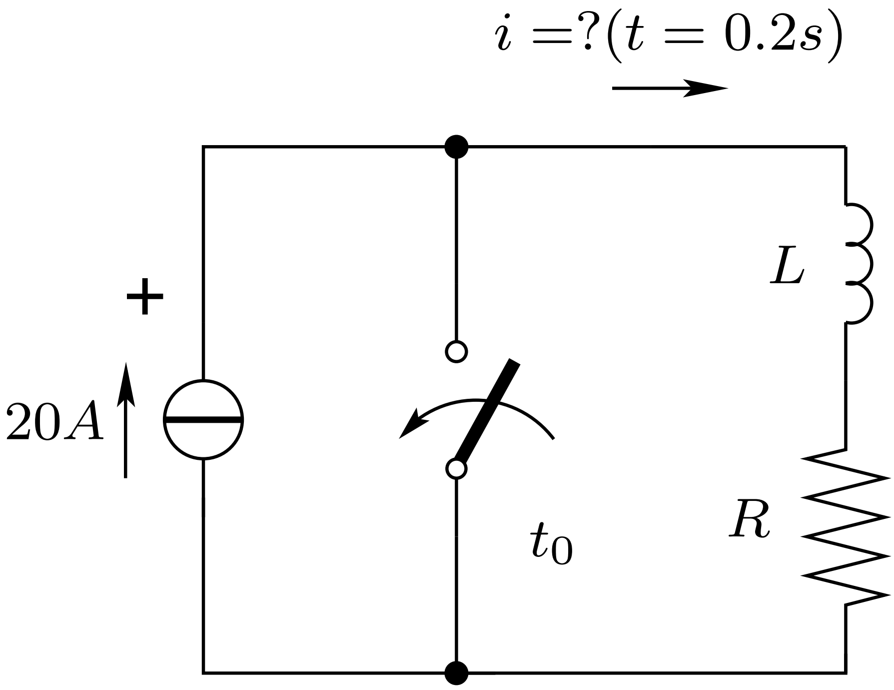
1. Feladat Elsőrendű, tranziens kiszámítása.

Határozza meg az $i(t)$ áramot, ha a kapcsoló $t = 0$ időpontban átkapcsol! Határozza meg az $i(t)$ áramot a $t = 0,2$ s időpontban!
(Az áramgenerátor kapcsain a $t > 0$ időben fellépő szakadás kezelése a feladat lényegi megoldása szempontjából irreleváns, ezért annak tárgyalásától eltekintünk. Hasonló esetekben ugyanígy teszünk a gyakorlat során.)



Megoldás

A megoldás menete a következő:

1. Az átkapcsolás után Kirchhoff huroktörvényének alkalmazása a hálózatban felvett referenciairányoknak megfelelően (rajz a következő oldalon):

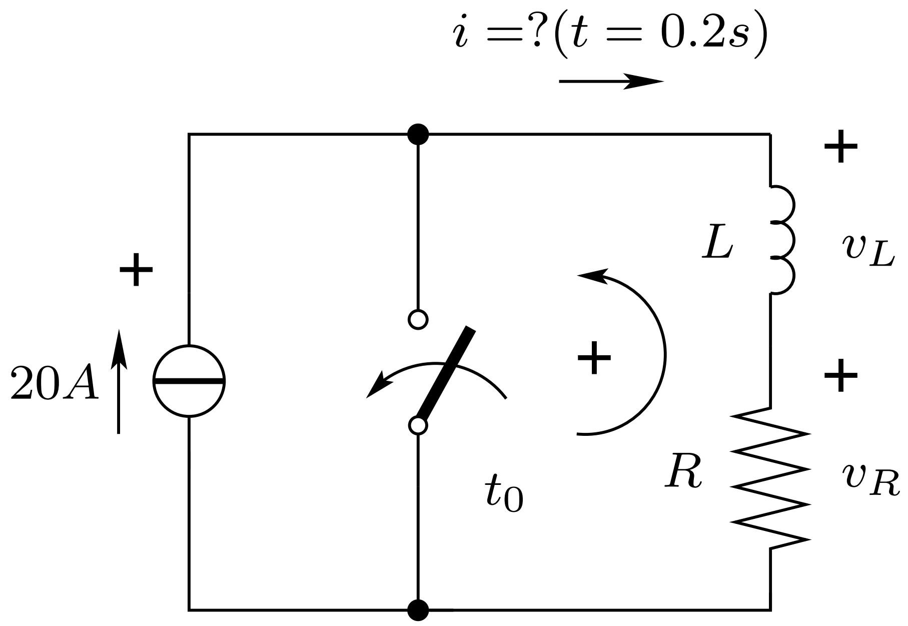
$$\sum v = 0 = -v_L - v_R = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri \tag{1}$$

2. Homogén diff. egyenlet felírása:

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2}$$

3. Megoldás keresése $i = Ae^{st}$ formában.

$$i = Ae^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st} \tag{3}$$



4. Visszahelyettesítve (3) egyenletet a (2) egyenletbe kapjuk, hogy:

$$Ae^{st}\left(R + sL\right) = 0 \tag{4}$$

Az $Ae^{st} = 0$ egyeneletet a triviális megoldást adja, hiszen ekkor $i = 0$. Az $(R + sL) = 0$ egyeneletet megoldva a gyöke:

$$s = -\frac{R}{L} \tag{5}$$

ahol a

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{6}$$

neve az időállandó. Vedd észre, a példában bemutatott kapcsolás egy egy időállandós rendszer, ahol egy energiatároló elem van. Ezen az áramkörök matematikai modellje egy elsőrendű lineáris differenciál egyenlet.

5. A hálózat vizsgálatával a hiányzó A paramétert is meghatározhatjuk.

Mivel az induktivitáson folyó áram az időnek folytonos függvénye, a kapcsoló $t = 0+$ időpontjában az i áram: $i = I_0 = Ae^0 = A = 20$ A.

Így:

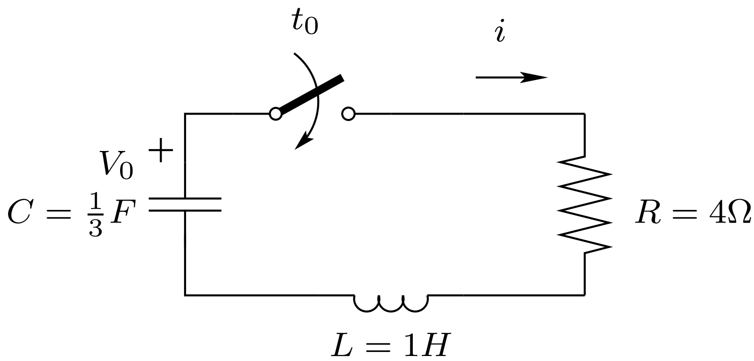
$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = 20e^{-\frac{10}{2}t} = 20e^{-5t} \text{ A} \tag{7}$$

A $t = 0.2$ s időpontban pedig:

$$i = 20e^{-5 \cdot 0.2} = 20 \cdot 0.368 = 7.36 \text{ A} \tag{8}$$

2. Feladat Másodrendű, tranziens kiszámítása, valós gyökök.

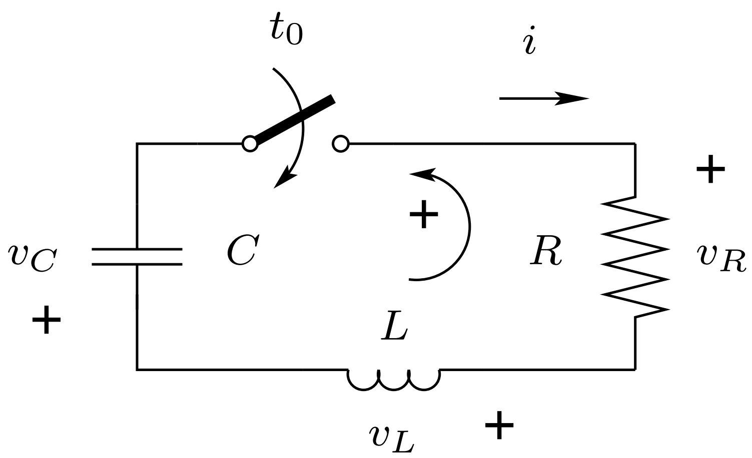
Határozza meg az $i(t)$ áramot, ha a kapcsoló $t = 0$ időpontban átkapcsol!



Megoldás

A megoldás menete a következő:

1. Kirchhoff huroktörvényének alkalmazása a hálózatban a felvett referenciairányoknak megfelelően:



$$\sum v = 0 = -v_L - v_R - v_C + V_0 = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri + V_0 - \frac{1}{C}\int_0^t i d\tau \qquad (9)$$

2. Homogén diff. egyenlet felírása, az inegrál eltüntetése deriválással:

$$\frac{1}{C}i + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad (10)$$

3. Megoldás keresése $i = Ae^{st}$ formában.

$$i = Ae^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st}, \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = s^2 Ae^{st} \tag{11}$$

4. Visszahelyettesítve (11) egyenletet (10) egyenletbe kapjuk, hogy:

$$Ae^{st}\left(\frac{1}{C} + sR + s^2 L\right) = 0 \tag{12}$$

Az $Ae^{st} = 0$ egyeneletet a triviális megoldást adja, hiszen ekkor $i = 0$. A $\left(\frac{1}{C} + sR + s^2 L\right) = 0$ másodfokú egyeneletet megoldva a gyökök:

$$s_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} \tag{13}$$

vagy,

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{14}$$

Így a két gyök miatt az általános megoldásunk így módosul:

$$i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{15}$$

Behelyettesítve a paramétereket:

$$s_{1,2} = -\frac{4}{2 \cdot 1} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2 \cdot 1}\right)^2 - \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{3}}} = -2 \pm 1 \tag{16}$$

A megoldás eddig:

$$i = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t} \tag{17}$$

5. A hálózat vizsgálatával a hiányzó A_1 és A_2 paramétereket is meghatározhatjuk. Mivel $t = 0+$, $v_C = v_C(0-) = -V_0$ és $i_L = i_L(0-) = 0$:

$$i = i_0 = A_1 e^0 + A_2 e^0 = A_1 + A_2 \tag{18}$$

$$A_1 = -A_2 \tag{19}$$

és $v_R = 0$ (mert $i = 0$), $v_L = -v_C = V_0$, azaz $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = V_0$, azaz $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{V_0}{L}$.
Deriválva az idő szerint (17)-t, majd t-be 0-át helyettesítve:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -A_1 e^{-t} - 3A_2 e^{-3t} = -A_1 e^0 - 3A_2 e^0 = -A_1 - 3A_2 = \frac{V_0}{L} \tag{20}$$

Majd behelyettesítve (19)-t:

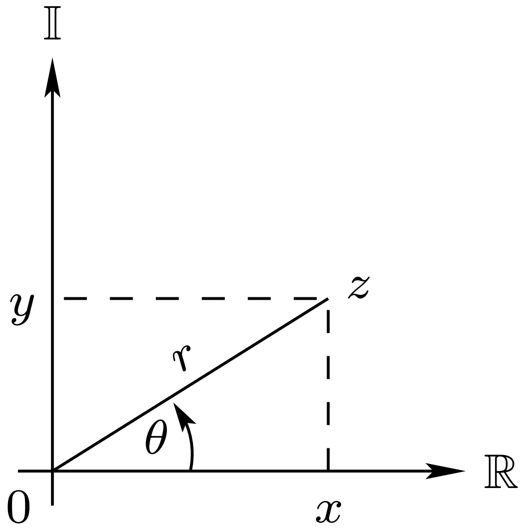
$$-A_1 + 3A_1 = 2A_1 = \frac{V_0}{L} \tag{21}$$

$$A_1 = \frac{V_0}{2L} = \frac{V_0}{2}, A_1 = -A_2 = -\frac{V_0}{2L} \tag{22}$$

Visszahelyettesítve a paramétereket (17)-be a végeredmény valós $s_{1,2}$ gyökök esetén:

$$i = \frac{V_0}{2} e^{-t} - \frac{V_0}{2} e^{-3t} \tag{23}$$

Komplex számok ismétlés



$z = x + j \cdot y$ kanonikus (algebrai) alak, ahol $j = \sqrt{-1}$, $j^2 = -1$. $x = Re\{z\}$ a valós rész, $y = Im\{z\}$ a képzetes rész.

$z = |z| \angle(\theta) = r\angle(\theta)$ a polár alak. A polár alak és a kanonikus alak között az összefüggést a következő képletek adják:
$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$, vagy $x = r \cdot \cos\theta, y = r \cdot \sin\theta$

Így $z = x + j \cdot y = r\angle(\theta) = r \cdot \cos\theta, y = r \cdot \sin\theta$. Ebből $z = r \cdot e^{j\theta}$ az exponenciális alak.

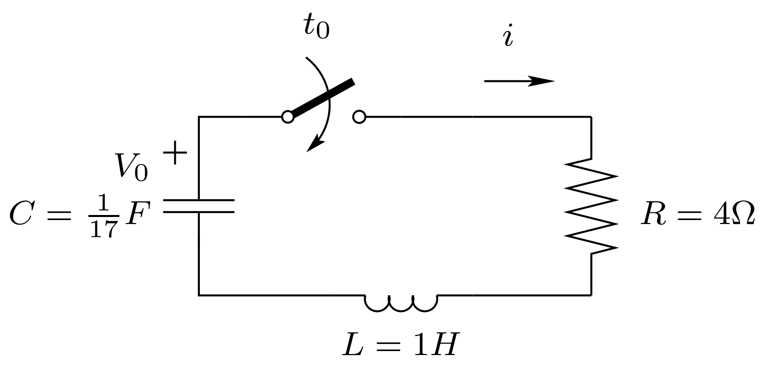
Példa:
$12\angle - 60° = 12\cos(-60°) + j \cdot 12\sin(-60°) = 6 - j10.39$

Példa:
$\frac{(2+j5)(8e^{j10})}{2+j4+2\angle-40\cdot} = ?$
$2 + j5 = \sqrt{2^2 + 5^2}\angle\left[\tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right] = 5.385\angle 68.2°$
$(2 + j5)(8e^{j10}) = (5.385\angle 68.2°)(8\angle 10°) = 43.08\angle 78.2°$
$2 + j4 + 2\angle - 40° = 2 + j4 + 2\cos(-40°) + j2\sin(-40°) = 3.532 + j2.714 = 4.454\angle 37.54°$
Ezért:
$\frac{(2+j5)(8e^{j10})}{2+j4+2\angle-40°} = \frac{43.08\angle 78.2°}{4.454\angle 37.54°} = 9.672\angle 40.66°$

Tihanyi tanár úr javaslata:
Tegyük be a komplex számokra vonatkozó alapműveleteket, különösen az osztást

3. Feladat Másodrendű, tranziens kiszámítása, komplex gyökök.

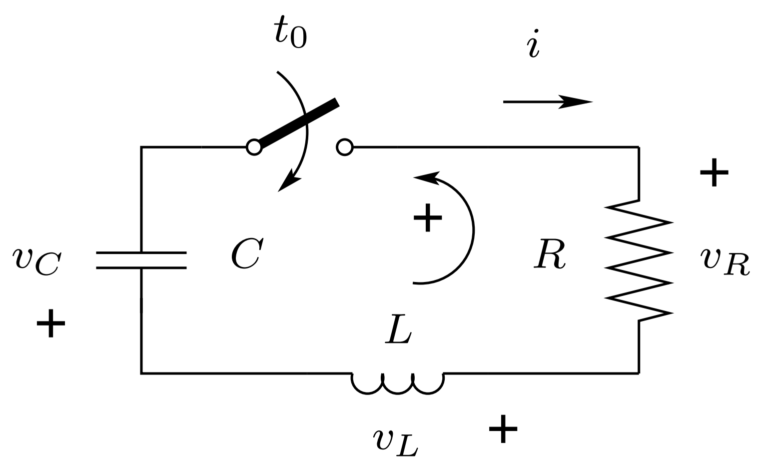
Határozza meg az $i(t)$ áramot, ha a kapcsoló $t = 0$ időpontban átkapcsol!



Megoldás

A megoldás menete a következő:

1. Kirchhoff huroktörvényének alkalmazása a hálózatban felvett referenciairányoknak megfelelően:



$$\sum v = 0 = -v_L - v_R - v_C + V_0 = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri + V_0 - \frac{1}{C}\int_0^t i d\tau \tag{24}$$

2. Homogén diff. egyenlet felírása, az inegrál eltüntetése deriválással:

$$\frac{1}{C}i + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{25}$$

3. Megoldás keresése $i = Ae^{st}$ formában.

$$i = Ae^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = s^2 Ae^{st} \tag{26}$$

4. Visszahelyettesítve (26) egyenleteket (25) egyenletbe kapjuk, hogy:

$$Ae^{st}\left(\frac{1}{C} + sR + s^2 L\right) = 0 \tag{27}$$

Az $Ae^{st} = 0$ egyeneletet a triviális megoldást adja, hiszen ekkor $i = 0$, így az $\left(\frac{1}{C} + sR + s^2 L\right) = 0$ másodfokú egyeneletet megoldva a gyökök:

$$s_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} \tag{28}$$

vagy,

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{29}$$

Így a két gyök miatt az általános megoldásunk így módosul:

$$i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{30}$$

Behelyettesítve a paramétereket:

$$s_{1,2} = -\frac{2}{2 \cdot 1} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2 \cdot 1}\right)^2 - \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{17}}} = -1 \pm \sqrt{-16} \tag{31}$$

$$s_1 = -1 + j4, s_2 = -1 - j4 \tag{32}$$

A megoldás eddig:

$$i = A_1 e^{(-1+j4)t} + A_2 e^{(-1-j4)t} \tag{33}$$

A megoldás keresése más formában:
Legyen $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\omega_n^2 = \frac{1}{LC}$, $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega_n^2 - \alpha^2$.
Ekkor $s_1 = -\alpha + j\omega, s_2 = -\alpha - j\omega$, így:

$$i = A_1 e^{(-\alpha+j\omega)t} + A_2 e^{(-\alpha-j\omega)t} \tag{34}$$

Mivel az *Euler* összefüggés szerint $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$ és $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \cdot \sin(\omega t)$, ezért behelyettesítve ezeket (34)-ba és átrendezve az egyenletet kapjuk:

$$i = e^{-\alpha t}\left((A_1 + A_2)\cos(\omega t) + j\,(A_1 - A_2)\cdot\sin(\omega t)\right) \tag{35}$$

$A_1 + A_2$-t jelöljük B_1-gyel és $j\,(A_1 - A_2)$-t jelöljük B_2-vel:

$$i = e^{-\alpha t}\left(B_1\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)\right) \tag{36}$$

A sin() a cos()-nak a fázisbeli eltoltja és a B_1 és a B_2 is egy szám, ezért felírható az alábbi összefüggés:

$$i = A\cdot e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \theta) \tag{37}$$

Ezek után ha a karakterisztikus egyenlet megoldásai komplex számok, akkor (37) egyenletet használjuk általános megoldásnak.

Így ha $\alpha = \frac{R}{2L} = 1$ és $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 4$, akkor

$$i = A\cdot e^{-t}\sin(4t + \theta) \tag{38}$$

Deriválva az idő szerint (38)-t (később kelleni fog):

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -A\cdot e^{-t}\sin(4t + \theta) + 4\cdot A\cdot e^{-t}\cos(4t + \theta) \tag{39}$$

5. $t = 0+$, $i_L = 0$, $\frac{V_0}{L} = V_0$, mert $-v_C = V_0 = v_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

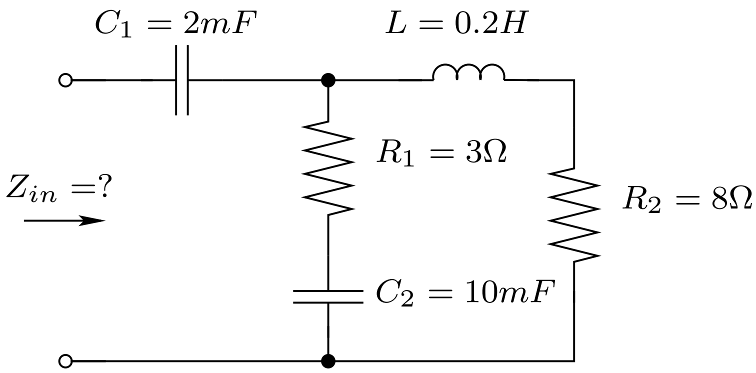
$$i = 0 = A\cdot e^0\sin(0 + \theta) = A\cdot\sin\theta \tag{40}$$

A véges, akkor $\theta = 0$.

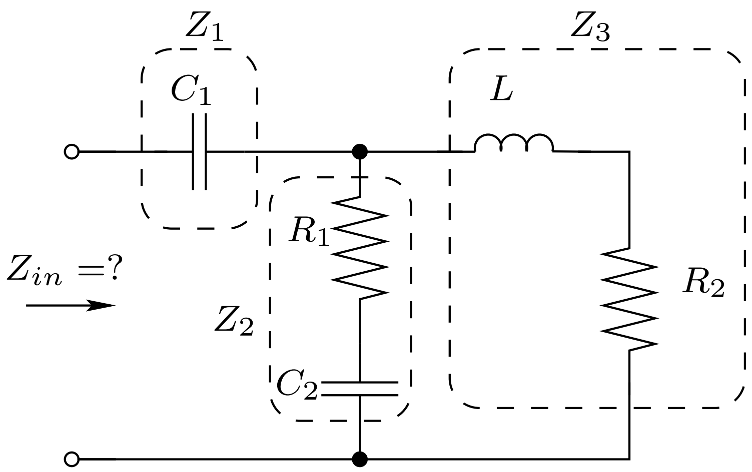
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = V_0 = -A\cdot e^0\sin(0) + 4\cdot A\cdot e^0\cos(0) = 4\ \mathrm{A} \tag{41}$$

4. Feladat Impedancia

Határozza meg a Z_{in} eredő impedanciát ha $\omega = 50$ rad/s!



Megoldás



A megoldás menete a következő:

1. Az áramköri elemek átalakítása impedancia alakra.

   $Z_1 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j50 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = -j10\ \Omega$

   $Z_2 = 3 + \frac{1}{j\omega C} = 3 + \frac{1}{j50 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = (3 - j2)\ \Omega$

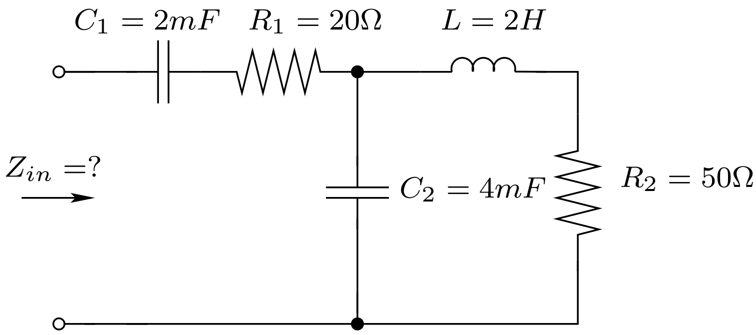
   $Z_3 = 8 + j\omega L = 8 + j50 \cdot 0.2 = (8 + j10)\ \Omega$

2. Az impedanciákkal formálisan úgy számolhatunk tovább, mint az ellenállásokkal.

   $Z_{in} = Z_1 + Z_2 \mid\mid Z_3 = -j10 + \frac{(3-j2)(8+j10)}{11+j8} = -j10 + \frac{(44+j14)(11-j8)}{11^2+8^2}$
   $= -j10 + 3.22 - j1.07 = 3.22 - j11.07\ \Omega$

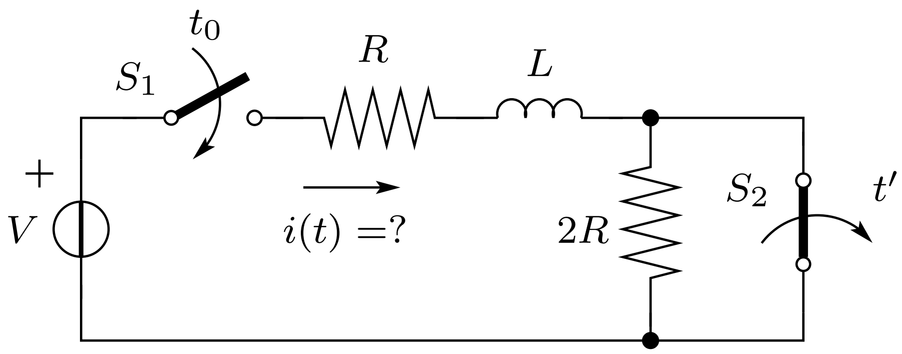
4.b Feladat Impedancia, házi feladat

Határozza meg a Z_{in} eredő impedanciát ha $\omega = 10$ rad/s!



5. Feladat Teljes válasz kiszámítása, 2db kapcsolóval.

Határozza meg az $i(t)$ áramot, ha a kapcsolók $t = 0$ és $t = t'$ időpontban átkapcsolnak!

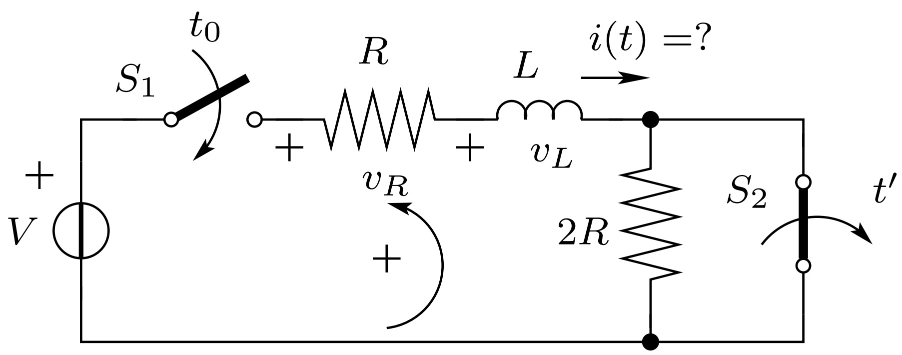


Megoldás

A megoldás menete a következő:

1. Két részre bontódik a feladat. Az első részben $0 < t < t'$ (S_2 zárt állású), a második $t' < t < \infty$ (S_2 nyitott állású).

   0 < t < t' (S_2 zárt állású)
2. Kirchhoff huroktörvényének alkalmazása a hálózatban felvett referenciairányoknak megfelelően:



$$\sum v = 0 = V - v_L - v_R = V - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri \tag{42}$$

3. Homogén diff. egyenlet felírása:

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{43}$$

4. Megoldás keresése $i = Ae^{st}$ formában.

$$i = Ae^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st} \tag{44}$$

5. Visszahelyettesítve (44) egyenleteket (43) egyenletbe kapjuk, hogy:

$$Ae^{st}(R + sL) = 0 \tag{45}$$

Az $Ae^{st} = 0$ egyeneletet a triviális megoldást adja, hiszen ekkor $i = 0$. Az $(R + sL) = 0$ egyeneletet megoldva a gyöke:

$$s = -\frac{R}{L} \tag{46}$$

A tranziens válasz:

$$i_t = Ae^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} = Ae^{-t/\tau} \tag{47}$$

6. Állandósult állapotban az áramkör egy állandósult állapotú DC áramkör. Ekkor az induktivitás rövidzárként viselkedik és a teljes feszültség az R ellenálláson esik

$$i_g = \frac{V}{R} \tag{48}$$

7. A teljes válasz a (47) és (48) megoldások összegeként adódik:

$$i(t) = i_t + i_g = \frac{V}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t} = \frac{V}{R} + Ae^{-t/\tau} \tag{49}$$

8. A hálózat vizsgálatával a hiányzó A paramétert is meghatározhatjuk.
A kapcsoló $t = 0+$ időpontjában az i áram: $i = 0 = \frac{V}{R} + Ae^0$. $A = -\frac{V}{R}$
Így:

$$i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad 0 < t < t' \tag{50}$$

<u>$t' < t < \infty$ **(S_2 nyílt állású)**</u>

1. Kirchhoff huroktörvényének alkalmazása:

$$\sum v = 0 = V - v_L - v_R - v_{2R} = V - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - 3Ri \tag{51}$$

2. Homogén diff. egyenlet felírása:

$$3Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{52}$$

3. Megoldás keresése $i = Ae^{st}$ formában.

$$i = Ae^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st} \tag{53}$$

4. Visszahelyettesítve (53) egyenleteket (52) egyenletbe kapjuk, hogy:

$$Ae^{st}\left(3R + sL\right) = 0 \tag{54}$$

Az $Ae^{st} = 0$ egyeneletet a triviális megoldást adja, hiszen ekkor $i = 0$. Az $(3R + sL) = 0$ egyeneletet megoldva a gyöke:

$$s = -\frac{3R}{L} \tag{55}$$

A tranziens válasz:

$$i_{t'} = A'e^{-\left(\frac{3R}{L}\right)(t-t')} \tag{56}$$

5. Állandósult állapotban az áramkör egy állandósult állapotú DC áramkör. Ekkor az induktivitás rövidzárként viselkedik, és a teljes feszültség az $(R + 2R)$-en, azaz a két soros kapcsolású ellenálláson esik

$$i_{g'} = \frac{V}{3R} \tag{57}$$

6. A teljes válasz: $i'(t) = i_{t'} + i_{g'} = \frac{V}{3R} + A'e^{-\frac{3R}{L}(t-t')}$

7. Az A' paramétert az S_2 kapcsoló zárt és nyitott fázisaiból határozhatjuk meg.

Az S_2 kapcsoló zárt fázisénak $0 < t < t'$ végén

$$i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t'}\right) = I' \tag{58}$$

A $t = t'+$ időpontban (miután kinyitottuk S_2-t) az $i(t)$ áram ugyancsak I' értékű

$$i'(t') = I' = \frac{V}{3R} + A'e^{0} \tag{59}$$

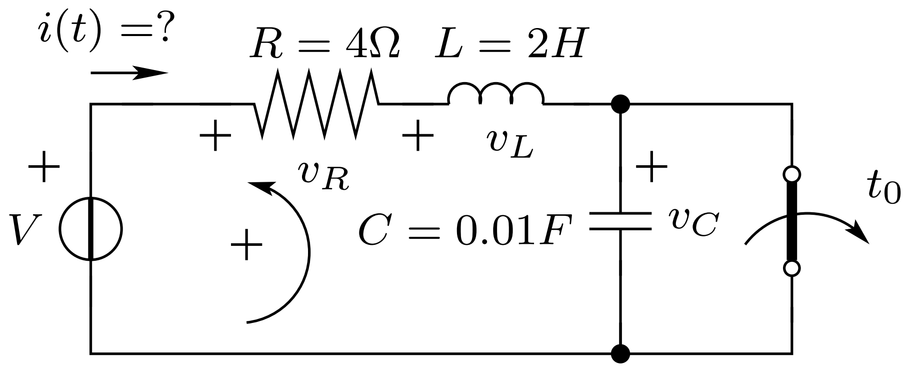
$$A' = I' - \frac{V}{3R} \tag{60}$$

Így:

$$i' = \frac{V}{3R} + \left(I' - \frac{V}{3R}\right)e^{-\left(\frac{3R}{L}\right)(t-t')}\ \mathrm{A}, \quad t' < t < \infty \tag{61}$$

6. Feladat Teljes válasz kiszámítása.

Határozza meg az $i(t)$ áramot, ha a kapcsoló $t = 0$ időpontban átkapcsol! A független feszültségforrás feszültsége $V = 20$ V.



Megoldás

A megoldás menete a következő:

1. Kirchhoff huroktörvényének alkalmazása a hálózatban felvett referenciairányoknak megfelelően:

$$\sum v = 0 = V - v_L - v_R - v_C = V - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri - \frac{1}{C}\int_0^t i d\tau \tag{62}$$

2. Homogén diff. egyenlet felírása:

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = 0 \tag{63}$$

3. Megoldás keresése $i = Ae^{st}$ formában.

$$i = Ae^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = sAe^{st}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = s^2 Ae^{st} \tag{64}$$

4. Visszahelyettesítve (64) egyenleteket (63) egyenletbe kapjuk, hogy:

$$Ae^{st}\left(sR + s^2L + \frac{1}{C}\right) = 0 \tag{65}$$

   Az $Ae^{st} = 0$ egyeneletet a triviális megoldást adja, hiszen ekkor $i = 0$. Az $\left(sR + s^2L + \frac{1}{C}\right) = 0$ egyeneletet megoldva a gyökök:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{4}{4} \pm \sqrt{(1) - \frac{100}{2}} = -1 \pm \sqrt{-49} = -1 \pm j7 \quad (66)$$

A tranziens válasz:

$$i_t = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \theta) = Ae^{-t} \sin(7t + \theta) \quad (67)$$

5. Az állandósult állapotbeli válasz:

   $i_g = 0$, mert $t \to \infty$ esetén a kondenzátor állandósult állapotú DC áramkörben szakadásként viselkedik.

6. A teljes válasz:

$$i(t) = i_g + i_t = Ae^{-t} \sin(7t + \theta) \quad (68)$$

7. $t = 0+$, $i = i_L(0-) = \frac{V}{R} = \frac{20}{4} = 5$ A, azaz
   $5 = i(0) = Ae^0 \sin(0 + \theta)$

$$A \cdot \sin(\theta) = 5 \quad (69)$$

$v_C = 0, \quad v_R = i \cdot R = V$

$$v_L = V - v_R - v_C = V - V - 0 = 0 \equiv L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad (70)$$

$t = 0+, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -Ae^{-t} \sin(7t + \theta) + 7Ae^{-t} \cos(7t + \theta) \quad (71)$$

$$0 = -A \cdot \sin(\theta) + 7A \cdot \cos(\theta) \quad (72)$$

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = 7 = \tan\theta \to \theta = \tan^{-1}(7) = 81.9^\circ \quad (73)$$

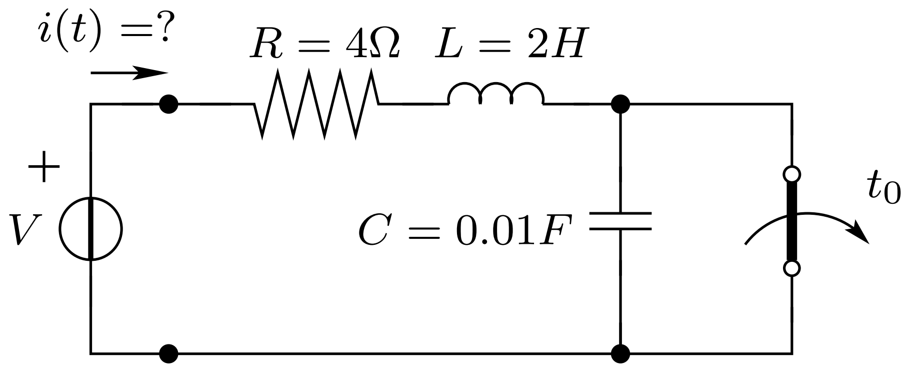
$$A = \frac{5}{\sin(81.9^\circ)} = 5.05 \quad (74)$$

Így a teljes válasz:

$$i(t) = i_g + i_t = 5.05e^{-t} \sin(7t + 81.9^\circ) \text{ A} \quad (75)$$

6.b Feladat Teljes válasz kiszámítása az impedancia koncepcióval.

Határozza meg az $i(t)$ áramot, ha a kapcsoló $t = 0$ időpontban átkapcsol! A független feszültségforrás feszültsége $V = 20$ V.



Megoldás

A megoldás menete a következő:

1. A hálózati elemeket átalakítom impedanciákká.
2. A gerjesztést lecsatolva a randszerről betekintek a hálózatba és meghatározom az eredő impedanciát.
3. Az $Z(s) = \left(sR + s^2L + \frac{1}{C}\right) = 0$ egyeneletet megoldva a gyökök:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{4}{4} \pm \sqrt{(1) - \frac{100}{2}} = -1 \pm \sqrt{-49} = -1 \pm j7 \quad (76)$$

   A tranziens válasz:

$$i_t = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \theta) = Ae^{-t} \sin(7t + \theta) \quad (77)$$

4. Az állandósult állapotbeli válasz:

   $i_g = 0$, mert $Z(0) = \infty$

5. A teljes válasz:

$$i(t) = i_g + i_t = Ae^{-t} \sin(7t + \theta) \quad (78)$$

6. $t = 0+,\ \ i = i_L(0-) = \frac{V}{R} = \frac{20}{4} = 5$ A
   $5 = i(0) = Ae^0 \sin(0+\theta)$

$$A \cdot \sin(\theta) = 5 \tag{79}$$

$v_C = 0,\ \ v_R = i \cdot R = V$

$$v_L = V - v_R - v_C = V - V - 0 = 0 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{80}$$

$t = 0+,\ \ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -Ae^{-t}\sin(7t+\theta) + 7Ae^{-t}\cos(7t+\theta) \tag{81}$$

$$0 = -A \cdot \sin(\theta) + 7A \cdot \cos(\theta) \tag{82}$$

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = 7 = \tan\theta \rightarrow \theta = \tan^{-1}(7) = 81.9^\circ \tag{83}$$

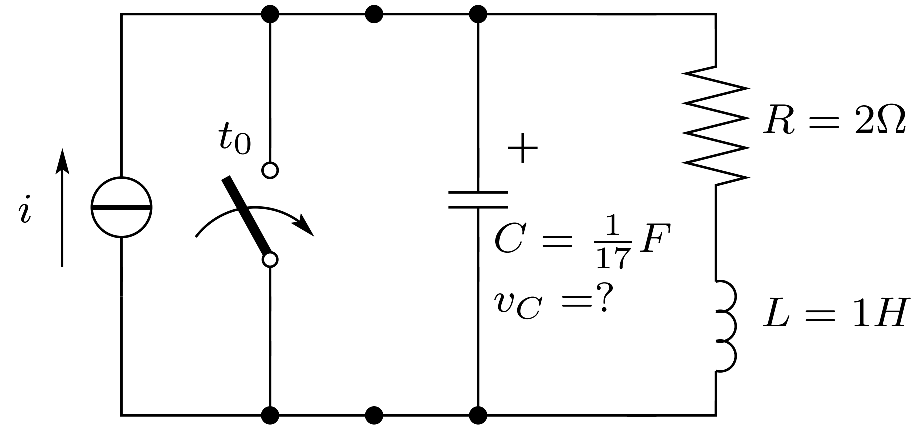
$$A = \frac{5}{\sin(81.9^\circ)} = 5.05 \tag{84}$$

Így a teljes válasz:

$$i(t) = i_g + i_t = 5.05e^{-t}\sin(7t + 81.9^\circ)\ \ \text{A} \tag{85}$$

7. Feladat Teljes válasz kiszámítása impedancia koncepcióval.

Határozza meg az $v(t)$ feszültséget, ha a kapcsoló $t = 0$ időpontban átkapcsol!



$i = 8.5\cos(4t)A$

Megoldás

A megoldás menete a következő:

1. A hálózati elemeket átalakítom admittanciákká. Az admittancia az impedancia reciproka.

2. A gerjesztést lecsatolva a randszerről betekintek a hálózatba és meghatározom az eredő admittanciát. ω kiolvasható a gerjesztésből ($\omega = 4$ rad/s).

$$Y(s) = \frac{I}{V} = sC + \frac{1}{R + sL} = \frac{s^2LC + sRC + 1}{R + sL} \tag{86}$$

$$Y(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}{R + j\omega L} = \frac{1 - \frac{16}{17} + j\frac{8}{17}}{2 + j4} = 0.106\angle 19.5^\circ \text{ S} \tag{87}$$

3. A gerjesztést áttranszformáljuk komplex amplitudóvá: $I = (8.5\sqrt{2})\angle 0^\circ$. A válaszjel komplex amplitudóját megkapjuk mint

$$V_g = \frac{I}{Y(j\omega)} = \frac{(8.5\sqrt{2})\angle 0^\circ}{0.106\angle 19.5^\circ} = (80\sqrt{2})\angle - 19.5^\circ \tag{88}$$

$$v_g(t) = 80 \cdot \cos(4t - 19.5^\circ) \tag{89}$$

4. Az $Y(s) = 0, LCs^2+RCs+1 = 0$ karakterisztikus egyenletet adja, melyet megoldva:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -1 \pm \sqrt{1-17} = -1 \pm j4 \tag{90}$$

Így:

$$v_t(t) = Ae^{-t}\cos(4t+\theta) \tag{91}$$

5.

$$v(t) = v_g + v_t = 80 \cdot \cos(4t - 19.5°) + Ae^{-t}\cos(4t+\theta) \tag{92}$$

$t = 0+, \quad v_C = v = 0$

$$0 = 80 \cdot \cos(-19.5°) + A\cos(\theta) \tag{93}$$

$$A\cos(\theta) = -75.5 \tag{94}$$

$i_L = 0$

$$\frac{8.5}{C} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -320 \cdot \sin(-19.5°) - A\cos(\theta) - 4A\sin(\theta) \tag{95}$$

$$A\sin(\theta) = 9.4 \tag{96}$$

$$\frac{A\sin(\theta)}{A\cos(\theta)} = -\frac{9.4}{75.5} \tag{97}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{9.4}{75.5}\right) = -7.1° \tag{98}$$

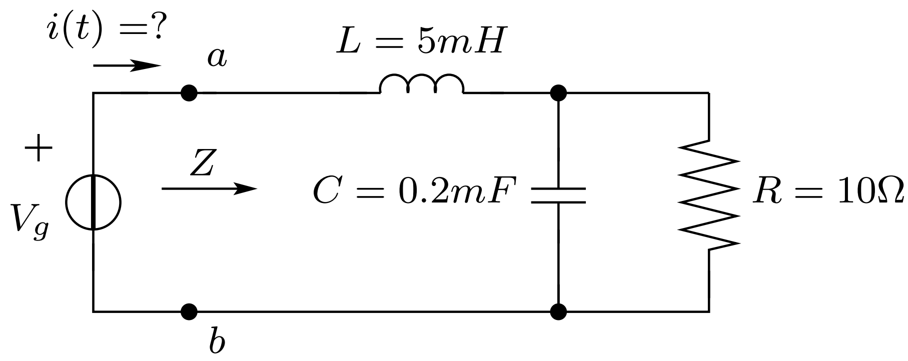
$$A = \frac{A\cos(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{-75.5}{\cos(-7.1°)} = -76 \tag{99}$$

6. A teljes válasz:

$$v(t) = 80 \cdot \cos(4t - 19.5°) - 76e^{-t}\cos(4t + -7.1°) \ \text{V} \tag{100}$$

8. Feladat Állandósult állapotú AC hálózat analízise.

Határozza meg a Z eredő impedanciát, az áram komplex amplitudójának értékét, az áram időtartománybeli értékét, az ellenálláson eső feszültséget, és a kondenzátoron átfolyó áramot, ha a gerjesztés $v_g = 100\cos(1000t)$ V.



Megoldás

A megoldás menete a következő:

1. A hálózati elemeket átalakítom impedanciákká.

   $Z_R = 10\Omega$

   $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j10^3 \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{j0.2} = -j5$

   $Z_L = j\omega L = j10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = j5$

2. A gerjesztést lecsatolva a rendszerről az a-b kapocspár felöl betekintek a hálózatba, és meghatározom az eredő impedanciát. ω kiolvasható a gerjesztésből ($\omega = 1000$ rad/s).

$$Z = Z_L + Z_R \mid\mid Z_C = j5 + 10 \mid\mid (-j5) = j5 + 2 - j4 = 2 + j1 = 2.236\angle 26.56^\circ \quad (101)$$

3. A gerjesztést áttranszformáljuk komplex amplitudóvá: $V = (\frac{100}{\sqrt{2}})\angle 0^\circ$.

4.
$$I = \frac{V}{Z} = \frac{70.71\angle 0^\circ}{2.236\angle 26.56^\circ} = 31.623\angle{-26.56^\circ} \quad (102)$$

5.
$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 31.623\cos(1000t - 26.56^\circ) = 44.722\cos(1000t - 26.56^\circ) \text{ A} \quad (103)$$

6. A terheletlen feszültségosztó tételét alkalmazva:

$$V_R = V\ \frac{Z_C \mid\mid Z_R}{Z_L + Z_C \mid\mid Z_R} = V\ \frac{2-j4}{2+j1} = 70,71\angle 0^\circ \cdot 2\angle{-90^\circ} = 141,42\angle{-90^\circ} \quad (104)$$

$$v_R(t) = \sqrt{2} \cdot 141,42 \cos(1000t - 90^\circ)\ \mathrm{V} \quad (105)$$

Az áramosztó tétellel:

$$I_C = I \cdot \frac{Z_R}{Z_C + Z_R} = 31,623\angle{-26,56^\circ} \times 0,894\angle 26,565^\circ = 28,27\angle 0^\circ \quad (106)$$

$$i_C(t) = \sqrt{2} \cdot 28,27 \cos(1000t + 0^\circ) = \sqrt{2} \cdot 28,27 \cos(1000t)\ \mathrm{A} \quad (107)$$