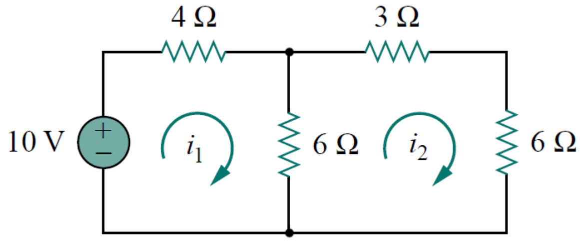
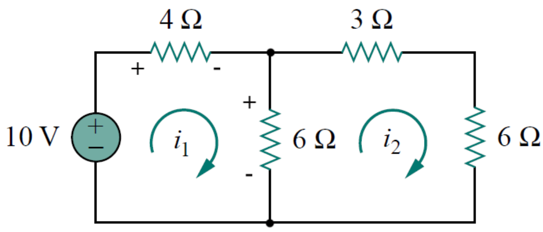
1. feladat:

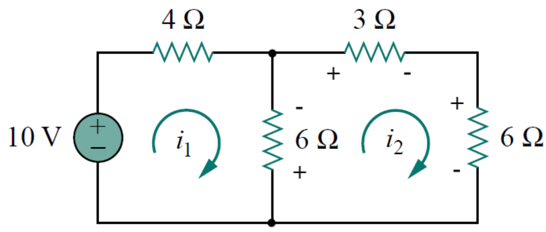


Hurokáramok módszere segítségével számold ki a két bejelölt hurokáramot (I_1 és I_2).

Megoldás:

Ha nem lenne megadva a hurok áramok iránya akkor tetszőleges de a konzisztencia miatt érdemes mindig órajárásával megegyezően
felvenni. Első lépésként bejelöljük az első hurok áramához tartozó feszültség irányokat majd a másodikhoz: (ellenállások esetén az irányt a kijelölt hurok áram iránya határozza meg!)





Ezután a két hurokra felírva a Kirchhoff huroktörvényeket ezt kapjuk (a kijelölt hurok áram irányával megegyező irány a pozitív):

$$-10 + 4I_1 + 6(I_1 - I_2) = 0 \qquad\qquad 6(I_2 - I_1) + 3I_2 + 6I_2 = 0$$

a jobb oldali egyenletből kifejezve I_2-őt majd ezt behelyettesítve a bal oldali egyenletbe megkapjuk az I_1= 1.316A és I_2=0.526A végeredményt.

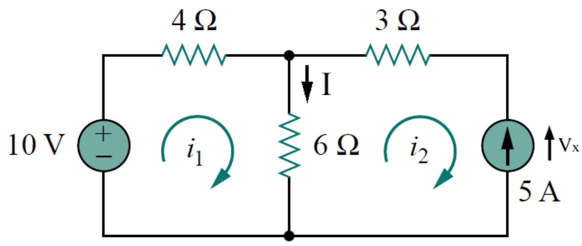
Ellenőrzés:

A külső hurokra felírva Kirchhoff huroktörvényét ellenőrizhetjük magunkat:

$$10 - 4I_1 - 3I_2 - 6I_2 = 0$$

Emellett egy jó mérnöki gyakorlat hogyha beírjuk a kapcsolás elemein eső feszültségeket és a rajtuk folyó áramokat és ezeket mintegy empírikusan leellenőrizzük szemmel.

2. feladat:



Az első feladathoz képest most az egyik 6Ω-os ellenálást egy áramgenerátorra cseréltük. A tanult hurokáramok módszere segítségével számold ki a két bejelölt hurokáramot (I_1 és I_2), az I ágáramot és az áramforráson eső feszültséget (V_x).

Megoldás:

Az előző feladathoz hasonlóan ugyanúgy bejelöljük a referencia irányokat. A második huroknál nagyon egyszerű a dolgunk mivel a hurokáramot az áramforrás határozza meg, azaz $I_2 = -5$A. (Áltatnosságban ilyenkor csökken az egyenleteink száma ezért előnyös ilyenkor hurokáramok módszerével számolni.) Ezután az első hurokra felírva a Kirchhoff huroktörvényét ezt kapjuk:

$$-10 + 4I_1 + 6(I_1 - I_2) = 0$$

amiből adódik, hogy I_1=-2A. Az I ágáram a két hurokáramból adódik:

$$I = I_1 - I_2 = -2 - (-5) = 3A$$

míg a V_x értékét a második hurokra felírva Kirchhoff huroktörvényét:

$$6(I_2 - I_1) + 3I_2 - V_x = 0$$

kaphatjuk meg, amiből pedig következik hogy $V_x = -33$V.

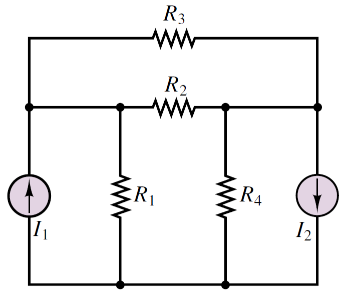
Ellenőrzés:

A külső hurokra felírva Kirchhoff huroktörvényét ellenőrizhetjük magunk:

$$10 - 4I_1 - 3I_2 + V_x = 0$$

Itt is egy jó mérnöki gyakorlat hogyha beírjuk a kapcsolás elemein eső feszültségeket és a rajtuk folyó áramokat és ezeket mintegy empírikusan leellenőrizzük szemmel.

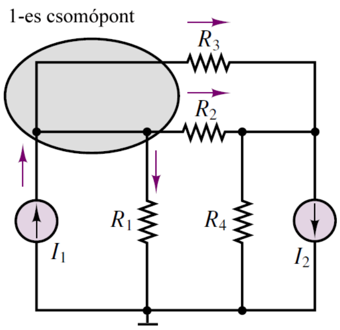
3. feladat:

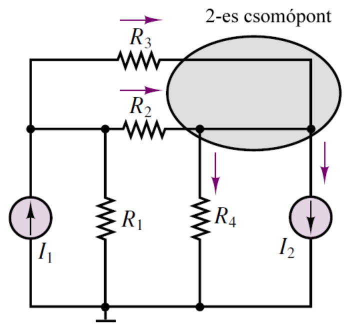


A tanult csomóponti feszültségek módszere segítségével add meg a csomóponti feszültségeket. $I_1 = 2$A; $I_2 = 4$A; $R_1 = 4\Omega$; $R_2 = 2\Omega$; R_3=8Ω;$R_4 = 16\Omega$

Megoldás:

A három csomópont közül egyet földként jelölünk meg, legyen ez a legalsó csomópont. (Ez tetszőlegesen megválasztható sőt ha úgy döntünk hogy nem jó helyre tettük akár át is helyezhető de akkor utána át kell számolni az eredményeket!) Ezután bejelöljük mind az 1-es (V_1) és mind a 2-es (V_2) csomóponthoz tartozó áram irányokat (a befolyó áram lesz a negatív):





Ezután külön-külön felírjuk a csomópontokra Kirchhoff csomóponti törvényét:

$$-2 + \frac{V_1 - 0}{4} + \frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{8} = 0, \qquad -\frac{V_1 - V_2}{2} - \frac{V_1 - V_2}{8} + \frac{V_2 - 0}{16} + 4 = 0$$

megkaptuk a két egyenletet és van két ismeretlenünk amire meg kell oldani:

$$V_1\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) - V_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = 2, \qquad V_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) - V_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = 4$$

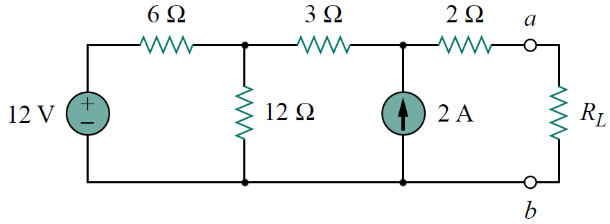
a bal oldali egyenletből kifejezve V_1-et majd azt behelyettesítve a jobb oldali egyenletbe kapjuk hogy V_1=-5.33V valamint V_2=-10.67V. (Vegyük észre, ha feszültség forrás lenne az I_1 áramgenerátor helyén akkor egy egyenlettel csökkentenénk az egyenletek számát tehát akkor előnyös lehetne a csomóponti potenciálok módszere)

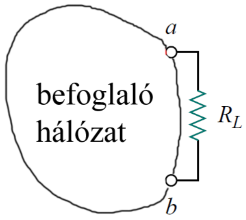
Ellenőrzés:

A legalsó csomópontra felírva Kirchhoff csomópont törvényét:

$$2 - \frac{V_1}{4} - \frac{V_2}{16} - 4 = 0$$

4. feladat:

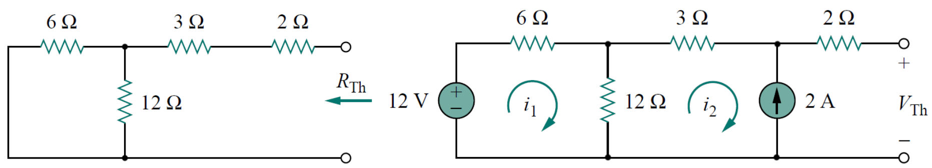




Mekkora R_L terhelő ellenállás érték mellett maximális az itt látható kétpólus teljesítménye? Nyissunk egy kaput az $a-b$ pontoknál és számítsuk ki és rajzoljuk fel a befoglaló hálózat $a-b$ kapocspárra vonatkoztatott V_{th} feszültségű és R_{th} soros ellenállású Thevenin helyettesítő képét, valamint az I_N áramú Norton-t helyettesítő képét. Miért jó ez a módszer például nemlineáris i-v karakterisztika esetén ?

Megoldás:

$R_L = R_{th}$ esetén maximális a kivehető teljesítmény amihez a Thevenin soros ellenállás meghatározására van szükség, amihez eltávolítjuk az R_L-t és a feszültség és áram forrásokat nullává tesszük (bal ábra). A V_{th} kiszámításához pedig a hurok áramok módszerét használjuk a terhelő ellenállás elvétele után (jobb ábra):



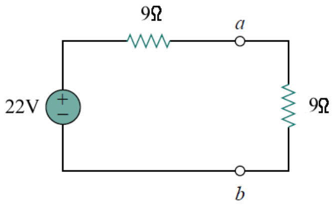
Tehát az $R_{th} = 5 + \frac{6 \cdot 12}{18} = 9\Omega$. Az $I_2 = -2$A és az 1-es hurokra felírva a Kirchhoff huroktörvényt:

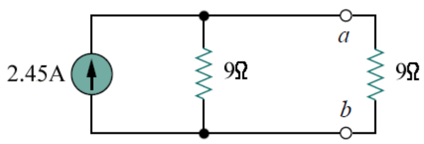
$$-12 + 18I_1 - 12(-2) = 0$$

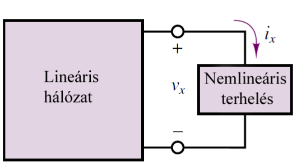
megkapjuk az $I_1 = -2/3$ A értéket. Ezután a huroktörvényt a külső hurokra felírva:

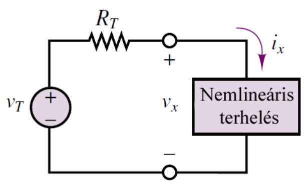
$$-12 + 6I_1 + 3I_2 + 2 \cdot 0 + V_{th} = 0$$

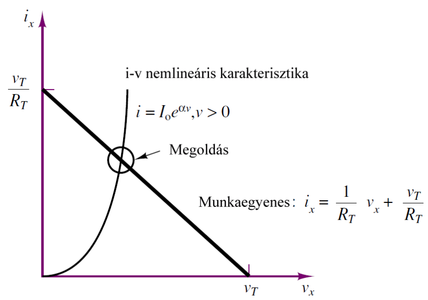
egyenlőségből megkapjuk a $V_{th} = 22$V eredményt. Így adódik az $I_N = V_{th}/R_{th} = 22/9 = 2.45A$ és mivel $R_N = R_{th}$:



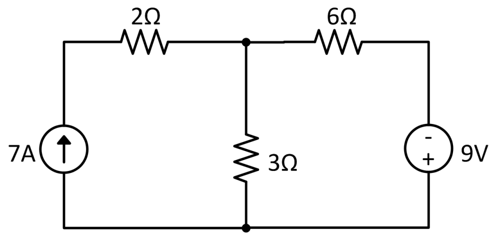








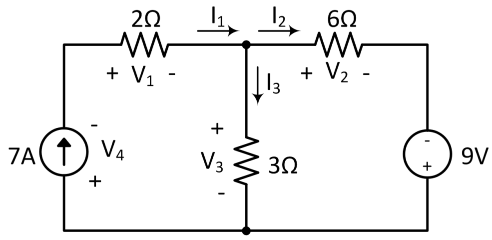
5. feladat:



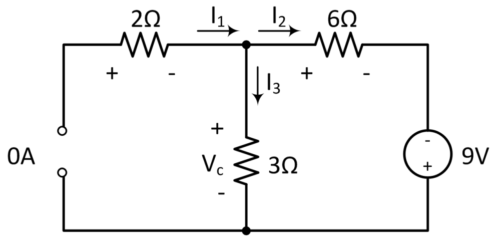
Számítsd ki az összes áramköri elemen eső feszültséget és az azokon folyó áramokat négy módszert használva. (szuperpozíció, Kirchhoff egyenletek, hurok áramok és csomóponti potenciálok módszerével) Hasonlítsd össze, hogy mikor melyik módszer lehet az előnyösebb.

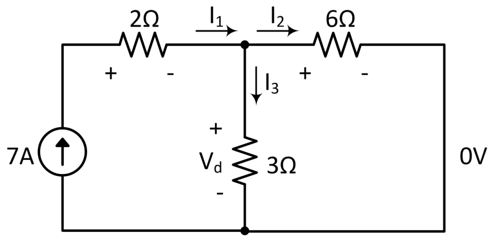
Megoldás szuperpozícióval:

Az első lépés hogy berajzoljuk a referencia irányokat:



Az elv, hogy mivel ezek a hálózatok lineárisak az egyes áramköri elemeken eső feszültségek és áramok az egyes feszültség- és áramforrásokkal külön-külön számított értékeinek az előjeles összegei. A 3Ω-os ellenálláson eső feszültség $V_3 = V_c + V_d$ ahol a V_c a feszültség generátor miatt eső feszültség míg a V_d az áramgenerátor miatti.





A bal oldalon az áramgenerátor áramát 0A-re állítva egy szakadást kapunk, míg jobb oldalt a feszültség generátor feszültségét 0V-ra állítva rövidzárt kapunk így a V_c és V_d a következő lesz:

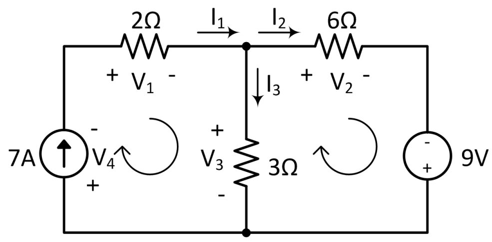
$$V_c = -9\frac{3}{3+6} = -3V \qquad\qquad V_d = 7\frac{3\cdot 6}{3+6} = 14V$$

és így rögtön adódik hogy $V_3 = -3V + 14V$=11V és az $I_3 = 11/3A$. A $V_1 = 2 \cdot 7 = 14V$ hiszen a 2Ω-os ellenálláson átfolyó áram $I_1 = 7A$ független a feszültség generátortól.
A V_2-re is az előzőekhez hasonlóan fel lehet írni a szuperpozíció tételét például $V_2 = V_e + V_f$ alakban vagy akár arra a hurokra egy Kirchhoff hurok törvényt amivel megkaphatjuk a V_2 = 20V és $I_2 = 10/3A$ végeredményeket.

Összegzésként a szuperpozíció tételének az az előnye, hogy egyszerű áramkörökön kell a bontás után dolgoznunk de ezek száma az áram és feszültség forrásoknak a számával nő!

Megoldás "egyszerű" Kirchhoff egyenletekkel:

Tehát berajzoltuk a referencia irányokat és a két hurok körbejárási irányát amely körül fogjuk a Kirchhoff hurok törvényét alkalmazni. A feladat ugyanazon V_1, V_2, V_3, V_4 és az I_2, I_3 értékét meghatározása. ($I_1 = 7A$)



Ez 6 ismeretlent jelent amihez legalább 6 egyenletre van szükségünk. A 3 ellenállásra 3 Ohm törvényt kapásból fel tudunk írni:

$$V_1 = 2I_1 = 14V \qquad V_2 = 6I_2 \qquad V_3 = 3I_3$$

A bal oldali hurokra Kirchhoff hurok törvényét felírva:

$$V_4 + V_1 + V_3 = V_4 + 14 + V_3 = 0$$

A jobb oldali hurokra felírva:

$$-V_3 + V_2 - 9 = 0$$

Valamint az ellenállások közös pontjára felírva a Kirchhoff csomóponti törvényét:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = -7 + I_2 + I_3 = 0$$

Tehát van 5 egyenletünk 5 ismeretlenünk már csak meg kell oldanunk. A második kettő Ohm törvényéből következő egyenletet behellyettesítve a második hurok egyenletbe:

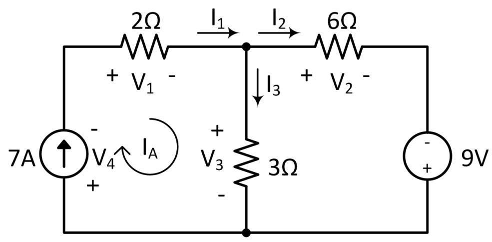
$$-3I_3 + 6I_2 - 9 = 0$$

Ebből és az utolsó csomóponti egyenletből $I_2 = 10/3$A ezt visszahelyettesítve az e fölötti egyenletbe kapjuk az $I_3 = 11/3$A-t. Majd ezeket visszahelyettesítve a második kettő egyenletbe kapjuk a $V_2 = 20V$-ot és a $V_3 = 11V$-ot. Végül a V_3-at visszahelyettesítve a bal oldali hurok egyenletbe kapjuk a $V_4 = -25V$ végeredményt.

Tehát ez a megoldás is ugyan olyan jó eredményt ad mind bármelyik; előnye, hogy egyszerűen felírhatók a Kirchhoff csomóponti és hurok egyenletek de ezek száma igen sok, ami egy bonyolult rendszer esetében egyértelmű hátrány!

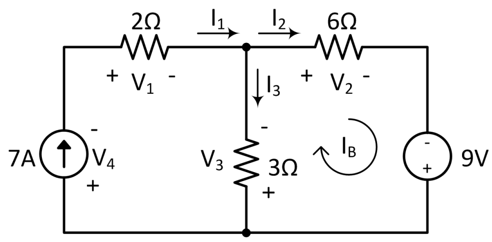
Megoldás hurokáramok módszerével:

A feladat most is ugyanaz, elsőnek a bal oldali hurokkal kezdünk: (I_A az órajárásával megegyező irányba kijelölt hurok áram)



Mivel az áramforráson átfolyó áram nem lehet más mint maga az értéke ezért $I_A = 7A$ így erre a hurokra nem kell felírnunk egyenletet.

Ezután akkor nézzük a jobb oldali hurkot ahol ugyancsak az órajárásával megegyező irányba vesszük fel az I_B hurokáram irányát:



Vedd észre, hogy a 3Ω-os ellenállás polaritása előjelet vált hiszen I_B ellentétes irányú I_3-al! Ezután akkor írjuk fel erre a hurokra a Kirchhoff hurok törvényét az I_A és I_B hurok áramok segítségével:

$$3(I_B - I_A) + 6I_B - 9 = 0$$

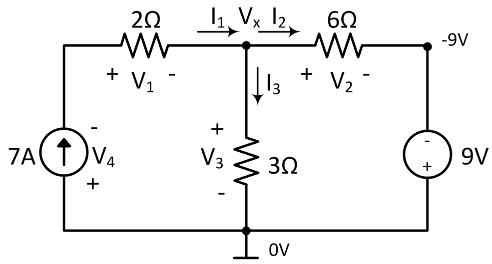
egyenletet kapjuk. (A 3Ω-os ellenálláson két hurok áram is áthalad ezért kellett ezek előjeles összegét venni.) Behelyettesítve az $I_A = 7$A-t meg is kapjuk az $I_B = 10/3A$ eredményt. Így adódik tehát hogy $I_A = I_1 = 7A$, $I_2 = I_B = 10/3A$ és hogy az $I_3 = I_A - I_B = 21/3 - 10/3 = 11/3A$.

Mivel megvannak az áramok a feszültségek számolhatók Ohm-törvénnyel.

Összegzésként a hurok áramok módszere kevesebb egyenletet generál mint az előző megoldás és a hálózatban található áramforrások esetén ez akár azok számával tovább csökkenhet. A kapott egyenletekben a feszültségforrások pedig egyszerűsítik a képletet.

Megoldás csomóponti potenciálok módszerével:

A feladat most is ugyanaz, elsőnek kijelölünk egy föld pontot.



Egy csomóponti egyenletet fogunk számolni (V_x-re). A feszültség forrás egyik vége földre került így rögtön tudjuk, hogy akkor a másik vége -9V potenciálon van a földponthoz képest. Akkor írjuk fel a V_x potenciálú csomópontra a Kirchhoff csomóponti törvényét a csomóponti feszültségek módszerével:

$$-7 + \frac{V_x - 0}{3} + \frac{V_x - (-9)}{6} = 0$$

Amiből adódik hogy $V_x = V_3 = 11$V és hogy $V_2 = V_x - (-9) = 20$V. $V_1 = 7 \cdot 2 = 14V$ triviálisan adódik Ohm-törvényéből és a többi áram is ugyancsak könnyen számolható.

Ha marad idő akkor érdemes lenne a föld pontot áthelyezni és úgy is kiszámolni az eredményeket majd vissza számolni és összevetni az előző megoldás eredményeivel.

Összegzésként ez a módszer is az előzőhöz hasonlóan kevesebb egyenletet produkál általában de itt a feszültség források redukálhatják azokat.

6. feladat:

Adott a

$$\frac{dy}{dt} + Ay = B$$

elsőrendű differenciál egyenlet, ahol A és B tetszőleges konstansok.

(a) Adja meg a megoldás lépéseit és $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett határozza meg a differenciál egyenlet teljes megoldását a $t \geq 0$ időintervallumra!

(b) Mit értünk az alatt, hogy egy megoldás teljes?

Megoldás:

(a)

1.) Homogén differenciál egyenlet általános megoldása

$$\frac{dy}{dt} + Ay = 0$$

megoldást keresem $y_H(t) = Ce^{st}$ alakban

$$\frac{dy_H}{dt} + Ay_H(t) = Cse^{st} + ACe^{st} = (s + A)Ce^{st} \qquad Ce^{st} \neq 0$$

$$s = -A \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{y_H(t) = Ce^{-At}}}$$

2.) Inhomogén differenciál egyenlet partikuláris megoldása

$$\frac{dy}{dt} + Ay = B$$

megoldást keresem $y_P(t) = D$ alakban, ahol D egy konstans

$$0 + AD = B$$

$$D = \frac{B}{A} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{y_P(t) = D = \frac{B}{A}}}$$

3.) A differenciál egyenlet teljes megoldása

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = Ce^{-At} + \frac{B}{A} \qquad (\star)$$

4.) A C konstans meghatározása a kezdeti feltételből

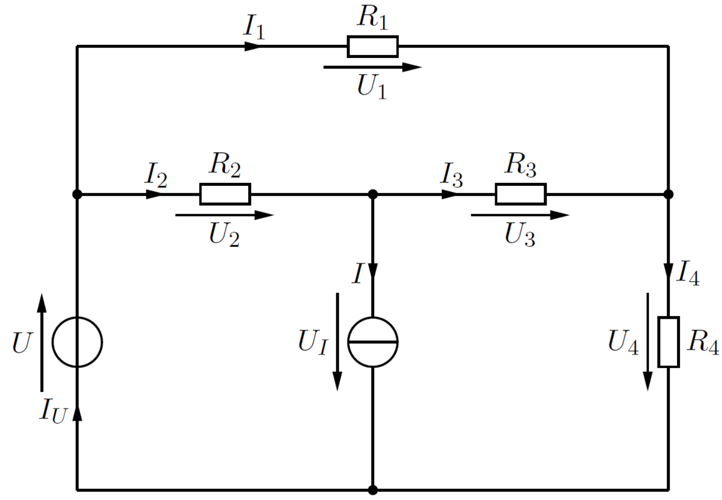
$$y(0) = Ce^{-At}|_{t=0} + \frac{B}{A} = 0$$

$$C + \frac{B}{A} = 0$$

$$C = -\frac{B}{A} \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = \frac{B}{A}\left(1 - e^{-At}\right)$$

(b) A teljes megoldás azt jelenti, hogy a ($\star$) egyenlet az adott jobboldal, de valamennyi kezdeti feltétel mellett érvényes.

1. házi feladat: (opcionális)

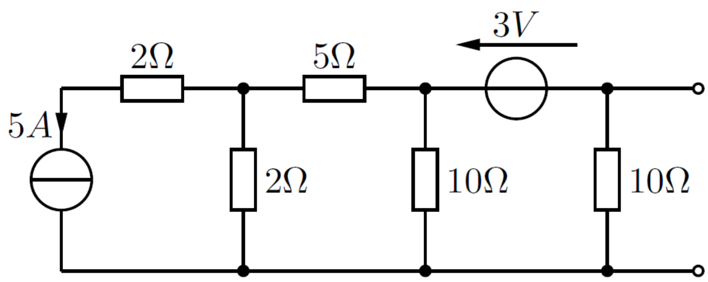


Számold ki az R_3-on folyó áramot és eső feszültséget mind a négy módszer segítségével ha U=7V, I=4A, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 15\Omega$, $R_4 = 20\Omega$. (Ne feledd az áramgenerátoron csak egy hurok áram haladjon keresztül!)

Megoldás:

$U_3 = -21.408V$ és $I_3 = -1.4272A$

2. házi feladat: (opcionális)



Számítsd ki és rajzold le az itt látható kétpólus Thevenin és Norton helyettesítő képét. Mekkora terhelő ellenállás hatására lenne maximális a teljesítménye ennek a kétpólusnak?

Megoldás:

$R_T = 2.92\Omega$, $U_T = -2.042V$ és $I_N = -0.7A$