Állománynév: aramkorok_05laplace20.pdf

Irodalom: Előadó jegyzetei: http://users.itk.ppke.hu/∼kolumban/aramkorok/

Fodor Gy., „Lineáris rendszerek analízise," pp. 79-124, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.

A. V. Oppenheim, A. S. Willsky and I. T. Young, „Signals and Systems," Prentice Hall, 1983.

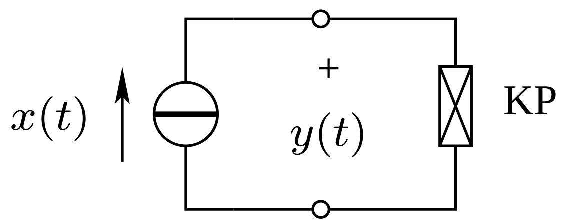
5. ANALíZIS A KOMPLEX FREKVENCIATARTOMÁNYBAN: AZ EGYOLDALAS LAPLACE TRANSZFORMÁCIÓ

Érvényesség és alkalmazás:

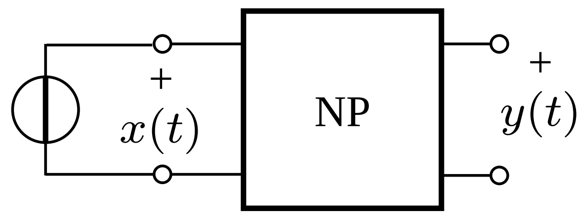
- LTI rendszek estén használható (szuperpoziciót kihasználja)
- Egyoldalas Laplace transzformáció: Belépő függvényekre alkalmazható
- A gerjesztéseket komplex exponenciális függvények lineáris kombinációjaként állítjuk elő
- Kezdeti értékek figyelembe vehetők, a stabilitásvizsgálat elvégezhető

TIPIKUS VÁLASZJELEK:

Impedancia (kétpólus):



Átviteli függvény (négypólus):



A Kirchhoff egyenletek alapján felírt rendszerjellemző differenciál egyenlet:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_0 x$$

ahol $x(t)$ a gerjesztés és $y(t)$ a válaszjel

Feladat: Adott $x(t)$ gerjesztés mellett $y(t)$ válaszjel meghatározása

A

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_0 x$$

differenciál egyenlet teljes megoldása két megoldás összegéből állítható elő:

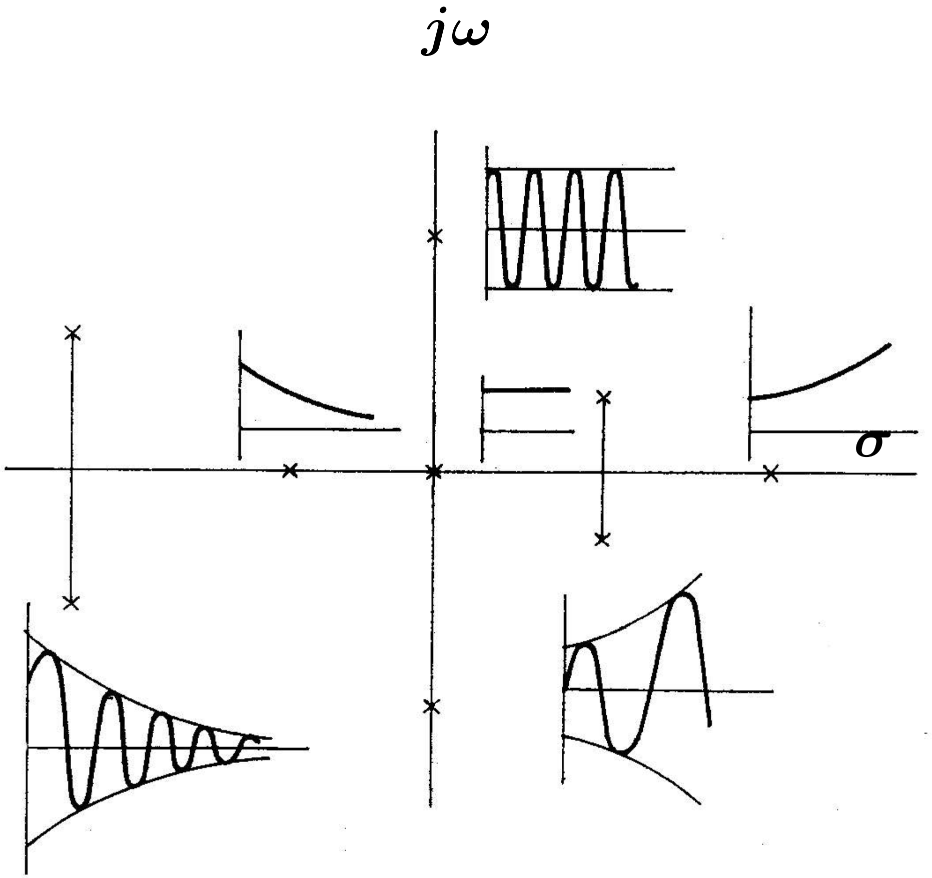
1. **tranziens megoldás** (a homogén differenciál egyenlet általános megoldása) Karakterisztikus egyenlet, a rendszer stabilitását adja meg
2. **állandósult állapotbeli megoldás** (az inhomogén differenciál egyenlet egy partikuláris megoldása)

Vedd észre: A Ce^{st} függvény

- mindig előállítja a tranziens megoldást és
- az állandósult állapotbeli megoldást is, ha a gerjesztéseket az $A_k e^{st}$ alakú függvények osztályára korlátozzuk

Tetszőleges $x(t)$ gerjesztések a $A_k e^{st}$ függvények **szuperpoziciójával** állíthatók elő $\Longrightarrow$ szuperpozició csak lineáris rendszer esetén alkalmazható

A komplex frekvenciatartomány: $s = \sigma + j\omega$



Függvények osztályának korlátozása:

- **Fourier** transzformáció: $e^{\pm j\omega t}$ $\Rightarrow$ frekvenciatartomány ($j\omega$) $\Rightarrow$ szinuszos jelek + szuperpozició $\Rightarrow$ állandósult állapot
  Komplex konjugált gyökök a $j\omega$ tengelyen
- Kétoldalas **Laplace** transzformáció: e^{st} $\Rightarrow$ komplex frekvenciatartomány (s) $\Rightarrow$ komplex exponenciális jelek + szuperpozició $\Rightarrow$ tranziens + állandósult állapot
  Gyökök a teljes s-síkon

Fizikai rendszerből eredő korlát: Csak valós időfüggvények léphetnek fel

- Valós gyök (σ-tengely)
- Komplex konjugált gyökpár

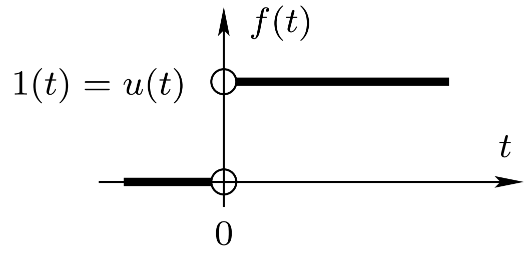
Belépő függvények: A bázisfüggvények csak $t > 0$ tartományra vannak megadva!

A Laplace transzformáció, azaz analízis az s komplex frekvenciatartományban

Időtartomány		s-tartomány
$\Downarrow$		$\Downarrow$
Lineáris rendszer	$\Longrightarrow$ Laplace transzformáció	Transzformált rendszer (Operátoros impedancia)
$\downarrow$		$\downarrow$
Differenciál egyenlet	$\Longrightarrow$ Laplace transzformáció	Algebrai egyenlet
$\downarrow$		$\downarrow$
Diff. egy. megoldása		Algebrai módszerek
$\downarrow$		$\downarrow$
Válaszjel	$\Longleftarrow$ Inverz Laplace transzf.	Megoldás az s-tartományban

A belépő függvény definiciója

Az $\mathbf{1}(t) = u(t)$ egységugrás függvény:



Belépő függvény előállítása:

$$f(t)\,\mathbf{1}(t) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{ha } t < \mathbf{0} \\ f(t), & \text{ha } t > \mathbf{0} \end{cases}$$

Vedd észre: $t = \mathbf{0}$ időpontban a belépő függvény nem értelmezett

Az egyoldalas Laplace transzformáció definiciója:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0+}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Megjegyzések:

- Az egyoldalas Laplace transzformációval a jeleket **csak a $t > 0$** tartományban vizsgáljuk
- A $t = 0$ időpontban mért értékeket a kezdeti értékek adják meg
- A $t < 0$ időtartományra az egyoldalas Laplace transzformációval semmit nem tudunk mondani

Az egyoldalas Laplace transzformáció alkalmazása

Az $f(t)$ időfüggvényhez egy $F(s)$ Laplace transzformáltat rendelünk, és a számításokat a komplex frekvenciatartományban végezzük el

Előnyök:

- integro-differenciál egyenletek helyett algebrai egyenleteket kapunk
- az átviteli függvények az operátoros impedanciák segítségével a kapcsolási rajzból közvetlenül felírhatók (nem kell Kirchhoff)
- valamennyi, a hálózatokra kidolgozott tételek igazak maradnak
- stabilitásvizsgálat elvégezhető
- az átviteli függvények megvalósítására szintézis módszerek vannak
- az átviteli függvényekből $s = j\omega$ behelyettesítéssel átmehetünk a frekvencia tartományba, azaz megkapjuk a frekvenciaválasz-függvényt
- a kezdeti értékek figyelembe vehetők

Inverz Laplace transzformáció (visszatérés az időtartományba)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\rho \to \infty} \int_{\sigma - j\rho}^{\sigma + j\rho} F(s) e^{st} ds, \quad \text{ahol } \sigma > \sigma_0$$

az integrálást az $s = \sigma + j\omega$ komplex frekvenciatartományban kell elvégezni egy, a $j\omega$ tengellyel párhuzamos, a szingularitásoktól jobbra eső egyenes mentén

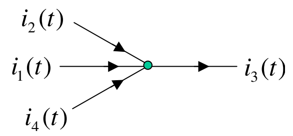
Inverz Laplace transzformáció elvégzése

- inverziós integrál kiértékelése a *reziduum-tétel* segítségével
- résztörtekre bontás és táblázat alapján (mérnöki gyakorlat)
- kifejtési tétellel (szisztematikus résztörtekre bontás; mérnöki gyakorlat)

Kirchhoff törvények és hálózati tételek az s-tartományban

Időtartomány s-tartomány

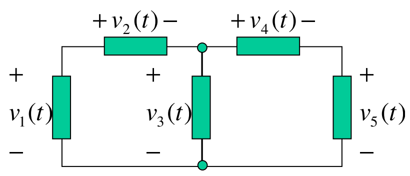
1. **Kirchhoff csomóponti törvénye**



$$i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) = 0$$

$$I_1(s) + I_2(s) - I_3(s) + I_4(s) = 0$$

2. **Kirchhoff hurok törvénye**



$$-v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = 0$$

$$-V_1(s) + V_2(s) + V_3(s) = 0$$

Kirchhoff egyenletek és hálózati tételek igazak/alkalmazhatók az s-tartományban

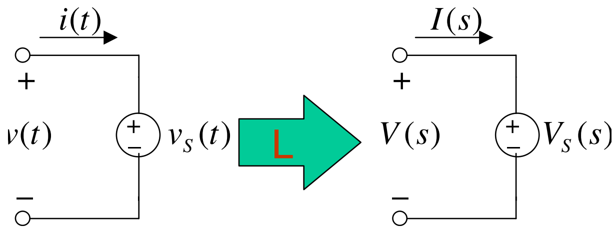
Jelforrások az s-tartományban

Időtartomány s-tartomány

Feszültségforrás

$$v(t) = v_S(t)$$

$i(t)$: az áramkör határozza meg

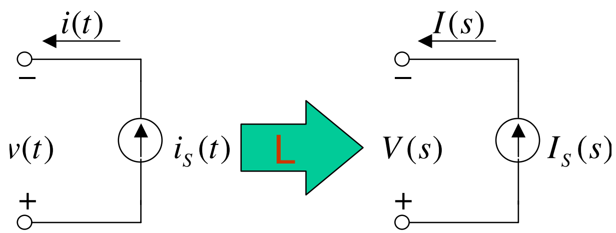


$$V(s) = V_S(s)$$

Áramforrás

$$i(t) = i_S(t)$$

$v(t)$: az áramkör határozza meg



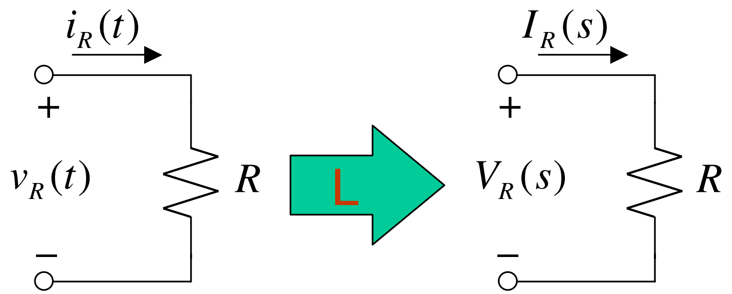
$$I(s) = I_S(s)$$

Operátoros impendanciák a kezdeti értékekkel (Feszültségforrás)

Időtartomány s-tartomány

Ellenállás

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

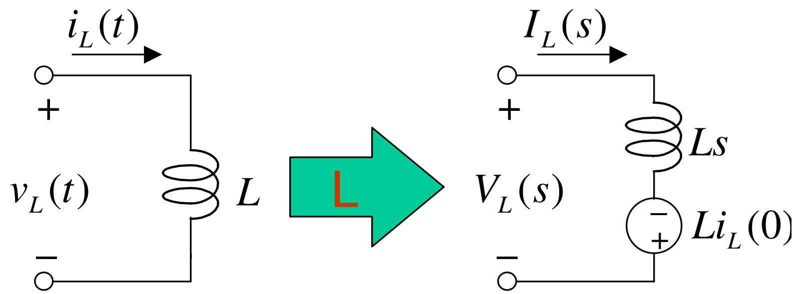


$$V_R(s) = RI_R(s)$$

Induktivitás

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_L(0+) = i_L(0)$$

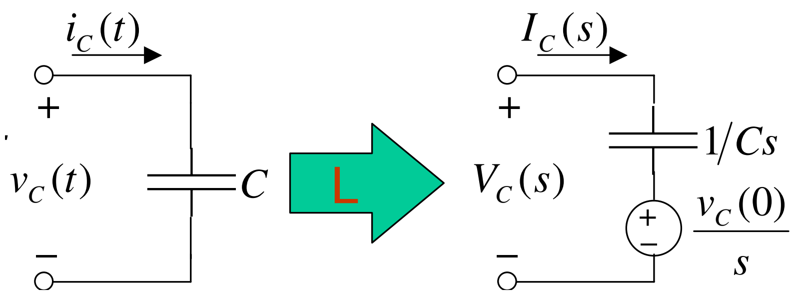


$$V_L(s) = sL\, I_L(s) - Li_L(0)$$

Kapacitás

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau + v_C(0)$$

$$v_C(0+) = v_C(0)$$



$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{v_C(0)}{s}$$

Operátoros impendanciák a kezdeti értékekkel (Áramforrás)

Időtartomány — s-tartomány

Ellenállás

$$i_R(t) = \frac{1}{R} v_R(t)$$

Induktivitás

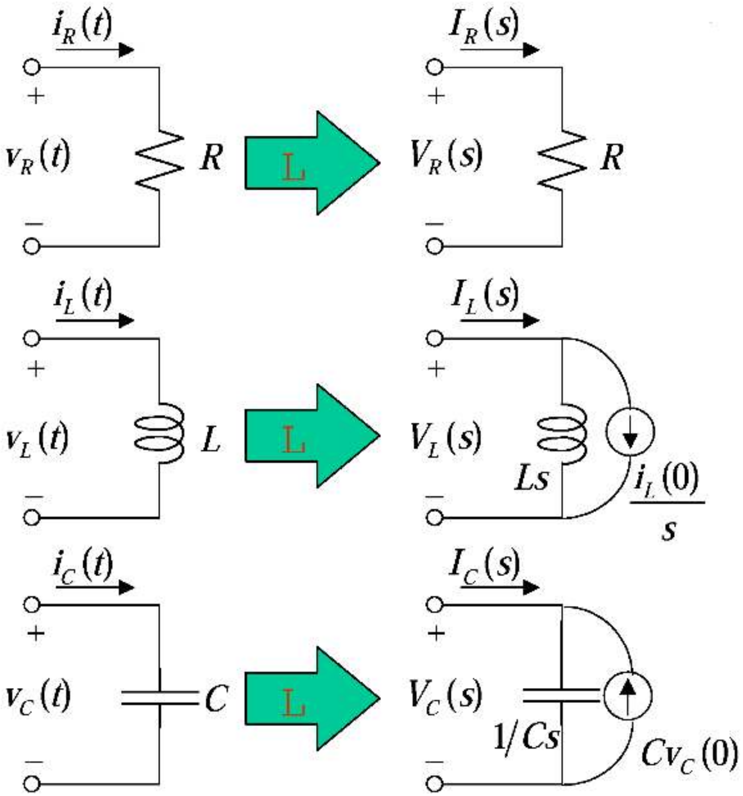
$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(\tau)d\tau + i_L(0)$$

$$i_L(0+) = i_L(0)$$

Kapacitás

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_C(0+) = v_C(0)$$



$$I_R(s) = \frac{1}{R} V_R(s)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} V_L(s) + \frac{i_L(0)}{s}$$

$$I_C(s) = sC\, V_C(s) - Cv_C(0)$$

Operátoros impendanciák definiciója

$$Z(s) = \frac{\text{Feszültség Laplace transzformáltja}}{\text{Áram Laplace transzformáltja}}$$

Ellenállás: $Z_R(s) = \frac{V_R(s)}{I_R(s)} = R$

Induktivitás: $Z_L(s) = \frac{V_L(s)}{I_L(s)} = sL$

Kapacitás: $Z_C(s) = \frac{V_C(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{sC}$

Vigyázz: A **kezdeti értékeket** az előző két fólián bemutatott módon, járulékos feszültség- ill. áramforrásokkal figyelembe kell venni

Legfontosabb időfüggvények Laplace transzformáltjai

Időtartomány, $t > 0$	s-tartomány
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$
$\delta(t-T)$	e^{-sT}
$[\cos \omega_0 t]$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$[\sin \omega_0 t]$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$[e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t]$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$
$[e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t]$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$

Egy példa:

$$F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0+}^{\infty} u(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_{0+}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0+}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Laplace transzformációra vonatkozó tételek

Időtartomány	s-tartomány
$f'(t)$	$sF(s)-f(0+)$
$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
$-tf(t)$	$\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$
$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(z)\,\mathrm{d}z$
$\frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right), \quad k>0$	$F(ks)$
$\mathrm{e}^{-\alpha t}f(t)$	$F(s+\alpha)$
$1(t-T)f(t-T)$	$\mathrm{e}^{-sT}F(s)$
$1_T(t)f_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_T(t-kT)$ $f_T(t)=0, \quad t<0, \quad t>T$	$\frac{F_T(s)}{1-\mathrm{e}^{-sT}}$
$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$F_1(s)\,F_2(s)$

Fontos tulajdonságok

- Szuperpoziciót kihasználtuk $\Rightarrow$ csak lineáris rendszerekre alkalmazható
- Unicitás: Egyértelmű megfelelés az időfüggvény és annak Laplace transzformáltja közt
- Lineáris integrál transzformáció $\Rightarrow$ Linearitás megőrződik

Inverz Laplace transzformáció: Résztörtekre bontás

a) **Másodfokú nevező**

$$\frac{1}{s(s+\alpha)}=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\alpha}\right]$$

$$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}=\frac{-1}{\alpha-\beta}\left[\frac{1}{s+\alpha}-\frac{1}{s+\beta}\right]$$

$$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{\alpha}{s+\alpha}-\frac{\beta}{s+\beta}\right]$$

b) **Harmadfokú nevező**

$$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}=\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\alpha}\right]$$

$$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}=\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{1}{s}-\frac{\alpha}{(s+\alpha)^2}-\frac{1}{s+\alpha}\right]$$

$$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}=\frac{1}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}\left[\frac{\alpha-\beta}{s}+\frac{\beta}{s+\alpha}-\frac{\alpha}{s+\beta}\right]$$

Megjegyzések:

- Mivel az átviteli függvény

$$\frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$$

alakú, a résztörtekre bontás mindig elvégezhető

- A résztörtekre bontás matematikai kézikönyvekben megtalálható
- A kifejtési tétel nem más, mint egy szisztematikus eljárás a a résztörtekre bontásra

Az általános időbeli jelenségek vizsgálatának menete egyoldalas Laplace transzformáció alkalmazásával

1. Gerjesztés-válasz összefüggés kifejezése Laplace transzformációval

1.1 Gerjesztések Laplace transzformációja

1.2 Hálózati egyenletek felírása az $\boldsymbol{s}$ operátoros impedanciával

1.3 Válaszjel kifejezése a gerjesztés és átviteli függvény szorzataként:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{I}(\boldsymbol{s})$$

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{s})$$

$$\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{s})$$

$$\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{s})$$

2. Visszatérés az időtarományba: Inverz Laplace transzformáció

2.1 Időfüggvény felismerése

2.2 Laplace transzformációs táblázat

2.3 Résztörtekre bontás, kifejtési tétel

2.4 Inverz Laplace transzformátor:
http://www.eecircle.com/applets/007/ILaplace.html

Aszimptotikus viselkedés

1. $f(t)$ meghatározása a $t \to 0$ helyen

$$\lim_{t \to 0}\{f(t)\} = f(0+) = \lim_{s \to \infty}\{sF(s)\}$$

2. $f(t)$ meghatározása a $t \to \infty$ helyen

$$\lim_{t \to \infty}\{f(t)\} = \lim_{s \to 0}\{sF(s)\}$$

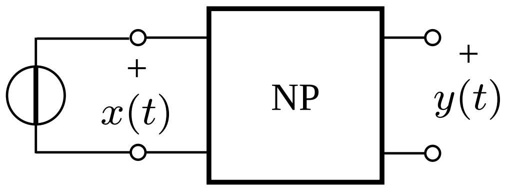
Alkalmazás:

- Kezdeti és végértékek meghatározása
  Emlékezz, $v_C(t)$ és $i_L(t)$ az időben mindig folytonos függvények!!!
- Kapott eredmények gyors ellenőrzése

Az átviteli és az impulzusválasz-függvények kapcsolata

Átviteli függvény definiciója:

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}}$$



A $\boldsymbol{h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}}$ az impulzusválasz-függvény (súlyfüggvény), amely

- a $\boldsymbol{\delta(t)}$ függvényre adott válasz, és
- hálózatjellemző függvény, azaz

$$\boldsymbol{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau}$$

Vedd észre, a Laplace transzformáció az időtartománybeli konvolúciót szorzásba viszi át az s komplex frekvenciatartományban

Az átviteli függvény alakja:

Emlékezz, a be és kimenet közti kapcsolatot leíró differenciál egyenlet alakja

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_0 x$$

ahol a gerjesztéseket a $K_i e^{s_i t}$ függvények osztályára korlátozzuk, és a válaszjeleket $C_j e^{s_j t}$ alakban keressük

Ezért az átviteli függvény polinom/polinom alakú lesz

$$H(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$$

Az átviteli függvény tulajdonságai:

- A Laplace transzformáció legfőbb előnye, hogy vele **átviteli függvény** generálható, amelyből a válaszjel egy egyszerű szorzással előállítható

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{M(s)}{N(s)}X(s)$$

- A frekvenciaválasz-függvény az átviteli függvényből $s = j\omega$ behelyettesítéssel előállítható

$$H(j\omega) = H(\omega) = H(s)\,|_{s=j\omega}$$

Stabilitásvizsgálat az s-tartományban

Egy rendszer instabil, ha zérus bemenet mellett nullától különböző kimenetet generál

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{M(s)}{N(s)}X(s)$$

$$X(s) = 0 \quad \text{de} \quad Y(s) \neq 0, \quad \Longrightarrow \quad N(s)Y(s) = M(s)X(s) = 0$$

Gerjedés, azaz az oszcilláció feltétele

$$N(s) = 0$$

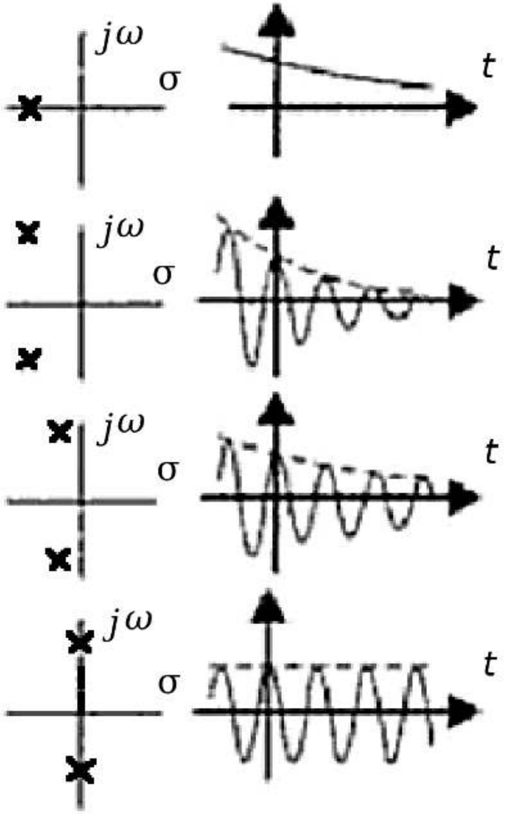
azaz a **karakterisztikus egyenlet** gyökei a $j\omega$ tengelyen, vagy a jobb félsíkon vannak

Stabilitás feltétele:

az $N(s)$ karakterisztikus egyenlet valamennyi gyöke az s tartományban a bal félsíkon található

Stabilis rendszer: A karakterisztikus egyenlet gyökeinek a bal félsíkon kell lenniük a **komplex frekvencia** síkon

$\boldsymbol{s}$-tartomány időtartomány



$\boldsymbol{s}$-tartomány időtartomány