

Állománynév: aramkorok_03lti_analisis20.pdf

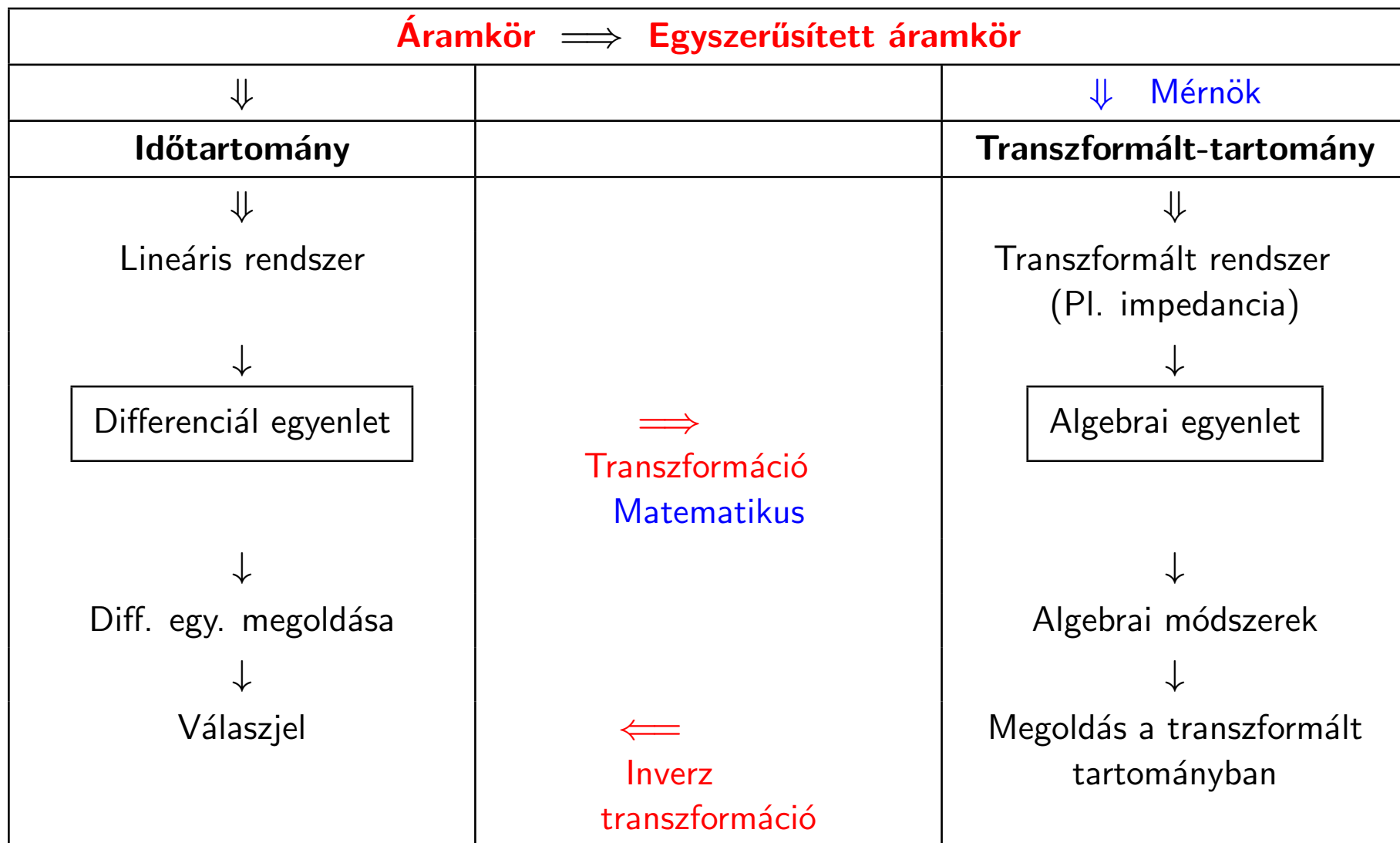
Irodalom: Tankönyv: R. J. Smith & R. C. Dorf, „Circuits, Devices and Systems,” Wiley, 5th Edition, pp. 42-57, 110-231, 249-272.

Előadó jegyzetei: <http://users.itk.ppke.hu/~kolumban/aramkorok/>

3. A KONCENTRÁLT PARAMÉTERŰ LINEÁRIS ÉS IDŐINVARIÁNS HÁLÓZATOK ANALÍZISE

Ne feledd: Az LTI hálózatok matematikai modellje egy állandó együtthatós, lineáris, differenciál egyenlet

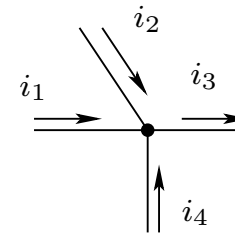
- Célok:**
- Az egyenletek felírása előtt az áramkört egyszerűsítése
 - Minimális számú ismeretlent adó (differenciál) egyenlet felírása
 - Mivel sokszor csak az állandósult állapotbeli viselkedést akarjuk meghatározni, egyszerű (algebrai) módszerek adása az állandósult állapotban mért válasz meghatározására



Emlékeztető: A hagyományos módszer a differenciál egyenlet felírására

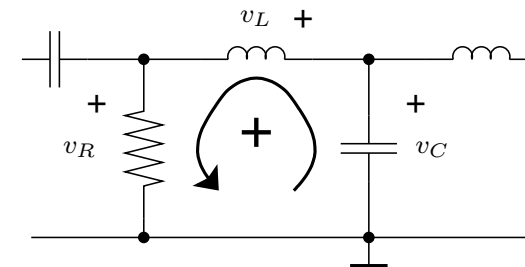
1. Kirchhoff csomóponti törvénye

$$\sum_k i = 0$$



2. Kirchhoff huroktörvénye

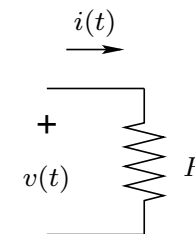
$$\sum_l v = 0$$



3. Áramköri elemekre vonatkozó egyenletek

Például az Ohm törvény

$$v(t) = R i(t)$$



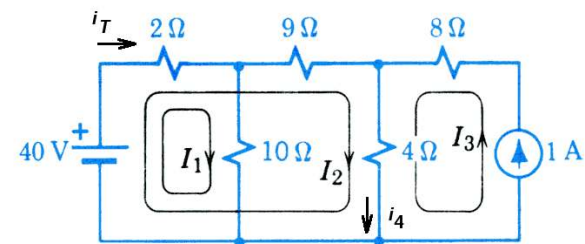
3.1. Hurokáramok módszere

Alapelv:

- Kirchhoff huroktörvényét írjuk fel
- A csomóponti és az áramköri elemekre vonatkozó egyenleteket automatikusan kielégítjük

Módszer:

- Minden független hurokban felvesszünk egy ún. *hurokáramot* ami **nem azonos az ágárammal**
- Hurokáramok számát addig növeljük amíg minden hurkot lefedtünk
- Minden új hurokáram menjen át legalább egy addig még le nem fedett ágon
- A hálózatnak topológiai értelemben összefüggőnek kell lennie

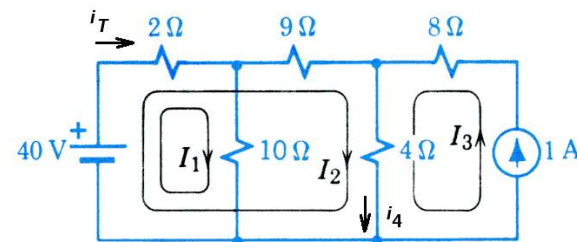


Minimális számú ismeretlent ad:

- Sok, független áramforrás esetén
- Egy áramgenerátoron egy és csak egy hurokáramot célszerű felvenni

Ellenőrzés:

- Kirchhoff hurokegyenlet felírása egy új, korábban fel nem vett hurok mentén



Egyenletek:

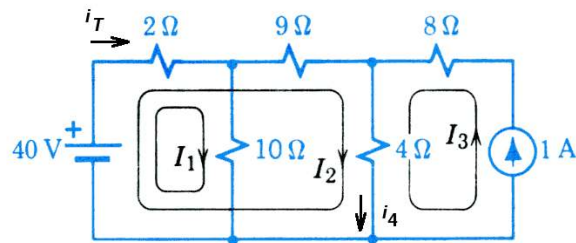
$$I_3 = 1 \text{ A}$$

$$\sum_v = 0 = -40 + 2(I_1 + I_2) + 10I_1$$

$$\sum_v = 0 = -40 + 2(I_1 + I_2) + 9I_2 + 4(I_2 + I_3) = -40 + 2(I_1 + I_2) + 9I_2 + 4(I_2 + 1)$$

A 4-ohmos ellenálláson fizikailag átfolyó áram:

$$i_4 = I_2 + I_3 = I_2 + 1$$



A telepből felvett áram:

$$i_T = I_1 + I_2$$

Ellenőrzés: Kirchhoff hurokegyenlet felírása a középső hurokra

$$\sum_v = 0 = \textcolor{red}{?} = -10I_1 + 9I_2 + 4(I_2 + 1)$$

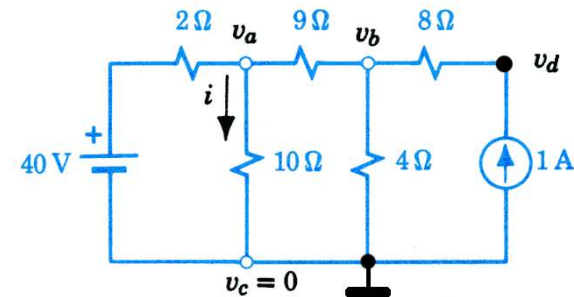
3.2. Csomóponti feszültségek módszere

Alapelv:

- Kirchhoff csomóponti törvényét írjuk fel
- A hurkokra és az áramköri elemekre vonatkozó egyenleteket automatikusan kielégítjük

Módszer:

- Egy csomópontot *földelünk*, azaz referenciának tekintünk
- Elvileg max. $(n-1)$ független csomópont van, de a számba veendő csomópontok számát a független generátorok csökkentik
- Ha a kapcsolási rajzon szereplő föld nem optimális helyen van akkor az áthelyezhető. Ekkor azonban a kapott csomóponti feszültségeket az eredeti föld szerint át kell számolni!!!

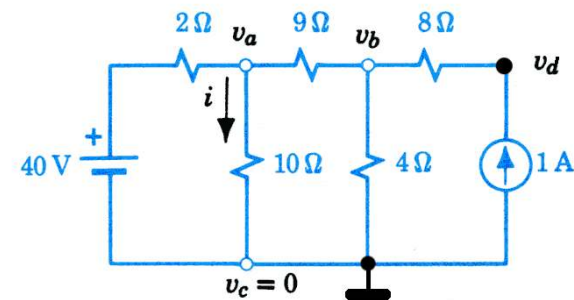


Minimális számú ismeretlent ad:

- Sok, független feszültségforrás esetén, ha azok egy közös ponthoz kapcsolódnak
- Áramkörök rendszerint aszimmetrikusak, azaz van egy **közös föld pontjuk**

Ellenőrzés:

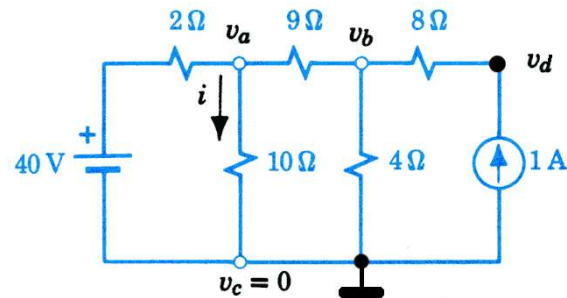
- A kapcsolási rajzba be kell írni valamennyi csomópont feszültségét és valamennyi ág áramát



Egyenletek:

$$\sum_{i_a} = 0 = \frac{40 - v_a}{2} + \frac{v_b - v_a}{9} - \frac{v_a - 0}{10}$$

$$\sum_{i_b} = 0 = \frac{v_a - v_b}{9} + 1 - \frac{v_b - 0}{4}$$



Az i áram értéke:

$$i = \frac{v_a - v_c}{10} = \frac{v_a - 0}{10}$$

A „d” csomópont feszültsége:

$$v_d = v_b + 8 \times 1$$

3.3. Hálózatokra vonatkozó tételek

Az egyenletek felírásának megkezdése előtt az áramkört célszerű egyszerűsíteni azért, hogy minimális számú ismeretlent kapjunk

3.3(a) KÉTPÓLUSOK (EGYKAPUK) EKVIVALENCIÁJA

Két kétpólus (egykapu) ekvivalens, ha azonos a *feszültség-áram* karakterisztikájuk

3.3(b) SOROS ÉS PÁRHUZAMOS KAPCSOLÁSOK ÖSSZEVONÁSA

A replusz művelet

$$\frac{a}{b} \parallel \frac{c}{d} = \frac{ac}{ad + bc}$$

ahol a, b, c és d tetszőleges polinomok, pl. impedanciák is lehetnek

Soros ellenállások eredője: $R_{er} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$

Párhuzamos ellenállások eredője: $R_{er} = R_1 \parallel R_2 \parallel \cdots \parallel R_n$

Soros induktivitások eredője: $L_{er} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$

Párhuzamos induktivitások eredője: $L_{er} = L_1 \parallel L_2 \parallel \cdots \parallel L_n$

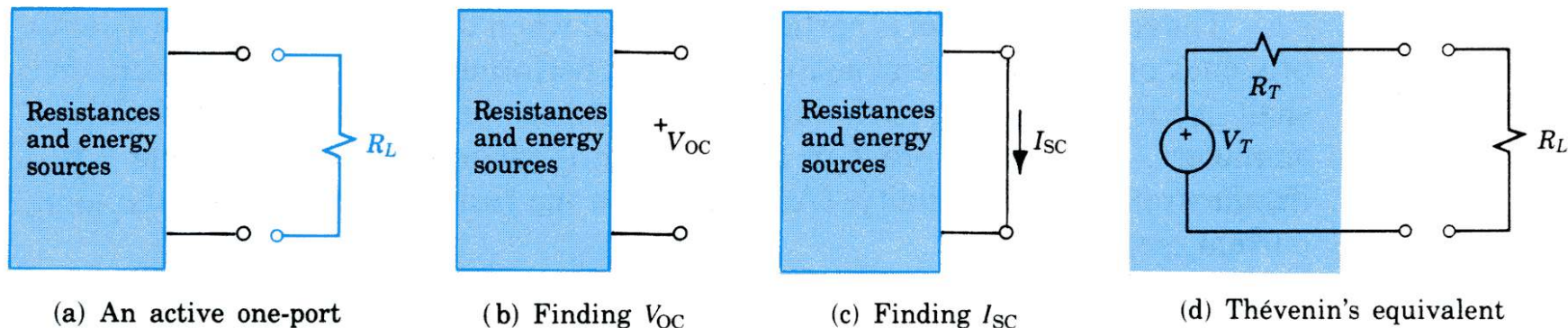
Soros kapacitások eredője: $C_{er} = C_1 \parallel C_2 \parallel \cdots \parallel C_n$

Párhuzamos kapacitások eredője: $C_{er} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

3.3(c) THÈVENIN TÉTEL

A **terhelés szempontjából** egy tetszőleges, ellenállásokat, független forrásokat és vezérelt generátorokat tartalmazó hálózat (áramkör) az adott kapura nézve helyettesíthető egy V_T feszültségű független feszültségforrás és egy R_T ellenállású ellenállás **soros** kapcsolásával

A Thévenin ekvivalens meghatározásának lépései:

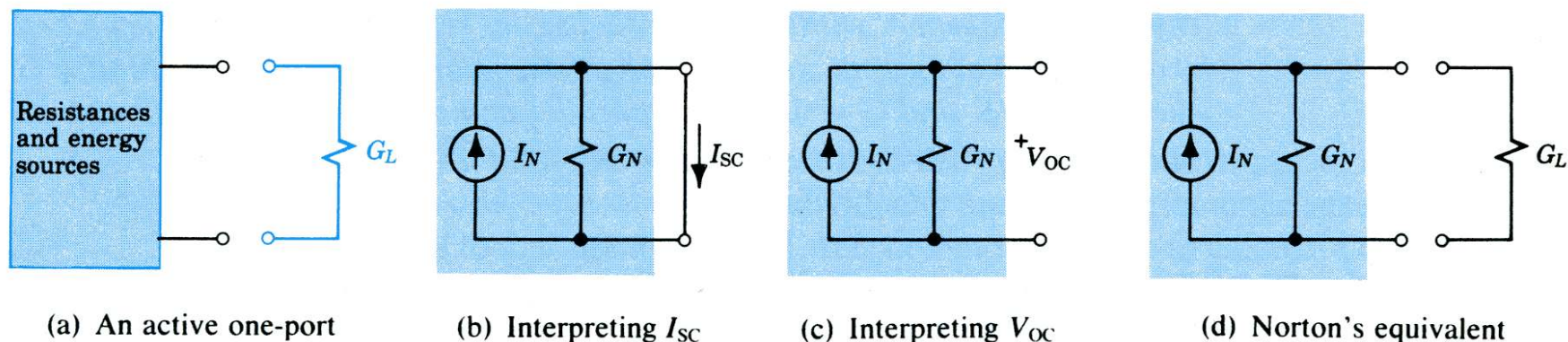


$$V_T = V_{OC} \quad \text{and} \quad I_{SC} = \frac{V_T}{R_T} \quad \Rightarrow \quad R_T = \frac{V_T}{I_{SC}} = \frac{V_{OC}}{I_{SC}}$$

3.3(d) NORTON TÉTEL

A **terhelés szempontjából** egy tetszőleges, ellenállásokat, független forrásokat és vezérelt generátorokat tartalmazó hálózat (áramkör) az adott kapura nézve helyettesíthető egy I_N áramú független áramforrás és egy G_N vezetésű admitancia **párhuzamos** kapcsolásával

A Norton ekvivalens meghatározásának lépései:



$$I_N = I_{SC} \quad \text{and} \quad G_N = \frac{I_N}{V_{OC}} = \frac{I_{SC}}{V_{OC}}$$

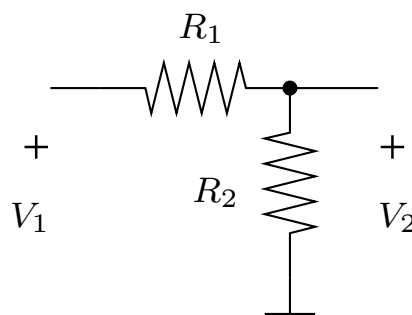
3.3(e) HELYETTESÍTŐ KÉPEK EGYMÁS KÖZTI ÁTALAKÍTÁSA

- A Thèvenin és Norton helyettesítő képek egymásba átalakíthatók a következő összefüggések segítségével:

$$I_N = \frac{V_T}{R_T} \quad V_T = \frac{I_N}{G_N} \quad G_N = \frac{1}{R_T}$$

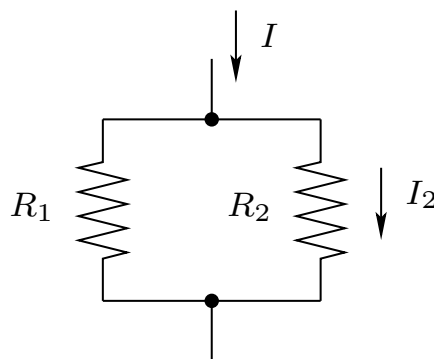
- Vedd észre, az elektronikában mindennek megvan a **duálja**. Elég a tételek felét megtanulni :-) !!!
- Ha egy áramkörben csak egy kapocspár mentén akarjuk a feszültséget/áramot meghatározni, akkor
 1. arra a kapocspárra nézve nyitunk egy kaput,
 2. a terhelést kiemeljük és
 3. a maradék befoglaló áramkört a Thèvenin/Norton helyettesítő képpel helyettesítjük
- Vedd észre, a munkaegyenes/munkapont módszernél a befoglaló hálózatot a Thèvenin helyettesítő képpel írtuk le

3.3(f) FESZÜLTÉSOSZTÓ TÉTEL



$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1$$

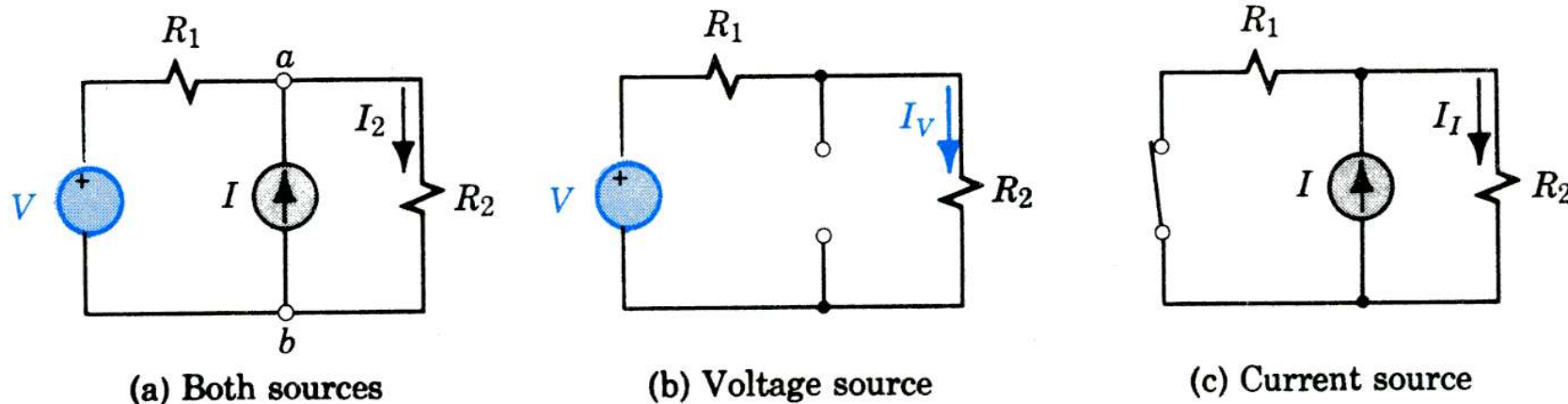
3.3(g) ÁRAMOSZTÓ TÉTEL



$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

3.3(h) SZUPERPOZÍCIÓ TÉTELE

- Kizárólagosan a lineáris áramkörökre és rendszerekre alkalmazható
- A több gerjesztés együttes hatására fellépő válaszjelet megkapjuk ha meghatározzuk az egyes gerjesztésekre külön-külön adott válaszokat, majd azokat összegezzük

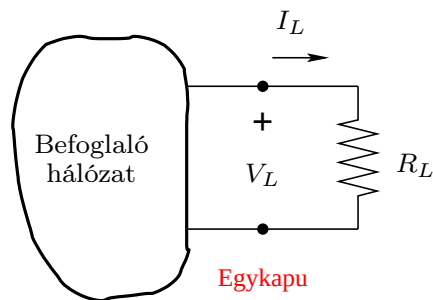


$$I_V = \frac{V}{R_1 + R_2} \text{ és } I_I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \text{ majd szuperpozícióval: } I_2 = I_V + I_I = \frac{V + I R_1}{R_1 + R_2}$$

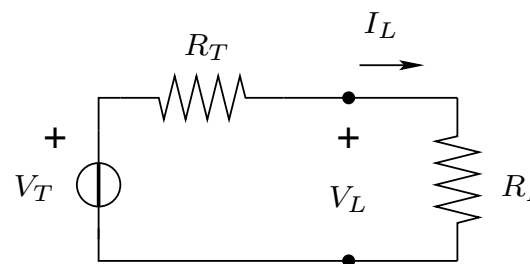
Figyelem: A generátorok **nem eltávolítva** lettek, hanem $I = 0$ ill. $V = 0$ behelyettesítésekkel a gerjesztéseket nullává tettük!!!

3.3(i) ILLESZTÉS: MAXIMÁLIS TELJESÍTMÉNY KIVÉTELE

Terhelés egy tetszőleges hálózatban



Illesztés meghatározásának modellje



A generátorból kivett (azaz az R_L terhelésen eldisszipált) teljesítmény:

$$P_L = V_L I_L = \frac{V_L^2}{R_L} = \frac{R_L^2}{(R_T + R_L)^2} V_T^2 \frac{1}{R_L} = \frac{R_L}{(R_T + R_L)^2} V_T^2$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{(R_T + R_L)^2 - R_L 2(R_T + R_L)}{(R_T + R_L)^4} = 0$$

$$(R_T + R_L)^2 - 2(R_T + R_L)R_L = 0 \quad \text{ahol} \quad (R_T + R_L) \neq 0$$

Az illesztés (max. teljesítménykivétel) feltétele: $R_L = R_T$

3.4. R-L-C áramkörök

A rendszerjellemző differenciál egyenlet megoldása

A Kirchhoff egyenletek alapján felírt rendszerjellemző differenciál egyenlet:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_0 x$$

ahol $x(t)$ a gerjesztés és $y(t)$ a válaszjel

Vedd észre: Fizikai rendszerben **CSAK** valós jelek léphetnek fel!

A rendszerjellemző differenciál egyenlet tulajdonságai:

- Lineáris (szuperpozíció alkalmazható)
- Állandó együtthatós
- Az egyenlet **n** rendűségét a független (össze nem vonható) energiatároló elemek száma adja meg

A

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_0 x$$

differentiál egyenlet teljes megoldása két megoldás összegéből állítható elő:

1. tranziens megoldás

A homogén differenciál egyenlet általános megoldása

Karakterisztikus egyenlet, a **rendszer stabilitását** adja meg

Csak az áramkörre jellemző válasz

2. állandósult állapotbeli megoldás

Az inhomogén differenciál egyenlet egy partikuláris megoldása

Esetek döntő többségében csak ezt a megoldást kell meghatározni, mivel az

ún. bekapcsolási tranziens sokszor nem érdekes

Egyaránt függ az áramkörtől és a gerjesztéstől

Hogyan jön össze ez a differenciál egyenlet

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_0 x$$

az eddig tanulmányozott egyenáramú (DC) áramkörökkel? Ott csak algebrai egyenletek voltak!

Eddig:

- csak DC gerjesztés: amiből következik, hogy $\frac{d^n}{dt^n} x(t) = 0$
- állandósult állapotú DC áramkör: amiből következik, hogy $\frac{d^n}{dt^n} y(t) = 0$

Behelyettesítve:

$$a_0 y = b_0 x$$

3.4(a) A TRANZIENS VÁLASZ MEGHATÁROZÁSA

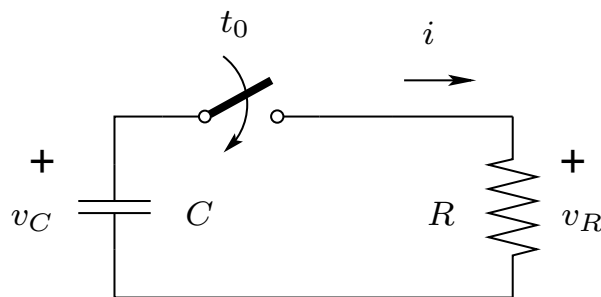
(Matematikai megfogalmazással: A homogén differenciál egyenlet általános megoldása)

Elsőrendű (azaz egy energiatároló elemet tartalmazó) rendszer

ahol $t_0 = 0$

Kezdeti feltétel:

$$v_C(0-) = V_0$$



Kirchhoff hurokegyenlete alapján (óramutatóval ellentétes körüljárás), $t \geq 0$

$$\sum v = 0 = v_C - v_R = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau - Ri = V_0 - \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau - Ri$$

- Ahol:
- kondenzátorban tárolt energia: $w_C = [v_C(0)]^2/2 = V_0^2/2$
 - kisbetű $\equiv$ időfüggvény, nagybetű $\equiv$ DC jel vagy komplex amplitúdó, azaz konstans

Rendszerjellemző differenciál egyenlet, $t \geq 0$

$$RC \frac{di}{dt} + i = 0$$

Az általános megoldás keresése $i = A \exp(st)$ alakban, mivel $\frac{di}{dt} = sA \exp(st)$

Az időállandó és a karakterisztikus (mert csak az áramkörre jellemző) egyenlet definíciója

$$\left(\underbrace{RC}_{\text{időállandó}} s + 1 \right) \underbrace{A \exp(st)}_i = \underbrace{(s\tau + 1)}_{\text{karakterisztikus egyenlet}} \quad i = 0 \quad \text{ahol} \quad i \neq 0$$

A tranziens megoldás a karakterisztikus egyenlet megoldásából adódik

$$s = -\frac{1}{\tau} \quad \Rightarrow \quad i = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Vedd észre, a **karakterisztikus egyenlet megoldása valós**, ami szükséges feltétele annak, hogy megoldásként egy **valós időfüggvényt** kapjunk

Az A konstans meghatározása a kezdeti feltételből

- Fizikai képből:

$$v_C(0-) = v_C(0+) = V_0 \implies i(0+) = \frac{v_C(0+)}{R}$$

- Áramkörre felírt hurokegyenletből:

$$\sum v(0+) = 0 = v_C(0+) - v_R(0+) = V_0 - \frac{1}{C} \int_0^{0+} i(t) dt - Ri(0+)$$

$$i(0+) = \frac{v_C(0+)}{R} = \frac{V_0}{R} \equiv A$$

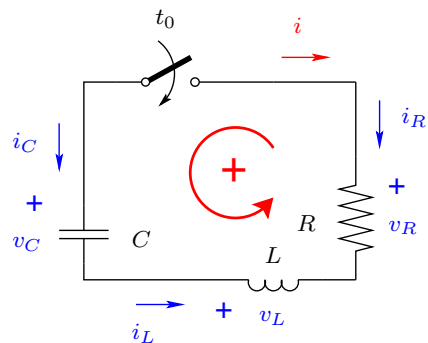
A tranziens (általános = minden kezdeti feltételre igaz) megoldása a $t \geq 0$ időtartományban

$$i = \frac{V_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (1)$$

Fizikai jelentés: A kapcsoló zárása után az R ellenálláson keresztül exponenciálisan csökken a C kondenzátor töltése

Másodrendű (két, össze nem vonható energiatároló elem) rendszer

Rezgőkör, minden LC szűrő alapja



ahol $t_0 = 0$

Kezdeti feltételek:

$$v_C(0-) = V_0 \text{ és } i(0-) = 0$$

Kirchhoff hurokegyenlete alapján (óramutatóval ellentétes körüljárás), $t \geq 0$

$$\sum v = v_C + v_L - v_R = 0$$

$$i = -i_C = -i_L = i_R \quad \text{és} \quad v_C = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i_C d\tau, \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad v_R = R i_R$$

$$\sum v = V_0 - \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau - L \frac{di}{dt} - Ri = 0$$

Rendszerjellemző differenciál egyenlet, $t \geq 0$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Az általános megoldás keresése $i = A \exp(st)$ alakban

$$\frac{di}{dt} = sA \exp(st) \quad \text{és} \quad \frac{d^2 i}{dt^2} = s^2 A \exp(st)$$

A karakterisztikus (csak az áramkörre jellemző) egyenlet

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$$

A determinánstól függően, karakterisztikus egyenletnek két valós, vagy egy komplex konjugált gyökpár a megoldása

$$s_j = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \text{ahol } j=1,2$$

A tranziens (általános = minden kezdeti feltételre igaz) megoldás, $t \geq 0$

$$i = A_1 \exp(s_1 t) + A_2 \exp(s_2 t)$$

A lineáris rendszerekre vonatkozó, általános érvényű következtetések:

- A

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

homogén egyenlet megoldása komplex exponenciálisok lineáris kombinációja

- A tranziens meghatározó homogén egyenlet csak a rendszertől függ, ezért hívjuk karakterisztikus egyenletnek
- A karakterisztikus egyenlet megoldása valós gyököket vagy komplex konjugált gyökpárokat ad, ami szükséges feltétele annak, hogy megoldásként egy **valós időfüggvényt** kapjunk
- A karakterisztikus egyenlet megadja a rendszer stabilitását
(Vedd észre: Ha egy LTI rendszer stabilis, akkor aszimptotikusan stabilis)

A tranziens megoldásban

$$i = A_1 \exp(s_1 t) + A_2 \exp(s_2 t)$$

szereplő A_1 és A_2 konstansok meghatározása a kezdeti feltételekből megy végbe

Két ismeretlen, tehát két kezdeti feltétel kell

Feltétel #1:

$$i_L(0-) = 0 = i_L(0+) = i(0+) = A_1 + A_2$$

Feltétel #2: (Fizikai képből vagy az áramkörre felírt hurokegyenletből)

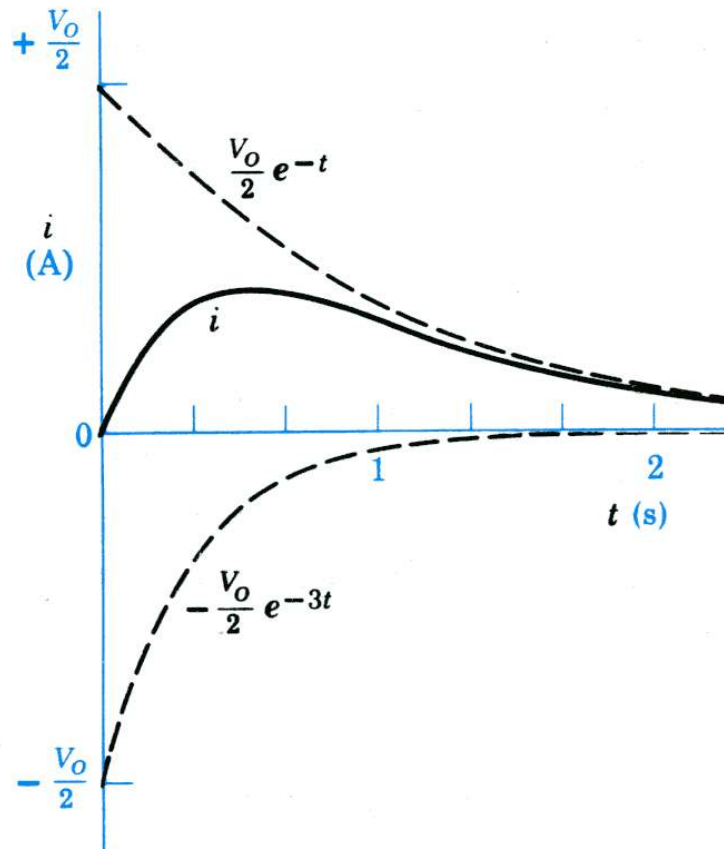
Fizikai kép alapján: Ha $i(0+) = 0$, akkor $v_R(0+) = 0$ és

$$0 \equiv v_C(0+) + v_L(0+) = V_0 - \frac{1}{C} \int_0^{0+} i \, dt - L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0+}$$

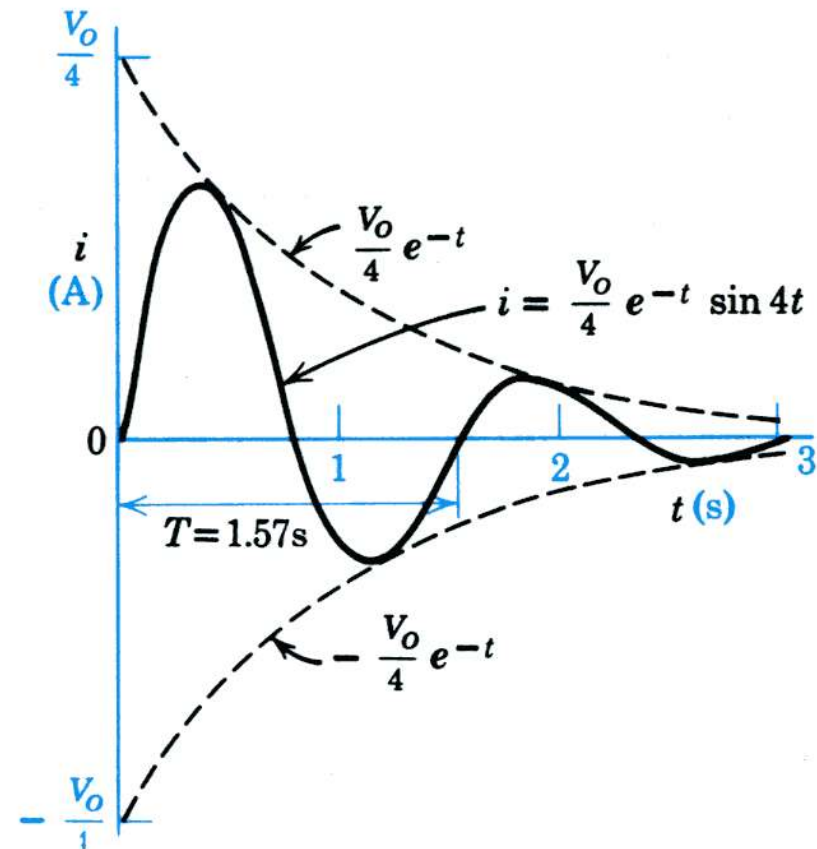
$$\frac{di}{dt} \Big|_{t=0+} = \frac{V_0}{L} = A_1 s_1 + A_2 s_2$$

A másodrendű rendszer tipikus tranziens megoldásai

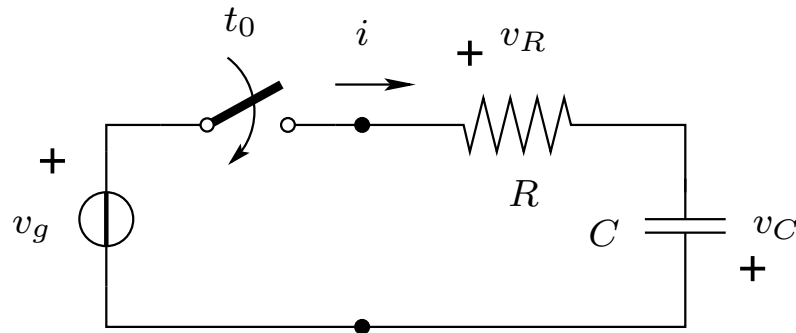
Két valós gyök esetén



Komplex konjugált gyökpár esetén



3.4(b) ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTBELI VÁLASZ MEGHATÁROZÁSA



ahol $t_0 = 0$

Vedd észre:

Az áramkör tranziens válaszát már meghatároztuk a 3.4(a) pontban a $v_C(0-) = V_0$ kezdeti feltétel mellett

Kirchhoff hurokegyenlet (óramutatóval ellentétes körüljárás), $t \geq 0$

$$v_g + v_C - iR = v_g + V_0 - \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt - Ri = 0$$

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dv_g}{dt}$$

Vedd észre: A tranziens meghatározásánál $v_g = 0$, de ez nem jelenti a feszültségforrás eltávolítását, csak a feszültség nullává tételét!!!

IMPEDANCIA KONCEPCIÓ

1. A megoldást formálisan az Ohm törvény

$$R = \frac{V}{I}$$

alakjában keressük

2. Alkalmazott módszer:

Korlátozzuk a gerjesztések osztályát

Megoldás az impedancia koncepcióval: A rendszerjellemző differenciál egyenlet

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dv_g}{dt}$$

Korlátozzuk a gerjesztést a komplex exponenciálisok osztályára:

$$v_g = A_g \exp(s_g t)$$

Mivel az ún. (komplex) exponenciálisok a differenciál egyenlet sajátfüggvényei, a választ exponenciális függvény alakjában keressük:

$$i(t) = A_i \exp(st) \big|_{s=s_g} \implies \frac{di}{dt} = s i \big|_{s=s_g}$$

A nagy újság: A differencia egyenlet helyett egy algebrai egyenletet kapunk

$$Rsi + \frac{1}{C} i = s \left(R + \frac{1}{sC} \right) i = sv_g$$

Amiből az impedancia az Ohm törvénnyel megegyező formában adódik

$$\frac{v_g}{i} = R + \frac{1}{sC} = Z(s)$$

Az adott gerjesztésre adott válasz meghatározása során az impedanciát a *gerjesztés által meghatározott* komplex frekvencián kell kiértékelni

$$i = \frac{v_g}{Z(s) |_{s=s_g}} = \frac{A_g \exp(s_g t)}{(R + \frac{1}{sC}) |_{s=s_g}} = \frac{s_g C}{1 + s_g RC} A_g \exp(s_g t) \quad (2)$$

Vedd észre:

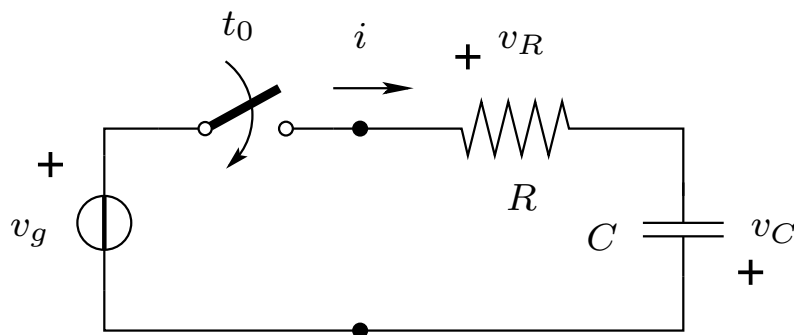
- Mind a tranziens, mind az állandósult állapotbeli megoldás $A \exp(st)$ alakban adódik,

DE !!!

- Tranziens esetén s értékét az áramkör, míg
- Állandósult állapot esetén s értékét a gerjesztés határozza meg
- Megkaptunk, amit akartunk

$$Válasz = gerjesztés \quad (/ \text{ vagy } \times) \quad impedancia$$

3.4(c) A TELJES VÁLASZ MEGHATÁROZÁSA



Kezdeti feltétel: $v_C(0-) = V_0$

A teljes válasz a 22. oldalon (1) egyenlettel adott tranziens, és a 30. oldalon (2) egyenlettel leírt állandósult állapotbeli viselkedés összegeként adódik, $t \geq 0$:

$$i(t) = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + \frac{s_g C}{1 + s_g RC} A_g \exp(s_g t)$$

A kezdeti feltétel figyelembe vétele:

$$i(0+) = A + \frac{s_g C}{1 + s_g RC} A_g \equiv \frac{v_R(0+)}{R} = \frac{v_g(0+) + v_C(0+)}{R} = \frac{A_g + V_0}{R}$$

3.5. Az **IMPEDANCIA** koncepció

- A gerjesztés és válaszjel kapcsolatát megadó differenciál egyenlet

$$a_n \frac{d^n v}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v = b_m \frac{d^m i}{dt^m} + \cdots + b_0 i$$

- Vedd észre, az exponenciális függvények speciális tulajdonságát

$$f_{exp}(t) = A \exp(st) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^n f_{exp}(t)}{dt^n} = \frac{d^n A \exp(st)}{dt^n} = s^n f_{exp}(t)$$

- Az exponenciális függvények a differenciál egyenletek sajátfüggvényei
- A tranziens válasz mindig a komplex exponenciálisok lineáris kombinációjaként adódik
- Korlátozzuk a gerjesztéseket az exponenciális függvények, ill. az azokból előállítható függvények osztályára

Megjegyzések az impedancia koncepcióhoz:

- $s = \sigma + j\omega$ jelöli a *komplex frekvenciát*
- Mivel a lineáris áramkörökre érvényes a szuperpozíció, az impedancia koncepció minden olyan gerjesztésre alkalmazható amely előállítható az exponenciális függvények *lineáris kombinációjaként*
- A $Z(s)$ impedancia a hálózatra jellemző mennyiség, azt teljesen leírja
- Ennélfogva a $Z(s)$ impedancia tartalmazza a hálózat tranziens válaszát
- Az állandósult állapotbeli viselkedés meghatározásához a $Z(s)$ impedanciát a gerjesztés által meghatározott, **s komplex frekvencián** kell elvégezni

Az impedancia felírása és alkalmazása

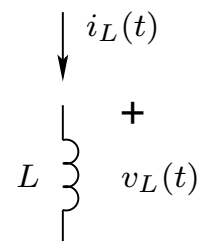
- Bevezetve az impedancia koncepciót az egyes áramköri elemekre
 - Ellenállás: $Z_R = \frac{v_R}{i_R} = R \text{ } [\Omega]$
 - Induktivitás: $Z_L = \frac{v_L}{i_L} = sL \text{ } [\Omega]$
 - Kapacitás: $Z_C = \frac{v_C}{i_C} = \frac{1}{sC} \text{ } [\Omega]$
- az impedancia a kapcsolási rajzból közvetlenül felírható
- Az impedanciákkal formálisan ugyanúgy lehet és kell számolni, mint az ellenállásokkal egy DC hálózatban
- Ne feledd, az impedanciák csak **exponenciális gerjesztés vagy azok lineáris kombinációja** esetén alkalmazhatók
- Az impedancia az s komplex frekvencia *polinomja*
- Az impedancia az adott hálózatra jellemző függvény
- Az adott gerjesztésre adott válasz meghatározásánál az impedanciát a gerjesztés által meghatározott s komplex frekvencián kell kiértékelni

Példa az áramköri elemek impedanciájának levezetésére

1. lépés: Korlátozzuk a gerjesztést a valós exponenciális függvények osztályára

$$i(t) = Ae^{st}, \quad \text{ahol } s \text{ valós szám}$$

2. lépés: Felírjuk az induktivitás egyenletét az időtartományban


$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

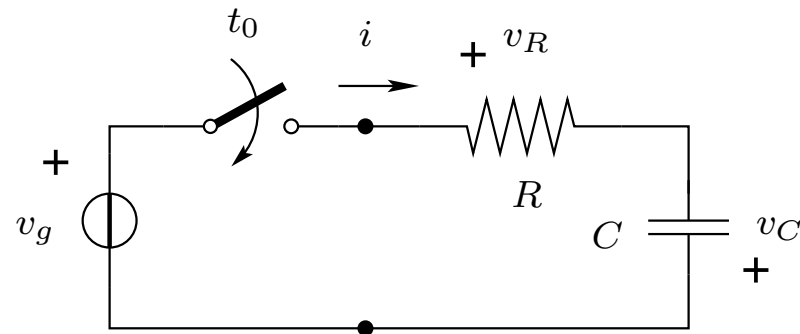
3. lépés: Az $i_L = i = Ae^{st}$ exponenciális gerjesztés mellett meghatározzuk v_L értékét

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} (Ae^{st}) = sL (Ae^{st}) = sL i_L(t)$$

4. lépés: Az induktivitás valós exponenciális függvény gerjesztésre érvényes impedanciája

$$Z_L(s) = \frac{v_L(t)}{i_L(t)} = sL$$

Impedancia koncepció alkalmazásának lépései



Lépések:

1. Vizsgálandó helyen kaput definiálunk vagy nyitunk (lásd fekete pontokat)
2. Adott kapura nézve felírjuk az impedancia függvényt

$$Z(s) = \frac{v_g}{i} = R + \frac{1}{sC} = \frac{1 + sRC}{sC} \quad [\Omega]$$

3. A tranziens válasz meghatározása az impedancia függvényből

$$\frac{v_g}{i} = Z(s) = \frac{Z^{[sz]}(s)}{Z^{[n]}(s)} = \frac{1 + sRC}{sC}$$

$$Z^{[sz]}(s)i = \underbrace{(1 + sRC)}_{\text{karakterisztikus egyenlet}} \quad i \equiv Z^{[n]}(s)v_g = sCv_g$$

Tranziens válasz: $v_g = 0$ de $i \neq 0$

$$1 + sRC = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{1}{RC}$$

Vedd észre: Mivel $Z(s)$ hordozza a karakterisztikus egyenletet, belőle a
(i) tranziens válasz és a (ii) hálózat stabilitása meghatározható

4. Az állandósult állapotbeli válasz meghatározása az impedancia függvényből

$$v_g \implies s_g$$

$$i = \frac{v_g}{Z(s) \big|_{s=s_g}} = \frac{1}{Z(s) \big|_{s=s_g}} A \exp(s_g t)$$

5. A teljes válasz felírása

$$teljes = tranziens + állandósult$$

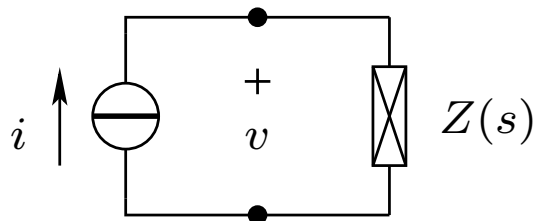
Stabilis hálózat esetén a tranziens (válasz) exponenciálisan eltűnik, azaz lecseng az idő függvényében

Az impedancia általános alakja

I. A gerjesztés és válaszjel kapcsolatát megadó differenciál egyenlet

$$a_n \frac{d^n v}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v = b_m \frac{d^m i}{dt^m} + \cdots + b_0 i$$

II. A gerjesztések korlátozása a (komplex) exponenciális függvények osztályára



Megengedett gerjesztések:

$$i(t) = A_i \exp(st) \implies \frac{d^n i}{dt^n} = s^n i$$

$$a_n s^n v + a_{n-1} s^{n-1} v + \cdots + a_1 s v + a_0 v = \left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \right) v$$

$$= b_m s^m i + \cdots + b_0 i = (b_m s^m + \cdots + b_0) i$$

III. Formálisan az impedanciát az ohm törvény formájában írjuk fel

$$a_n s^n v + a_{n-1} s^{n-1} v + \dots + a_1 s v + a_0 v = \left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \right) v$$

$$= b_m s^m i + \dots + b_0 i = (b_m s^m + \dots + b_0) i$$

Ohm törvény formátumának megfelelően átrendezve kapjuk

$$Z(s) = \frac{v}{i} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{\underbrace{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}_{\text{karakterisztikus egyenlet}}} = \frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$$

Vigyázz, kapcsolás függvénye, hogy a karakterisztikus egyenletet a számláló vagy a nevező hordozza!

Vedd észre: Mivel LTI hálózatról van szó

- a tesztőleges gerjesztést (komplex) exponenciálisok lineáris kombinációjaként állítjuk elő, majd
- a szuperpozíció tételét alkalmazzuk

3.6. Állandósult állapotú, szinuszos gerjesztésű (ún. AC) hálózatok analízise

- A 3.5 pontban bevezetett impedancia koncepció kiterjeszthető tetszőleges, pl. komplex s -ekre is
- Egyetlen fizikai megkötés: Egy fizikai rendszerben csak valós jel léphet fel

Jelkészlet: • $s \neq 0$ de valós: exponenciálisan csökkenő vagy növekvő jelalak

• $s = 0$: DC jel

• $s_1 = s_2^*$, azaz komplex konjugált: exponenciálisan csökkenő vagy növekvő amplitúdójú szinuszos jelalak

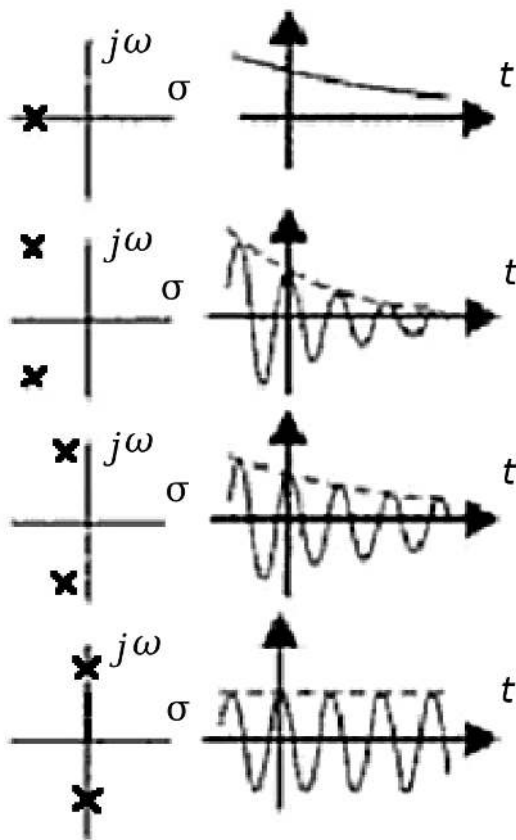
• $s_1 = j\omega$ és $s_2 = s_1^* = -j\omega$: állandó amplitúdójú szinuszos jelalak

És minden olyan jel, ami ezekből összetehető $\implies$ lásd szuperpozíció

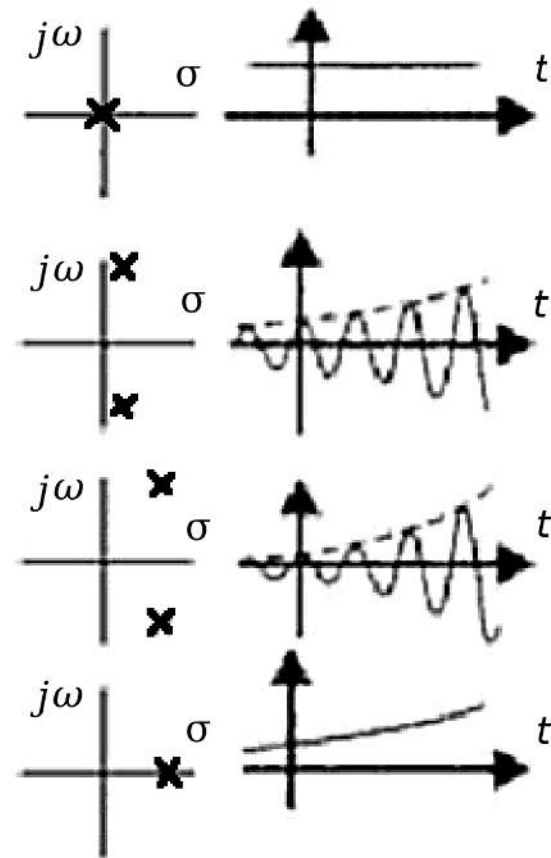
Jelek az $s = \sigma + j\omega$ komplex frekvencia és a t időtartományban

 s -tartomány

időtartomány

 s -tartomány

időtartomány



Az állandósult állapotú, szinuszos gerjesztésű hálózatok különös jelentőséggel bírnak, mert

- sok rendszer ilyen
- a szinuszos mérőjelek könnyen generálhatók
- áramkör tranziens viselkedése sokszor nem érdekes
- bármiféle jel összerakható szinuszos jelekből:
 - periódikus jel: Fourier sor
 - tetszőleges jel: Fourier transzformáció

Lineáris hálózatok tulajdonságai:

- Szuperpozíció tétele érvényes, tehát egy szinusz előállítható $s = \pm j\omega$ komplex frekvenciákból
- Így a szinuszos jelek is sajátfüggvények, azaz állandósult állapotban a szinuszos jelalak megőrződik
- Konzervatívok a szinuszos gerjesztésekre nézve (nem hoznak létre új frekvenciákat)

Az állandósult állapotú, szinuszos gerjesztésű hálózatok analízisének eszközei

- A számításokat egy transzformált tartományban, a **komplex amplitúdók** tartományában végezzük el
- Valamennyi (szinuszos) jelet a jelhez rendelt komplex amplitúdóval helyettesítünk
- Valamennyi áramköri elemet annak AC impedanciájával jellemezzünk
- **Impedancia csak egy van**, az impedancia ω függvénye. Kiértékelni az impedanciát az adott gerjesztő frekvencián kell
- Utána a komplex amplitúdókkal és AC impedanciákkal formálisan mint egy DC áramkörökkel számolunk
- Az eredményül kapott komplex amplitúdókból visszatérünk az időtartományba

Jó hír: Differenciál egyenlet helyett **algebrai egyenletet** kell megoldani

Rossz hír: Az ár amit fizetni kell az az, hogy **komplex mennyiségekkel kell számolni**

3.6(a) A komplex amplitúdó definíciója

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) = \Re \left\{ \underbrace{[V_{eff} \exp(j\theta)]}_{\text{komplex amplitúdó}} [\sqrt{2} \exp(j\omega t)] \right\}$$

ahol az effektív érték $V_{eff} = V_m / \sqrt{2}$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta) = \Re \left\{ \underbrace{[I_{eff} \exp(j\theta)]}_{\text{komplex amplitúdó}} [\sqrt{2} \exp(j\omega t)] \right\}$$

Az ok amiért a gerjesztő frekvencia(ák) a számítás során a komplex amplitúdóban nem jelennek meg:

- Egy lineáris hálózat konzervatív a gerjesztő frekvenciákra nézve, a gerjesztő frekvencia(ák) nem hordoz(nak) információt

3.6(b) Az AC impedancia

- Az egyes áramköri elemek impedanciája
 - Ellenállás: $Z_R = \frac{V_R}{I_R} = R [\Omega]$
 - Induktivitás: $Z_L = \frac{V_L}{I_L} = j\omega L [\Omega]$
 - Kapacitás: $Z_C = \frac{V_C}{I_C} = \frac{1}{j\omega C} [\Omega]$
- Az impedancia a kapcsolási rajzból közvetlenül felírható
- Az impedanciákkal formálisan mint az ellenállásokkal egy DC hálózatban lehet és kell számolni
- Az AC impedancia az s tartományban felírt impedanciából formálisan az $s = j\omega$ behelyettesítéssel megkapható

$$Z(j\omega) = Z(s) |_{s=j\omega}$$

- Az impedanciafüggvény a hálózatot teljesen jellemzi, azt kiértékelni mindig az adott gerjesztő frekvencián kell

Az AC impedancia és admittancia definíciója

Az **AC impedanciát** a feszültséghez és áramhoz rendelt komplex amplitúdók hányadosaként definiáljuk (lásd Ohm törvény)

$$V = Z I$$

$$\mathbf{Z} = \frac{V}{I} = |\mathbf{Z}| \angle \theta_Z = R + jX$$

ahol $\mathbf{Z}$ = impedancia, R = ellenállás, X = reaktancia

AC admittancia definíciója

$$\mathbf{Y} = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z} = |\mathbf{Y}| \angle \theta_Y = G + jB$$

ahol $\mathbf{Y}$ = admittancia, G = vezetés, B = szuszceptancia

A komplex amplitúdók és AC impedanciák/admittanciák használata:

- Az impedanciákkal/admittanciákkal formálisan úgy kell számolni mint az ellenállásokkal/vezetésekkel egy DC hálózatban
- Vigyázz, minden komplex (impedancia/admittancia és komplex amplitúdó is)
- Valamennyi áramköri törvény és a 3.3(a)–3.3(h) pontokban felsorolt hálózati tételek igazak a komplex amplitúdókra és impedanciákra/admittanciákra
- A 3.3(i) tétel kiterjesztendő az impedanciákra: Az illesztés feltétele a komplex konjugált lezárás, azaz $Z_L = Z_T^*$
- Az impedancia-/admittanciafüggvények a hálózatot teljesen jellemző függvények, értéküket mindig az adott gerjesztő frekvencián kell meghatározni
- Eltérő frekvenciás gerjesztések esetén szuperpozíciót kell alkalmazni az **időtartományban**

Vedd észre:

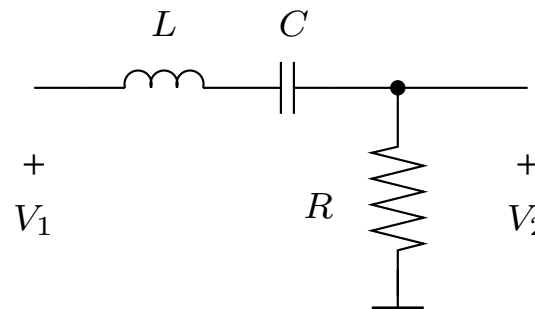
- Azáltal, hogy a jelekhez egy komplex amplitúdót rendeltünk
Azaz átmentünk egy transzformált tartományba
- Elértük amit akartunk, hiszen a kapcsolási rajzból az impedanciák/admittanciák segítségével **algebrai egyenletek** alakjában fel tudjuk írni a keresett válasz **komplex amplitúdóját**
- Amiből a választ az időtartományban **inverz transzformációval** kapjuk meg
- Jó hír: Differenciál egyenlettel sehol sem találkozunk!!!

Áramkör $\Rightarrow$ Egyszerűsített áramkör		
		↓
Időtartomány		Transzformált-tartomány
		↓ Transzformált rendszer • Komplex amplitúdók • Impedanciák ↓ Algebrai egyenlet ↓ Megoldás a transzformált tartományban: Válaszjel komplex amplitúdója
Válaszjel az időtartományban	$\Leftarrow$ Inverz transzformáció	

- Vedd észre:**
- Differenciál egyenlettel sehol sem találkozunk!!!
 - Gerjesztéseket a szinuszos (saját) függvényének osztályára korlátoztuk

3.6(c) Frekvenciaválasz-függvény

Egy másodrendű sáváteresztő szűrő kapcsolási rajza



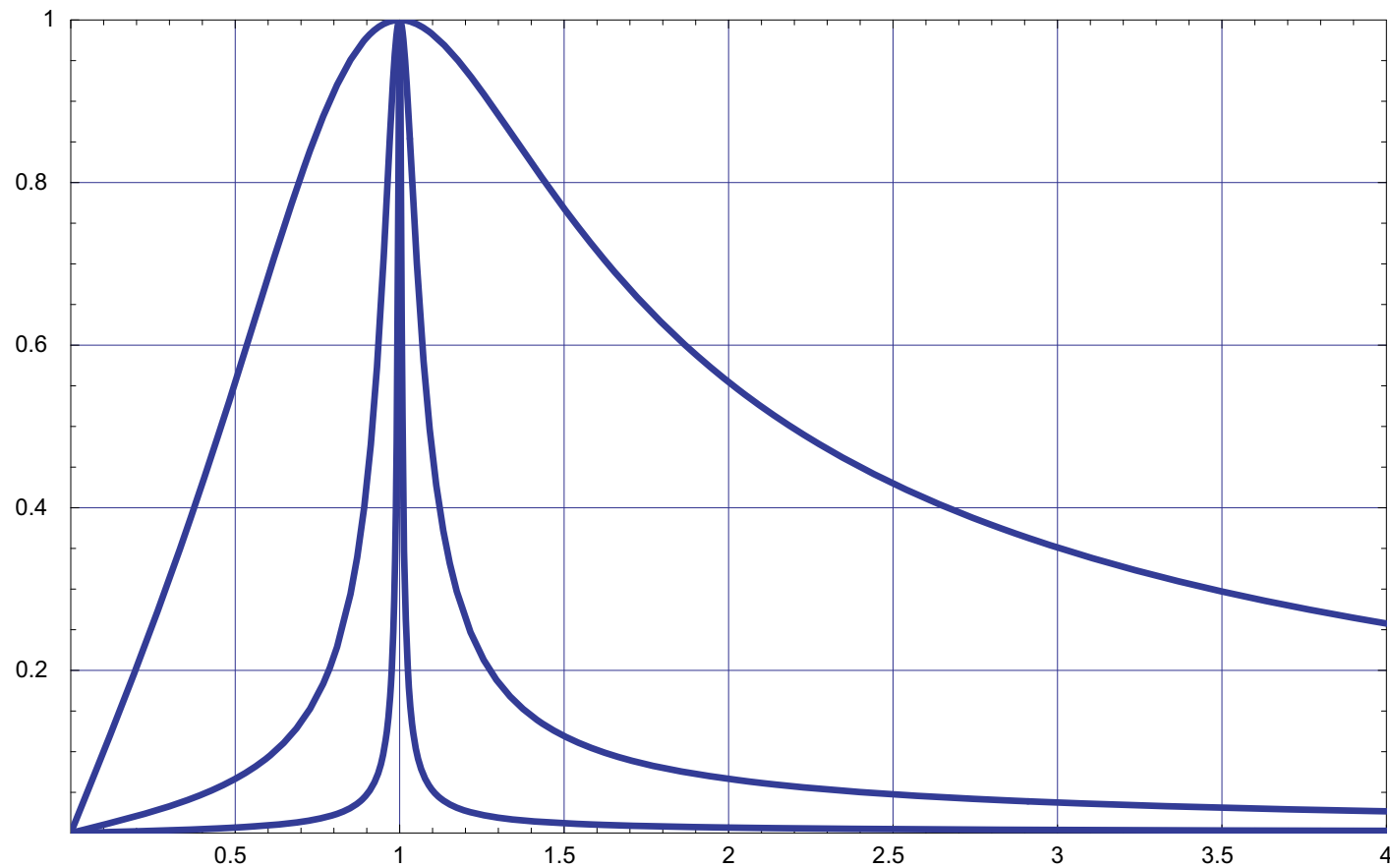
Frekvenciaválasz-függvénye

$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{j\omega \frac{R}{L}}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + j\omega \frac{R}{L}} = \frac{j\omega \frac{R}{L}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega \frac{R}{L}}$$

Ez egy ún. rezgőkör, amelynek paraméterei:

- Rezonanciafrekvencia: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Jósági tényező: $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$
- Sávszélesség (félteljesítményű pontok között): $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

A frekvenciaválasz-függvény ábrázolása

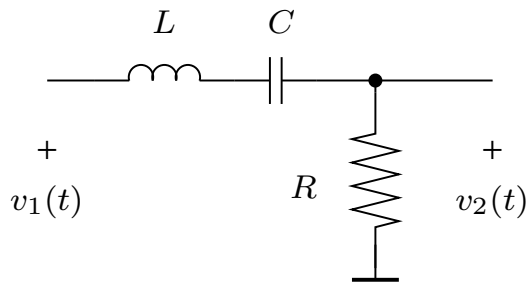


Összefoglaló: Állandósult állapotú AC áramkörök analízise

Áramkör $\Rightarrow$ Egyszerűsített áramkör		
		↓
Időtartomány		Transzformált tartomány
Gerjesztés az időtartományban Válaszjel az időtartományban	$\Rightarrow$ Transzformáció $\Leftarrow$ Inverz transzformáció	↓ Transzformált rendszer ↓ Impedanciák és transzfer függvények $j\omega$-ban + Komplex amplitúdók = Megoldás a transzformált tartományban: Válaszjel komplex amplitúdója

Az analízis lépései

(1) A feladat:



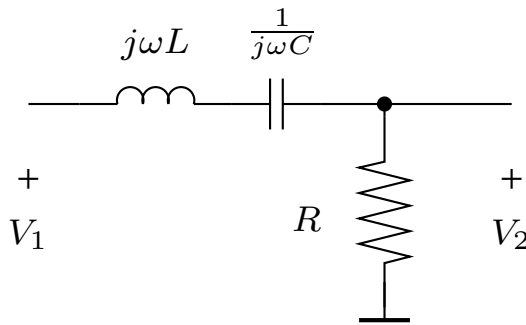
Gerjesztés: $v_1(t) = A \cos(\omega_g t + \theta_g)$

Kérdés: $v_2(t) = ?$

(2) Transzformáció a komplex amplitúdók tartományába

$$v_1(t) = A \cos(\omega_g t + \theta_g) \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{A}{\sqrt{2}} \exp(j\theta_g)$$

(3) A frekvenciaválasz- (vagy impedancia) függvény felírása a $j\omega$ tartományban:



$$H_{21}(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R}$$

(4) A válaszjel komplex amplitúdója

$$\begin{aligned} V_2 &= H_{21}(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_g} V_1 = \frac{R}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R} \Big|_{\omega=\omega_g} V_1 \\ &= \frac{A}{\sqrt{2}} |H_{21}(j\omega_g)| \exp(j[\theta_g + \angle H_{21}(j\omega_g)]) \end{aligned}$$

(5) Inverz transzformáció: A válaszjel az időtartományban

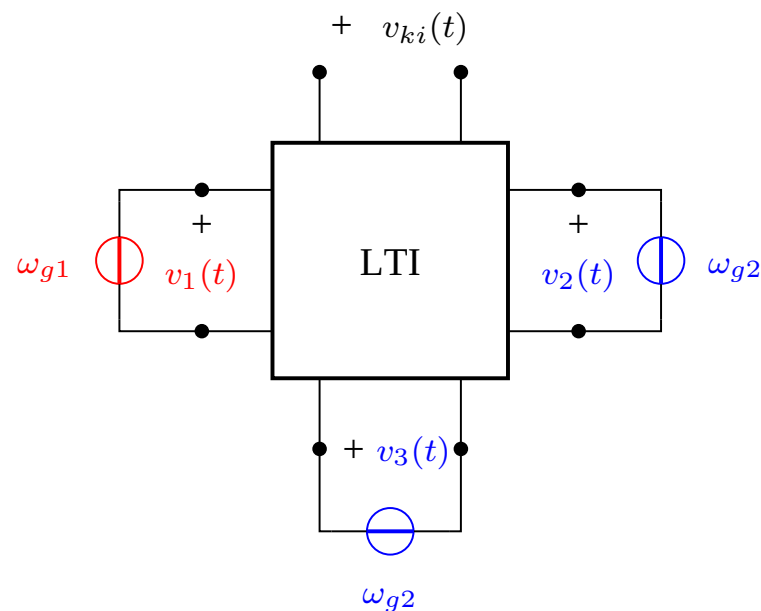
$$v_2(t) = |H_{21}(j\omega_g)| A \cos[\omega t + \theta_g + \angle H_{21}(j\omega_g)]$$

Szuperpozíció: Hol alkalmazzuk?

Idő és/vagy a komplex amplitúdók tartományában?

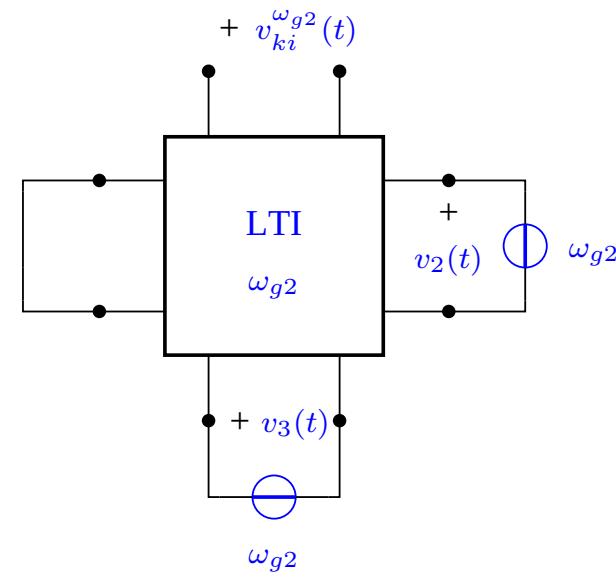
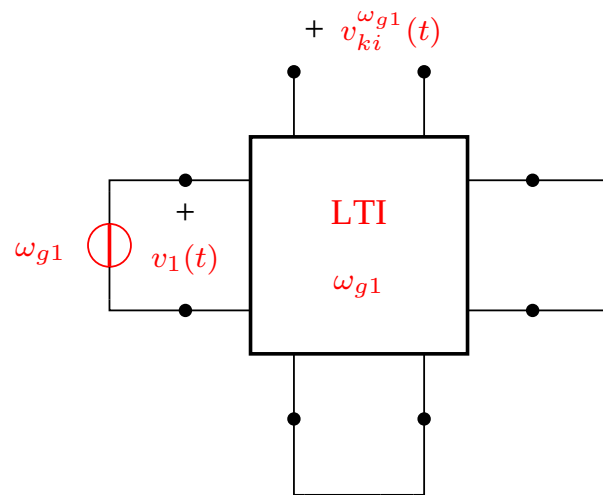
Esetleg mindkét helyen? Akkor hogyan?

(1) A feladat



(2) Szuperpozíció az időtartományban

- Probléma: Komplex amplitúdók csak egy gerjesztő frekvenciára írhatók fel
- Viszont LTI rendszer, tehát a szuperpozíció alkalmazható az időtartományban

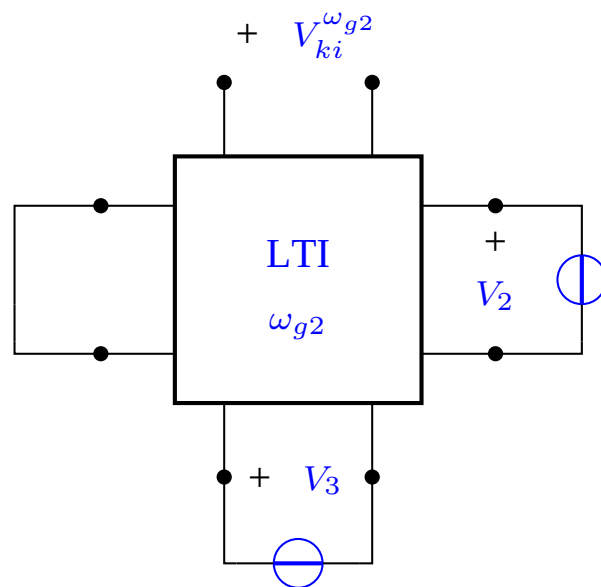


$$v_{ki}(t) = v_{ki}^{\omega_{g1}}(t) + v_{ki}^{\omega_{g2}}(t)$$

(3) $v_{ki}^{\omega_{g2}}(t)$ feszültség meghatározása a komplex amplitúdók tartományában

- Mivel $v_2(t)$ és $v_3(t)$ gerjesztések frekvenciája azonos, minden módszer használható:

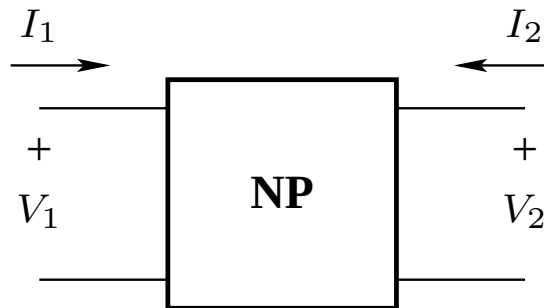
komplex amplitúdókra vonatkoztatott szuperpozíció, Kirchhoff törvények, hurokáramok és csomóponti potenciálok módszere, hálózatokra kidolgozott tételek, stb



Vedd észre, ebben az ábrában csak komplex amplitúdók szerepelnek!

3.6(d) Négypólus paraméterek

Lineáris négypólus (NP) jellemzése az impedancia mátrix segítségével



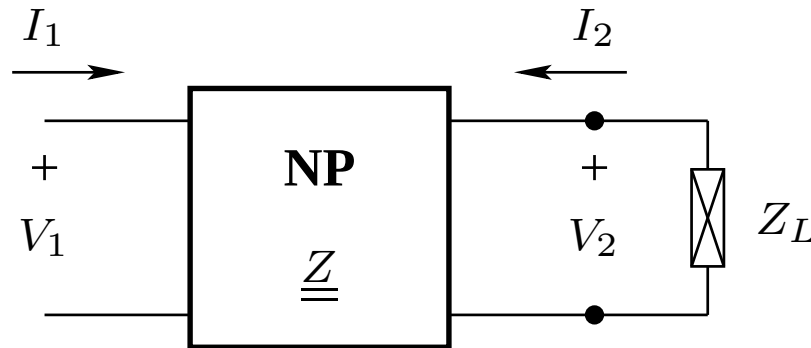
A komplex amplitúdók közti kapcsolat

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad \text{ahol az impedancia mátrix} \quad \underline{\underline{Z}} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

Az impedancia paraméterek meghatározása

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}, \quad Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}, \quad Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad \text{és} \quad Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

Lezárt NP paramétere



Adott lezáráshoz tartozó bemeneti impedancia

$$Z_{be} |_{Z_L} = \frac{V_1}{I_1} |_{Z_L} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$$

Adott lezáráshoz tartozó frekvenciaválasz-függvény (feszültség erősítés)

$$A_v |_{Z_L} = \frac{V_2}{V_1} |_{Z_L} = \frac{Z_{12}Z_L}{Z_{11}Z_L + Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$