

Áramkörelmélet

Áramkör elmélet

- Motiváció: elektromos áramkörök a környezetünkben majdnem mindenhol jelen vannak: számítógépek, hifi készülék, televízió, elektromos rendszer, telekommunikációs rendszer, stb. Az áramkörök ezekben az alkalmazásokban nagyon különböző módon jelennek meg mind jellemzőjükben, mind elemzési és tervezési módjukban.
- Fókusz: az áramkörök elektromos viselkedése.
- A cél: az áramkörelmélet kvalitatív és kvantitatív módon írja le az áramkörök viselkedését, ebből következik, hogy az áramkörelmélet eszközei matematikai eszközök, ezért az áramkört egyenletekkel és áramköri változókkal írja le.

Mennyiségek: töltés, potenciál, feszültség

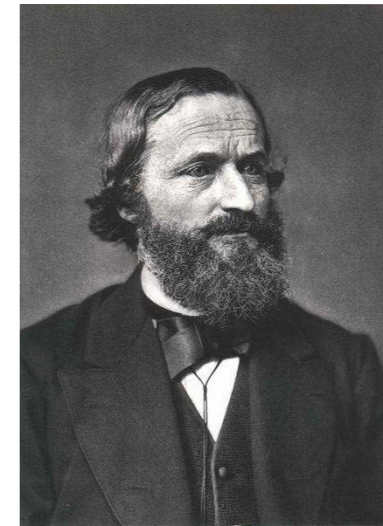
- A töltés fogalma
 - A töltés az atomi részecske egy elektromos tulajdonsága.
 - A Coulomb [C] - a töltés SI mértékegysége. Egy elektron töltése -1.6×10^{-19} [C]
 - Töltés megőrzés ill. tárolás
- A potenciál fogalma
 - Töltések vonzása/taszítása
 - Elektromos mező
 - Egy mozgó töltés energiája az elektromos mezőben
- A feszültség két elektromos potenciál közötti különbség
 - Mindig két pont között értelmezett
 - A földpont egy fiktív pontja az áramkörnek.
- Vonalintegrálja egy egységnyi töltésre ható erőnek egy elektromos mezőben.
- Szokásos jelölése $u(t)$ vagy U . Az SI mértékegysége a Volt [V] [$\text{m}^2\text{kg}/\text{s}^3\text{A}$].

Mennyiségek: áram, teljesítmény

- Az áram a töltések mozgása. A töltés időbeli változásának mértéke.
 - Az áram az idő szerinti deriváltja egy áramköri elemen áthaladó töltésnek.
 - Szokásos jelölése $i(t)$ vagy I .
 - Az SI mértékegysége az Amper [A].
- A teljesítmény a feszültség és az áram szorzata
 - Egy áramköri elem teljesítménye a hozzá szállított vagy tőle elvont energia időbeli deriváltja.
 - Szokásos jelölése $p(t)$ vagy P . Az SI mértékegysége a Watt [W].

Az áramkör története

- Kezdetek:
 - 1800: Volta, Ampere, Ohm, Faraday, Henry, Siemens, Coulomb, Galvani
 - 1845: Kirchhoff feszültség- és áramtörvénye
 - 1861: Maxwell
 - 1853: Thevenin
 - 1888: Heinrich Rudolph Hertz
 - 1895: Wilhelm Röntgen
 - 1926: Norton
 - 1930: Bode
- Hova vezetett az áramkörelmélet?
 - Vezetékes és vezeték nélküli kommunikáció
 - Számítástechnika!



Gustav Robert Kirchhoff
(1824 – 1887)

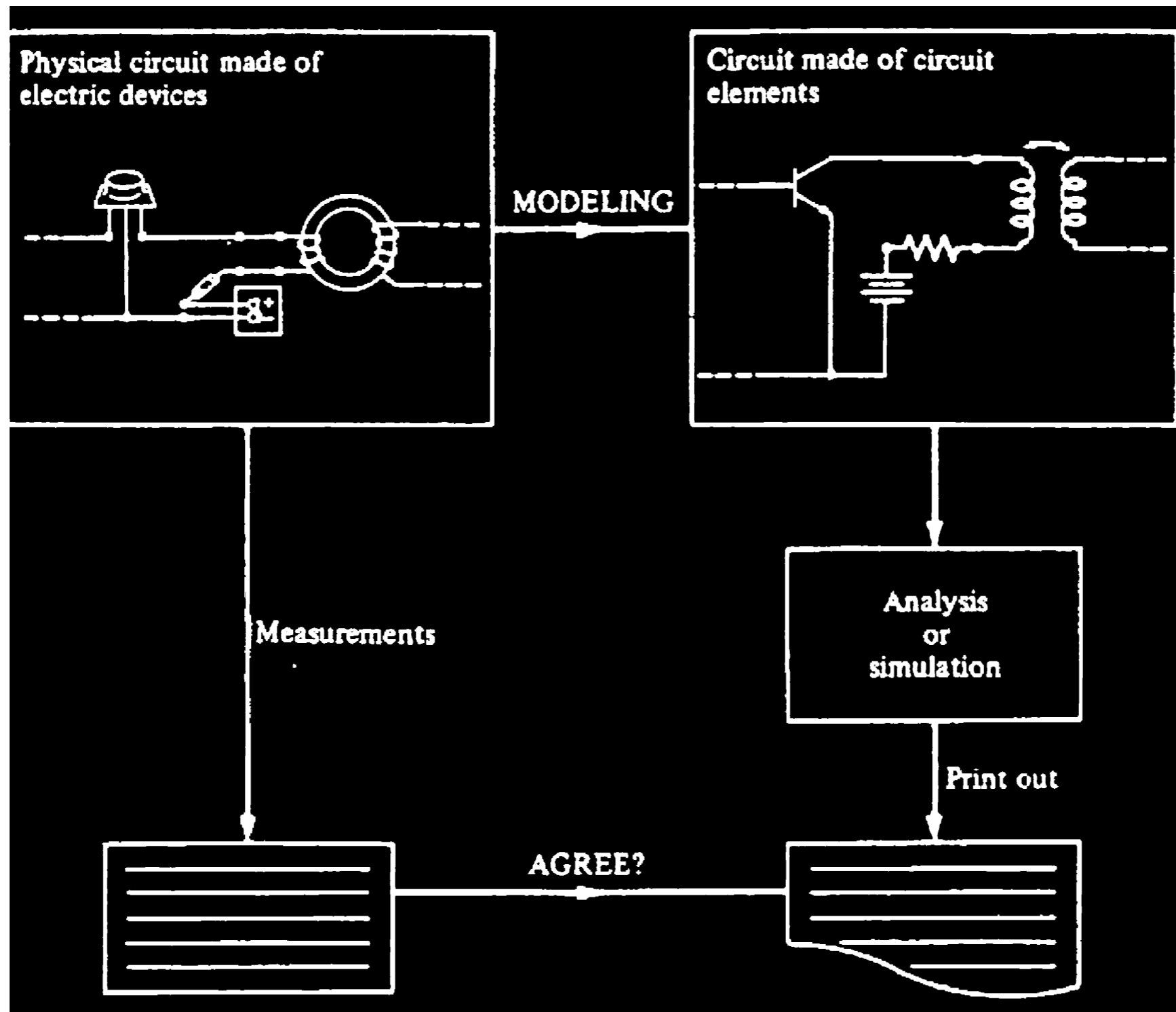
Az áramköri elemek: bevezetés

- Az áramkör komponensek összessége, amelyek elvezetései csomópontokban kapcsolódnak (mint egy hálózat).
- Alapvetően 7 fajta komponens (áramköri elem) építi fel az összes áramkört:
 - feszültség- és áramforrás
 - ellenállás,
 - kapacitás (kondenzátor)
 - induktivitás (tekercs)
 - dióda és tranzisztor
- Ezekből az építőelemekből nagy bonyolultságú áramköröket (vagy hálózatokat) tudunk építeni: számítógép, kommunikációs vevő, audio-video szórakoztató rendszerek, hadászati fegyverek, orvosi diagnosztikai rendszerek, stb...

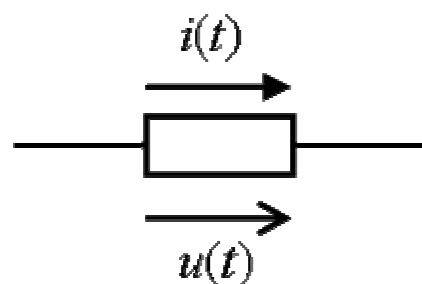
Elektromos alkatrész vs. áramköri elemek

- Az elektromos alkatrész egy “megfogható” fizikai objektum a laborban, vagy a gyárban.
- A fizikai áramkörök ilyen elektromos alkatrészek vezetéses összekapcsolásból áll.
- Ezeknek az elektromos alkatrészeknek az idealizált modelljei az áramkörelméletben a komponensek:
 - az ellenállás ($u= Ri$)
 - az induktivitás ($u=L di/dt$)
 - a kapacitás ($i=C du/dt$)
 - stb...

Egy fizikai áramkör analízise



Komponensek osztályozása



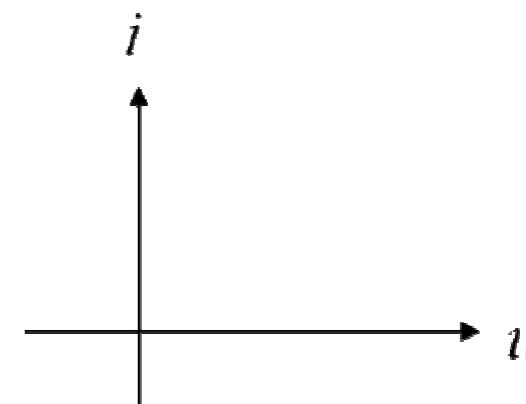
Implicit karakterisztika: $\Phi\{u(t), i(t)\} = 0$



Explicit karakterisztika:

$$u(t) = \Phi_u\{i(t)\}$$

$$i(t) = \Phi_i\{u(t)\}$$



A teljesítmény: $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ \longrightarrow $\begin{cases} p(t) > 0 \longrightarrow \text{fogyasztó} \\ p(t) < 0 \longrightarrow \text{termelő} \end{cases}$

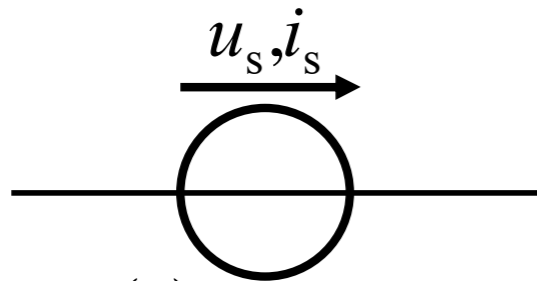
Munkafüggvény: $w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau$

A munka t_1 és t_2 között: $W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = w(t_2) - w(t_1)$

A komponensek osztályozása 1.

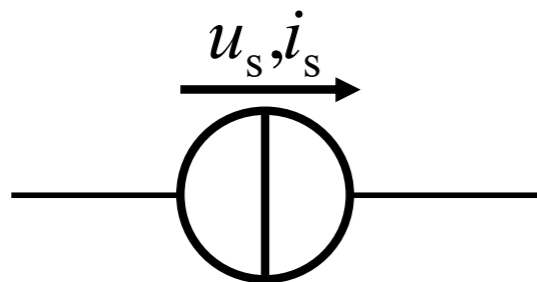
Források:

- Feszültségforrás:



$u = u_s(t)$
 i tetszőleges az áramkör kényszere

- Áramforrás:



$i = i_s(t)$
 u tetszőleges az áramkör kényszere

- Megjegyzés:

- DC: $u_s(t) = U_0$
- AC: $u_s(t) = U_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0)$

- Csúcstól csúcsig érték:

$$U_{pp} = U_{\max} - U_{\min}$$

- Effektív érték (RMS):

Szinuszos jelre:
 $U_{\text{eff}} = 0.707 U_{\text{max}}$

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

Abszolút érték

$$U_{\text{abs}} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$$

- Átlag érték: DC az AC-ban

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

A komponensek osztályozása 2.

- Rezisztív (egyébként dinamikus): $u(t=\tau)$ csak az $i(t)$ τ ideőbeli értékétől függ:

$$u(t = \tau) = \Phi_u \{i(t)\} = U(i(t = \tau), \tau) \quad \forall \tau$$

(vagy $i(t = \tau) = \Phi_i \{u(t)\} = I(u(t = \tau), \tau)$)

- Példa:
- Az ellenállás rezisztív, mivel u -t determinálja i a τ időpontban:

$$u = i R \text{ (Ohm "törvény")}$$

- Az indukció (tekercs) dinamikus, mivel $u(t=\tau)$ nem határozható meg $i(t=\tau)$ ismeretében:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

A komponensek osztályozása 3.

- Lineáris (egyébként nemlineáris) komponensek teljesítik a szuperpozíció elvét:

$$\Phi_u \left(\sum_k C_k \cdot i_k(t) \right) = \sum_k C_k \cdot \Phi_u(i_k(t)) = \sum_k C_k \cdot u_k(t)$$

- Példák:
- Az ellenállás lineáris elem.
- Az indukció (tekercs) is lineáris, mivel

$$\Phi_u \{K_1 i_1 + K_2 i_2\} = L \frac{d(K_1 i_1 + K_2 i_2)}{dt} = K_1 L \frac{d(i_1)}{dt} + K_2 L \frac{d(i_2)}{dt} = K_1 \Phi_u \{i_1\} + K_2 \Phi_u \{i_2\}$$

A komponensek osztályozása 4.

- Időinvariáns (egyébként idővariáns) egy komponens, amelynek u feszültsége explicit nem függ az időtől:

$$u(t) = \Phi_u \{i(t)\} \rightarrow u(t - \tau) = \Phi_u \{i(t - \tau)\}$$

- Kauzális (egyébként akauzális) egy komponens, ha az u feszültség függ az i áram múltjától/jelenétől, de nem függ a jövőjétől, azaz az $u(\tau)$ csak az $i(t)$ azon értékeitől függ, ahol $t < \tau$.

A komponensek osztályozása 5.

- Passzív (egyébként aktív) komponensek mindig fogyasztják (soha nem termelik) az energiát, azaz a munkafüggvényük mindig pozitív:

$$w(t) \geq 0$$

- Példa:
- Az ellenállás passzív elem, mivel

$$w(t) = \int_{-\infty}^t u \cdot i dt = \int_{-\infty}^t (Ri) \cdot i d\tau = R \int_0^t i^2 dx \geq 0$$

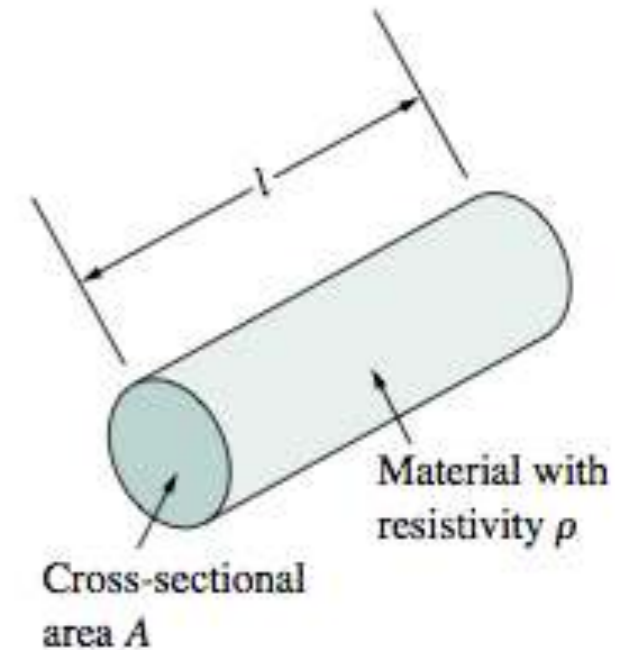
↑
csak ha $R > 0$!

- Az indukció (tekercs) passzív elem, mivel

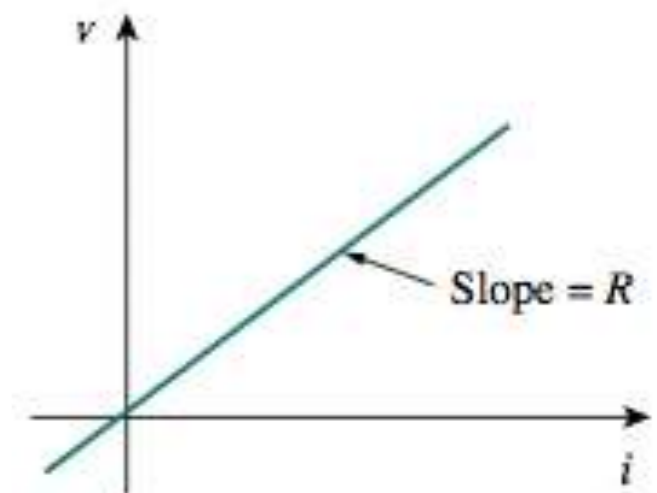
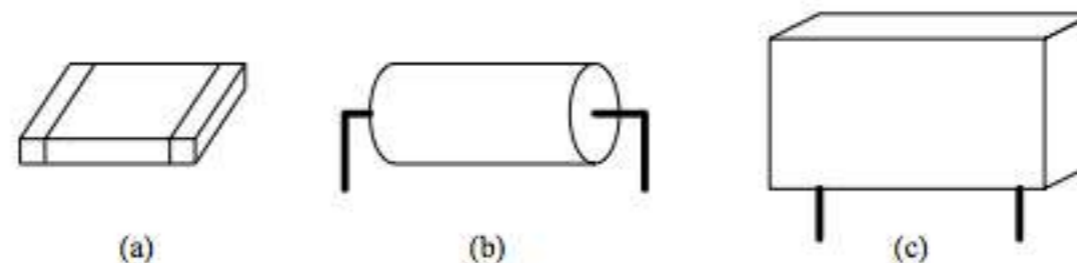
$$w(t) = \int_{-\infty}^t u \cdot i dt = \int_{-\infty}^t L \frac{di}{d\tau} \cdot i d\tau = \frac{L}{2} \int_0^{i^2} dx = \frac{L}{2} i^2(t) \geq 0$$

Az ellenállás

- egyértelmű összefüggés van a rajta mért feszültség és a rajta átfolyó áram között, függetlenül az időbeli lefolyástól.
- $u=f(i)$, az esetek többségében: $u=Ri$
- közösleges, lineáris ellenállások. Az ellenállás aktív részének anyaga szénréteg, fémréteg, ellenállás-huzal. Kerámia tartókra viszik fel, kivezetéseket csatlakoztatnak hozzá.
- hőre érzékeny ellenállások. NTC hőre csökken-, PTC hőre nő az ellenállás értéke. Hőmérséklet mérés, túláram védelme.
- potenciométerek. Két végérték között változtatható az ellenállás értéke.



$$R = \rho \frac{\ell}{A}$$



Alapvető összefüggések, hálózatokra vonatkozó tételek

- Ellenállások soros kapcsolása:

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \dots + R_N = \sum_{n=1}^N R_n$$

- Párhuzamos kapcsolása:

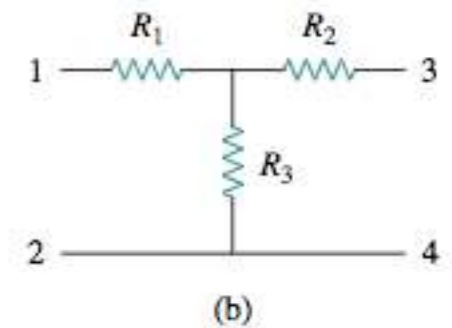
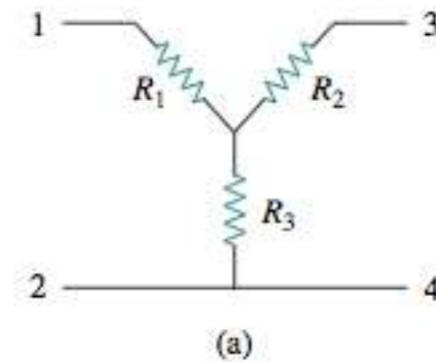
$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

Alapvető összefüggések, hálózatokra vonatkozó tételek

- Delta -> Csillag átalakítás:



$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}$$

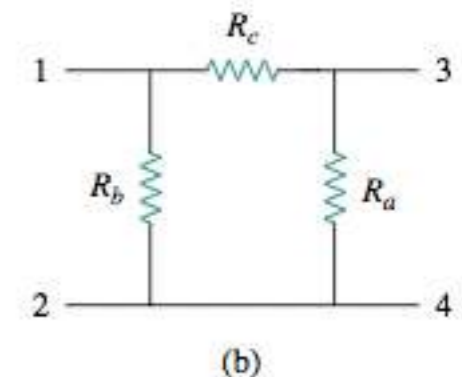
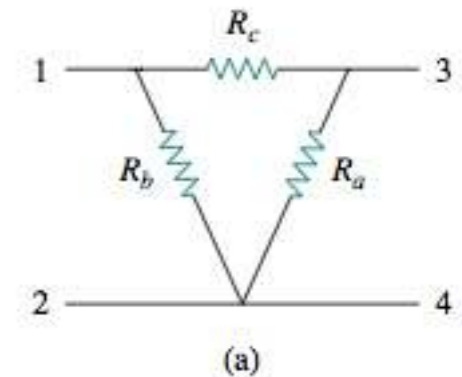
$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

- Csillag -> Delta átalakítás:

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

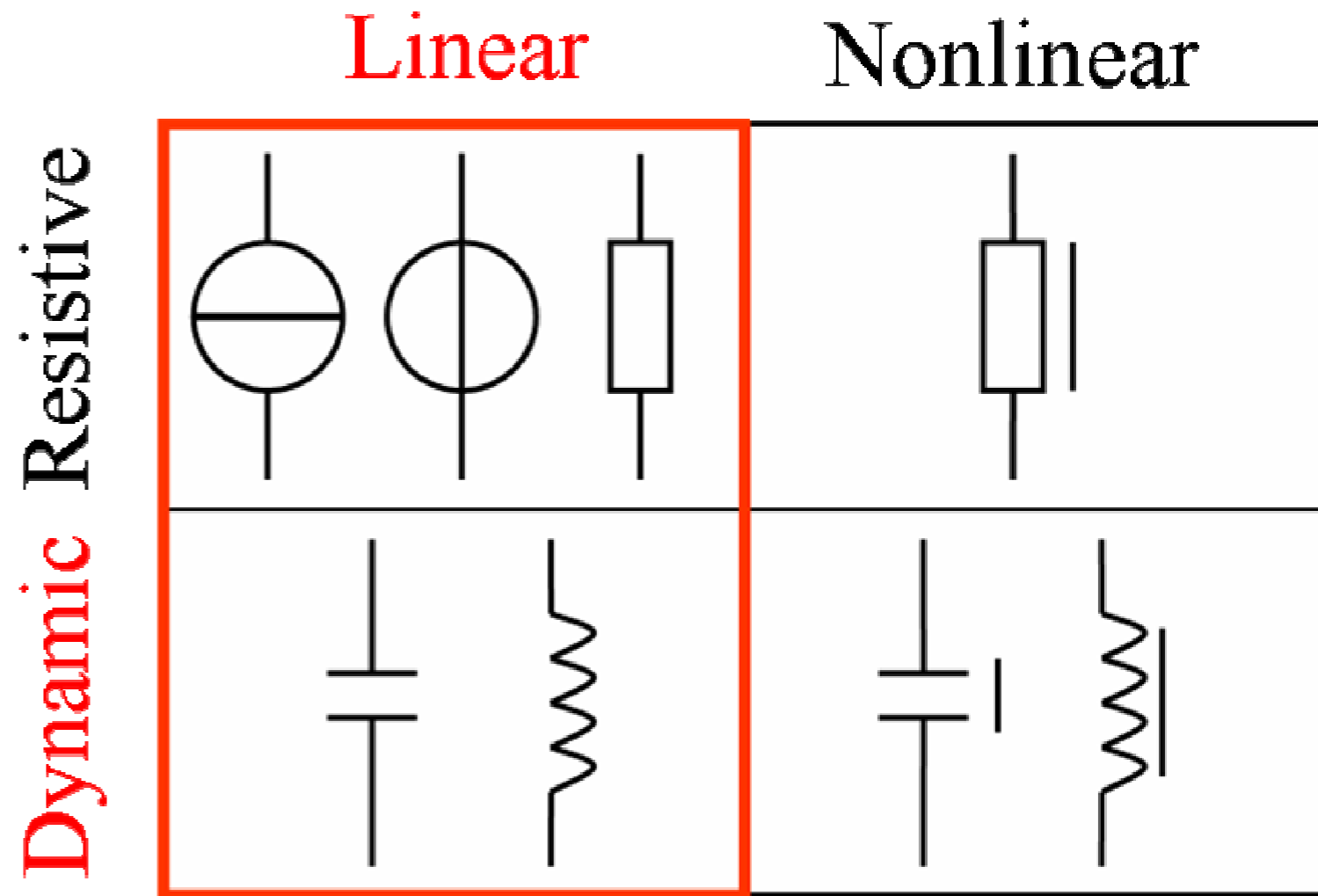
$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$



Lineáris dinamikus áramkörök (vagy hálózat)

- Alapvető lineáris áramköri elemek:
- Ellenállás, R , [Ω] (Ohm)
- Indukció (tekercs), L , [H] (Henry)
- Kapacitás (kondi), C , [F] (Farad)



Induktivitás (tekercs)

- Az áram a tekercsben mágneses mezőt indukál:

$$B(t) = K_1 i_L(t)$$

- A mágneses mező változása induktív feszültséget eredményez:

$$u_L(t) = K_2 \frac{dB(t)}{dt}$$

- A pillanatnyi feszültség értéke:

$$u_L(t) = \Phi_u \{i_L(t)\} = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

- ahol $L=K_1K_2$.



Kapacitás (kondenzátor)

- A kondenzátorban lévő töltést az E elektromos mezővel arányos feszültség határozza meg:

$$Q = C u_C(t),$$

ahol C a kapacitás.

- A töltés időbeli változása:

$$i_C = dQ/dt.$$

- A pillanatnyi áram ezek alapján

$$i_C(t) = \Phi_i \{u_C(t)\} = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

