

1. Valós Euklideszi terek

1. Jelölje V a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok vektorterét. Ezen a vektortéren definiáljuk azt a függvényt, amely minden polinomhoz a fokszámát rendeli. Norma-e ez a leképezés?

M.o.:

1. Az igaz, hogy minden polinomhoz pozitív vagy nulla értéket rendel a leképezés, de az nem igaz, hogy csak a vektortér nulleleméhez, tehát a nullpolinomhoz rendel a nulla értéket, mert bármely nem nulla konstans polinom fokszáma is nulla! → Nem Norma!

2. Legyen $V = \mathbb{R}^n$ a valós n dimenziós vektorok tere, és értelmezzük a következő leképezést:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Ez a leképezés metrika vagy sem?

M.o.:

1. $d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$ Teljesül, hiszen pozitív számok összegeként értelmezzük.

Ha $\underline{x} = \underline{y}$ akkor minden i -re $x_i = y_i$, vagyis $|x_i - y_i| = 0$ és így $d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 0$.

Ha $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ akkor minden i -re teljesül, hogy $|x_i - y_i| = 0$, vagyis $x_i = y_i$ és így $\underline{x} = \underline{y}$

2. Szimmetrikus, mert:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = d(\underline{y}, \underline{x})$$

3. Teljesül a háromszög egyenlőtlenség:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) + d(\underline{y}, \underline{z}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| \geq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| = d(\underline{x}, \underline{z})$$

mert valós számokra teljesül, hogy $|x_i - y_i| + |y_i - z_i| \geq |x_i - z_i|$ → Tehát Metrika!

3. Legyen $V = \mathbb{R}^n$ a valós n dimenziós vektorok tere, és értelmezzük a következő leképezést:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=1}^n (kx_k) \cdot (ky_k)$$

Skálárszorzatot határoz-e meg ez a leképezés?

M.o.:

1. Pozitív definit: $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \sum_{k=1}^n (kx_k) \cdot (kx_k) = \sum_{k=1}^n k^2 x_k^2 \geq 0$

Ha $\underline{x} = \underline{0}$ akkor teljesül, hogy $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \sum_{k=1}^n (kx_k) \cdot (kx_k) = \sum_{k=1}^n k^2 x_k^2 = 0$

Ha pedig $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \sum_{k=1}^n (kx_k) \cdot (kx_k) = \sum_{k=1}^n k^2 x_k^2 = 0$, abból következik, hogy minden $x_k = 0 \rightarrow \underline{x} = \underline{0}$

2. Szimmetrikus: $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=1}^n (kx_k) \cdot (ky_k) = \sum_{k=1}^n (ky_k) \cdot (kx_k) = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$

3. Homogén: $\langle \lambda \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=1}^n (k\lambda x_k) \cdot (ky_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^n (ky_k) \cdot (kx_k) = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$

$$\langle \underline{x} + \underline{z}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=1}^n (k(x_k + z_k)) \cdot (ky_k) = \sum_{k=1}^n (kx_k)(ky_k) + (kz_k)(ky_k) =$$

4. Lineáris:

$$= \sum_{k=1}^n (kx_k)(ky_k) + \sum_{k=1}^n (kz_k)(ky_k) = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \langle \underline{z}, \underline{y} \rangle$$

Tehát Skalárszorzat!

4. Ha az $\mathbb{R}^4$ euklideszi téren a skalárszorzatot a 2.3. feladatban meghatározott módon adjuk meg, akkor mekkora az alábbi két vektor által bezárt szög?

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

M.o.:

Szükség van a vektorok skalárszorzatára:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=1}^4 (kx_k) \cdot (ky_k) = (1 \cdot 2)(1 \cdot (-1)) + (2 \cdot 0)(2 \cdot 1) + (3 \cdot 1)(3 \cdot 1) + (4 \cdot (-1))(4 \cdot 0) = 7$$

A vektorok hosszára/normájára

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^4 (kx_k) \cdot (kx_k)} = \sqrt{(1 \cdot 2)(1 \cdot 2) + (2 \cdot 0)(2 \cdot 0) + (3 \cdot 1)(3 \cdot 1) + (4 \cdot (-1))(4 \cdot (-1))} = \sqrt{29}$$

$$\|\underline{y}\| = \sqrt{\langle \underline{y}, \underline{y} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^4 (ky_k) \cdot (ky_k)} = \sqrt{(1 \cdot (-1))(1 \cdot (-1)) + (2 \cdot 1)(2 \cdot 1) + (3 \cdot 1)(3 \cdot 1) + (4 \cdot 0)(4 \cdot 0)} = \sqrt{14}$$

A vektorok által bezárt szög:

$$\cos \alpha = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|} = \frac{7}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{14}} \rightarrow \alpha = 69,7^\circ$$

5. A szokásos 3 dimenziós Euklideszi térben, ahol $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a vektor koordinátái, normát alkot-e a következő képlettel definiált leképezés?

$$n(\underline{v}) = \min_{i=1}^3 |v_i|$$

(Megoldás: Nem norma mert nem igaz a pozitív definit tulajdonság.)

6. A háromdimenziós valós vektorok terében bevezetjük az alábbi függvényt:

$$s_a : (\underline{u}, \underline{v}) \mapsto \sum_{i=1}^3 u_i v_i a_i, \text{ ahol } \underline{a} \text{ egy pozitív komponensű konstans vektor.}$$

a) Bizonyítsuk be, hogy s_a skalárszorzatot definiál!

b) Adja meg az s_a skalárszorzat által meghatározott normát és metrikát!

c) Számítsa ki a $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $\underline{u} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ vektorok skalárszorzatát, a vektorok hosszát és a két vektor távolságát, ha

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}!$$

7. Legyen P_2 a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere. Lássuk be, hogy az alábbi függvények skalárszorzatot definiálnak:

a, $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$

b, $f(1)g(1) + f(1)'g(1) + f(1)''g(1)'$

8. Az alábbi függvények közül melyik határoz meg egy normát az R^n vektortéren?

a, $\max_{j=1}^n x_j$

b, $\max_{j=1}^n |x_j|$

c, $\sum_{j=1}^n |x_j|$

d, $|x_1|$

e, $n(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \underline{x} = \underline{0} \\ 0 & \text{különb} \end{cases}$

(Megoldás: Norma lesz b, és c,)

9. Az alábbi függvények közül melyik határoz meg egy metrikát az R^n vektortéren?

a, $|x_1 - y_1|$

b, $\max_{j=1}^n |x_j - y_j|$

c, $\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$

d, $m(\underline{x}, \underline{y}) =$ azon koordináták száma, amelyekben az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorok különböznek

e, $m(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{cases} 1 & \underline{x} = \underline{y} \\ 0 & \text{különb} \end{cases}$

(Megoldás: Metrika lesz b, c, és d, e,)

10. Adja meg az alábbi vektorok által bezárt szöveget az R^4 szokásos euklideszi téren!

(Skalárszorzat a szokásos: $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k$, norma a szokásos: $\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum x_i^2}$)

a, $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b, $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c, $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

(Megoldás: a, $\cos \alpha = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} \rightarrow \alpha = 60^\circ$ b, $\cos \alpha = \frac{-2}{2 \cdot 2}$ c, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot 2}$)