
Vektorterek

(Gyakorlaton lesz hasonló feladat)

Láttuk, hogy többfajta struktúra is rendelkezik a térvektorok által alkotott struktúra, az ún. vektortér tulajdonságaival. Ha matematikai objektumok valamely nem üres V halmazán meg lehet megadni az összeadást, és valamely testből vett ún. skalárokkal való számszorost úgy, hogy az alábbi definíciónak eleget tegyen, akkor általában is az így keletkező struktúrát **vektortérnek** nevezzük. Az alábbi definíció tehát a térvektorok tulajdonságait foglalja össze. A cél az általunk jól ismert 3 dimenziós tér szerkezetének általánosítása.

Definíció: Vektortér

$V \neq 0$ Halmaz
 $+$; Abel – csoport

T test : $+$; $\cdot$

Abel - csoport **Abel – csoport**
 (DE: a $+$ egységének **nincsen** inverze
 a $\cdot$ műveletre nézve nézve)

Disztributivitás (ezzel lehet a két művelet között
 különbséget tenni, a szorzás disztributív az összeadásra nézve):

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Test elemeit skalároknak (számoknak) nevezzük.

PL: valós számok, rac. Számok később lesz komplex számok

E két stuktúrát köti össze a skalárral való szorzás:

$$\begin{aligned} 1 \cdot v &= v \cdot 1 & v \in V, 1 \in T \\ \lambda(\mu v) &= (\lambda\mu)v & v \in V, \lambda, \mu \in T \\ (\lambda + \mu)v &= \lambda v + \mu v & v \in V, \lambda, \mu \in T \\ \lambda(v_1 + v_2) &= \lambda v_1 + \lambda v_2 & \lambda \in T, v_1, v_2 \in V \end{aligned}$$

V elemeit **vektoroknak** nevezzük (ha a fenti stuktúra szerint beszélünk róluk).

Példák valós számok fölötti vektorterekre:

- sík vektorai: geometriai és rendezett pár értelemben is, a szokásos összeadásra és számmal való szorzásra nézve vektorteret alkotnak a valós (racionális) számok teste felett.

- tér vektorai: geometriai és rendezett hármas értelemben is, a szokásos összeadásra és számmal való szorzásra nézve vektorteret alkotnak a valós (racionális) számok teste felett.

- $n \times m$ -es mátrixok, speciálisan: $1 \times n$ -es sorvektorok, $n \times 1$ -es oszlopvektorok a szokásos mátrix összeadásra és számmal való szorzásra nézve vektorteret alkotnak a valós (racionális) számok teste felett.

- az $\begin{bmatrix} a & 0 \\ a & a \end{bmatrix}$ alakú 2×2 -es mátrixok, ahol $a \in \mathbb{R}$, a szokásos mátrix összeadásra és számmal való szorzásra nézve vektorteret alkotnak a valós (racionális) számok teste felett.

- az egyetlen elemet, a **0** vektort tartalmazó halmaz a szokásos mátrix összeadásra és számmal való szorzásra nézve vektorteret alkot a valós (racionális) számok teste felett.

- Minden test tekinthető önmaga feletti vektortérnek.

- legfeljebb n -edfokú polinomok $\mathbb{R}$ felett

A definíció következményei:

1. Bármely $\lambda \in T$ -re $\lambda \underline{0} = \underline{0}$, ahol $\underline{0}$ a V halmazbeli összeadás inverze

$\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$ $/\lambda$ (hiszen, ha két vektor egyenlő, számszorosaik is egyenlők)

$\lambda(\underline{v} + \underline{0}) = \lambda \underline{v}$, baloldal felbontva a vegyes disztributív szably szerint: $\lambda \underline{v} + \lambda \underline{0} = \lambda \underline{v}$

Mindkét vektorhoz a jobb- és a baloldalon $(\lambda \underline{v})$ inverz elemét, $(\lambda \underline{v})^{-1}$ -et hozzáadva:

$$\lambda \underline{v} + (\lambda \underline{v})^{-1} + \lambda \underline{0} = \lambda \underline{v} + (\lambda \underline{v})^{-1}$$

$\underline{0} + \lambda \underline{0} = \underline{0}$ az egység definícióját alkalmazva:

$$\lambda \underline{0} = \underline{0}$$

2. Bármely $\underline{v} \in V$ -re $0 \underline{v} = \underline{0}$, ahol 0 a T testbeli összeadás egységeleme.

Biz.: $\lambda \underline{v} = (\lambda + 0) \underline{v} = \lambda \underline{v} + 0 \underline{v}$

Először a testbeli $+$ egységelem definícióját, aztán a vektortér definíciójában megkövetelt vegyes disztributív szabályt alkalmaztuk.

Mindkét oldalhoz $(\lambda \underline{v})$ inverz elemét, $(\lambda \underline{v})^{-1}$ -et hozzáadva:

$$\lambda \underline{v} + (\lambda \underline{v})^{-1} = \lambda \underline{v} + (\lambda \underline{v})^{-1} + 0 \underline{v}$$

$$\underline{0} = \underline{0} + 0 \underline{v} = 0 \underline{v}$$

3. Bármely $\underline{v} \in V$ -re, $(-1)\underline{v} = \underline{v}^{-1}$, ahol (-1) a T testbeli szorzás egységelemének az összeadásra vonatkozó inverze, $\underline{v}^{-1}$ pedig a vektortérben a v vektor összeadásra vonatkozó inverze.

Biz.:

$$\underline{0} = ((-1) + 1)\underline{v} \quad \text{a 2. állítás miatt}$$

$$\underline{0} = (-1)\underline{v} + 1\underline{v} = (-1)\underline{v} + \underline{v} \quad \text{a vektortér vegyes disztributivitási szabálya miatt, valamint az } 1\underline{v} = \underline{v} \text{ kikötése miatt.}$$

Másrészt

$$\underline{0} = \underline{v}^{-1} + \underline{v} \quad \text{a } \underline{0} \text{ definíciója miatt. Mindkét oldalhoz } \underline{v} \text{ inverz elemét, } \underline{v}^{-1} \text{-et hozzáadva:}$$

$$\underline{v}^{-1} = (-1)\underline{v} + \underline{v} + \underline{v}^{-1}$$

$$\underline{v}^{-1} = (-1)\underline{v} + \underline{0}$$

$$\underline{v}^{-1} = (-1)\underline{v}$$

4. Ha $\lambda \underline{v} = \underline{0}$, $\lambda \in T$, $\underline{v} \in V$ akkor vagy $\lambda = 0$, vagy $\underline{v} = \underline{0}$ (mindkettő is lehet)

Biz.: Ha $\lambda \neq 0$, akkor λ -nak létezik a szorzásra vonatkozó inverze a T testben, legyen ez λ^{-1} .

$$\lambda \underline{v} = \underline{0} \quad \text{mindkét oldalt beszorozva } \lambda^{-1}\text{-gyel, } \lambda^{-1}\lambda\underline{v} = \lambda^{-1}\underline{0}$$

$$\text{Baloldal} = 1\underline{v} = \underline{v}, \quad \text{ahol } 1 \text{ a tesbeli szorzás egységeleme}$$

$$\text{Jobboldal} = \underline{0} \quad \text{az 1. következmény miatt.}$$

Def.: A T test feletti V vektortér egy nemüres $W \subseteq V$ részhalmazát **altérnek** nevezzük a V -ben, ha W maga is vektortér ugyanazon T test felett ugyanazokra a V -beli vektorműveletekre (pontosabban ezeknek a műveleteknek a W -re történő megszorításaira) nézve.

Példák altérre:

1. síkvektorok halmaza $\subseteq$ térvektorok halmaza
2. ha a síkvektorokat $(x, y, 0)$ számhármassokkal ($x, y \in \mathbb{R}$), a térvektorokat (x, y, z) számhármassokkal ($x, y, z \in \mathbb{R}$) pedig reprezentáljuk, akkor a 0 harmadik elemmel rendelkező rendezett számhármassok vektortere altere az általános alakú számhármassoknak.
3. $\lambda(a, b, c)$, ahol $\lambda, a, b, c \in \mathbb{R}$, alakú számhármassok a valós számtest felett, ha az összeadást megfelelő elemenként definiáljuk, a számmal való szorzást pedig elemenkénti szorzással (biz. később).
4. Az $\begin{bmatrix} a & 0 \\ a & a \end{bmatrix}$ alakú valós elemű mátrixok alteret alkotnak az $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$ alakú valós elemű mátrixok vektorterében, amelyek alteret alkotnak az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ alakú valós elemű mátrixok vektorterében a valós (racionális) számok teste felett.
5. Minden vektortérben a $\{0\}$ altér.

Jelölés: $R \times R \times \dots \times R = R^n$, spec.: $R \times R = R^2$, $R \times R \times R = R^3$

Megjegyzés: R^2 és R^3 lényegében azonos (pontosabban izomorf, ld. később) a sík illetve a tér vektoraival.

Feladatok:

1. Általánosítsa a 2. példát rendezett szám n-esekre!
2. Milyen általánosítás tehető a 3. példával kapcsolatban?

Tétel: Egy T test feletti V vektortérben egy W nemüres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha:

(i) $\underline{u}, \underline{v} \in W \Rightarrow \underline{u} + \underline{v} \in W$

(ii) $\underline{v} \in W, \lambda \in T \Rightarrow \lambda \underline{v} \in W$ teljesül.

Megjegyzés: Ha a vektortér egy részhalmazáról be akarjuk látni, hogy egyben altér is, elegendő azt bizonyítani, hogy a vektorok összeadása és a skalárral való szorzás nem vezet ki a részhalmazból.

Biz.: A kommutativitás, asszociativitás, disztributív szabályok általános érvényűek, így azokat nem kell bizonyítani. Kérdéses lehet az egység (vektor) és az inverz(vektor) létezése.

Ezeket a tétel feltételei biztosítják, hiszen $0 \in T$ esetén bármely $\underline{v} \in W$ -re $0\underline{v} = \underline{0}$, ami (ii) miatt W -beli.

Hasonlóan, $-1 \in T$ -re a (ii) feltétel miatt, és a fent bizonyított 3. következmény miatt $(-1)\underline{v} = \underline{v}^{-1}$, vagyis minden W -beli elem $+$ -ra vonatkozó inverze is W -beli.

Igazoljuk a fenti, altérre vonatkozó példák helyességét!

Definíció:

A $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektorok **lineáris kombinációja** $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$

ahol $c_1, c_2, \dots, c_k \in T$.

Azt mondjuk, hogy a v vektor a $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineáris kombinációja, ha $\exists c_1, c_2, \dots, c_k \in T$, amelyekkel $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$ (T az a test, amely fölötti vektortérrel van szó.)

Egy **lineáris kombináció triviális**, ha minden skalár együttható 0. Ha van olyan skalár, ami nem nulla, a lineáris kombináció nem triviális. Bármely **triviális lineáris kombináció a nullvektort adja**.

Példa:

Írjuk fel a $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektort a következő vektorok lineáris kombinációjaként!

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

⇔ az alábbi lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$c_1 = -2t + 3, c_2 = t - 1, c_3 = t, t \in \mathbb{R}.$$

$$v = (-2t + 3) \underline{\underline{v}}_1 + (t - 1) \underline{\underline{v}}_2 + t \underline{\underline{v}}_3, t \in \mathbb{R}$$

A v vektor **végtelen sokféleképpen** állítható elő a megadott vektorok lineáris kombinációjaként.

Példa: a 2×2 -es mátrixok vektorterében a „vektorok” a 2×2 -es mátrixok. Tekintsük itt az alábbi „vektorokat”:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel a v vektort a v_1, v_2, v_3 vektorok lineáris kombinációjaként!

Megoldás:

$$v = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = v_1 + 2v_2 - v_3.$$

Példa: Lineáris egyenletrendszer értelmezhető (oszlop)vektorok **lineáris kombinációjaként**:

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

A megoldás: $\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, ami azt jelenti, hogy

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

$$= 2\text{oszlop}_1(A) - 3\text{oszlop}_2(A) + \text{oszlop}_3(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

Az egyenletrendszert a mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként értelmezve a b vektor az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációja. Ez egyben azt is mutatja,

ha van megoldás, akkor a b vektor előáll az oszlopvektorok lineáris kombinációjaként, ha nincsen megoldás, nem létezik ilyen lineáris kombináció sem. Mivel az egyenletrendszer léte önmagában is indokolja a 3-nál több komponensű „vektorok” kezelését, ez újabb érv a az általános értelemben vett vektorterek tanulmányozása mellett.

Definíció:

A $v_1, v_2, \dots, v_k$ **vektorok által generált altér (generátum)** ezen vektorok összes lineáris kombinációja:

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \{ c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k \mid c_1, c_2, \dots, c_k \in R \}$$

E definíció **helyes**, ugyanis mint azt fentebb beláttuk, valamely vektorok halmaza akkor és csak akkor altér, ha bármely halmazbeli vektor számszorosa is halmazbeli, és bármely két halmazbeli vektor összege is halmazbeli. Ez a definícióból ez esetben könnyen adódik (hf.), ezért ez generátum valóban altér.

Példa: Vizsgáljuk meg a következő vektorok által generált alteret!

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad .$$

Megoldás:

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \left\{ c_1 e_1 + c_2 e_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \mid c_1, c_2, c_3 \in R \right\} \Leftrightarrow R^2 \subset R^3$$

Példa: Lineáris egyenletrendszer értelmezhető (oszlop)vektorok **lineáris kombinációjaként**

$$x_1 - x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

A megoldás: $\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, ami azt jelenti, hogy

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

$$= 2\text{oszlop}_1(A) - 3\text{oszlop}_2(A) + \text{oszlop}_3(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

Az egyenletrendszert a mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként értelmezve a b vektor az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációja. Ez egyben azt is mutatja, ha van megoldás, akkor a b vektor előáll az oszlopvektorok lineáris kombinációjaként, ha nincsen megoldás, nem létezik ilyen lineáris kombináció sem. Mivel az egyenletrendszer léte önmagában is indokolja a 3-nál több komponensű „vektorok” kezelését, ez újabb érv a az általános értelemben vett vektorterek tanulmányozása mellett.

Összefoglalás

Ebben a részben a három dimenziós tér vektorainak tulajdonságaiból kiindulva megfogalmaztuk a **vektortér** (lineáris tér, lineáris vektortér) általános definícióját. A definíció legfontosabb következményei:

- $\lambda \in T$ -re $\lambda \underline{0} = \underline{0}$,
- $\underline{v} \in V$ -re $0 \underline{v} = \underline{0}$
- $\underline{v} \in V$ -re, $(-1) \underline{v} = \underline{v}^{-1}$

Értelmeztük az altér, a lineáris kombináció, a generátum fogalmát. Fontos eredmény:

Tétel: Egy T test feletti V vektortérben egy W nemüres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha:

- (i) $\underline{u}, \underline{v} \in W \Rightarrow \underline{u} + \underline{v} \in W$
- (ii) $\underline{v} \in W, \lambda \in T \Rightarrow \lambda \underline{v} \in W$ teljesül.