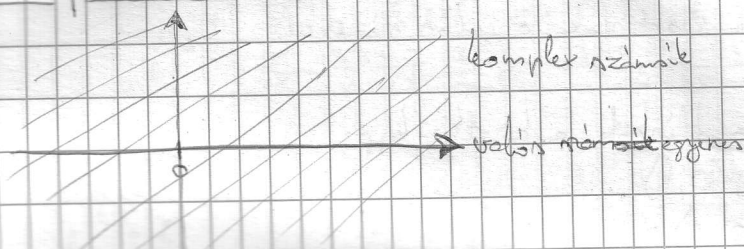


Ngy ZH-1:
 március 24-ig
 május 12-ig

Komplex-számok:



A komplex (ábr.) szám megjelölése rendelt némpárral
 $\Rightarrow$ 2-dimenziós vektortér ismét a komplex számok
 $\Rightarrow$ A komplex számok tere totál elv

Komplex számok ismét mintája:

$\rightarrow$ Összeadás: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ (Abel csoport $\checkmark$)

$\rightarrow$ Szorzás: $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) = (ac - bd, ad + bc)$

Asszociatív: $[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)]$

Biz: ~~112~~

1) $\rightarrow$:

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) = \textcircled{*}$$

$$\textcircled{*} = (e(ac - bd) - f(ad + bc), f(ac - bd) + e(ad + bc)) = \textcircled{**}$$

$$\textcircled{**} = (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \leftarrow$$

2) $\leftarrow$:

$$(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] = (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) = \textcircled{**}$$

$$\textcircled{**} = (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) = \textcircled{***}$$

$$\textcircled{***} = (ace - adf - bcf + bde, acf + ade + bce - bdf) \leftarrow$$

Van egységelem: $(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$

Biz: $(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$

Van inverz: $(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0)$

Biz: $(a, b) \cdot (x, y) = e(1, 0)$

$$(ax - by, ay + bx) = (1, 0)$$

$$ax - by = 1 \Rightarrow ax - \frac{by}{a} = 1 - \frac{by}{a} = 1$$

$$ay + bx = 0 \Rightarrow y = -\frac{bx}{a}$$

$$\Rightarrow ax + \frac{b^2}{a}x/a = 1 \Rightarrow x(a + \frac{b^2}{a}) = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2} = \left(a + \frac{b^2}{a}\right)^{-1}$$

$$y = -\frac{b}{a} \cdot x = \frac{-b}{a^2 + b^2} = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

$$\text{H} \left((x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \right)$$

Komplex számok distributivitása az összeadásra nézve: $(a,b) \cdot [(c,d) + (e,f)] = (a,b) \cdot (c+e, d+f) = (a(c+e), b(d+f)) = (ac+ae, bd+bf) = (ac,bd) + (ae,bf) = (a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (e,f)$

Komplex számok algebrai:

- Kanonikus
- Trigonometrikus
- Exponenciális

Komplex számok kapcsolata a valós számokkal:

$\Rightarrow (a,0)$ alakú komplex számok izomorfak a valós számokkal

Komplex számok kanonikus algebrai felírása a konstansoképp:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1) \cdot b$$

Imaginárius / képzetes egység: $(0,1) = i$

$$(0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1,0)$$

$$\Rightarrow (0,1)^2 = (-1,0) = -1^2 = (-1,0) \cong (-1) \in \mathbb{R}$$

Komplex számok osztása:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

izomorfia: bijektív transzformáció (egyszerűen egyértelmű és kétféleképpen fordítható)

~~bijektív~~ $\rightarrow$ injektív: ha $x, y \in V$ és $x \neq y$ akkor $f(x) \neq f(y)$
(minden függvényre igaz, nem f) $\rightarrow$ invertálható
 $\rightarrow$ surjektív: ha $y \in V \rightarrow \exists x: f(x) = y$
(minden elem képelem is)

$L: V \rightarrow V$ akkor és csak akkor injektív, ha $\dim(\text{Ker}(L)) = 0$

$L: V \rightarrow V$ akkor és csak akkor surjektív, ha $\dim(\text{Im}(L)) = \dim(V)$

azonos dimenziójú vektortér izomorfak

Komplex számok:

$$z \in \mathbb{C}, z = (a,b), a, b \in \mathbb{R}$$

$+$ és $\cdot$ műveletet testet alkotnak, $+$ egysége: $(0,0)$, $\cdot$ egysége: $(1,0)$

Valós rész: $\text{Re}(z) = a$, Képzetes rész: $\text{Im}(z) = b$

Képzetes egység: $(0,1) = i$, $(0,1)^2 = i^2 = (-1,0) \cong -1$

Distributivitás: $(a,b) \cdot [(c,d) + (e,f)] = (a,b) \cdot (c+e, d+f) = (a(c+e), b(d+f)) = (ac+ae, bd+bf) = (ac,bd) + (ae,bf) = (a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (e,f)$

Biz:

$$\text{bal oldal: } (a,b) \cdot [(c,d) + (e,f)] = (a,b) \cdot (c+e, d+f) = (a(c+e), b(d+f)) = (ac+ae, bd+bf) = (ac+ae-bd-bf, bd+bf) = (ac+ae-bd-bf, bd+bf)$$

$$\text{jobb oldal: } (a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (e,f) = (ac-bd, ad+bc) + (ae-bf, af+be) = (ac-bd+ae-bf, ad+bc+af+be) = (ac+ae-bd-bf, bd+bf)$$

Algebrai alak: $Z = (a, b) = \overset{\text{Re}}{a} + \overset{\text{Im}}{b}i$

Vektorszerűség: $\bar{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} b$ ahol $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ (valós egység) és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i$

Műveleti algebrai alak:

$$\bar{z}_1 = 3 + 4i$$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 3 + 4i + 2 + 5i = 5 + 9i$$

$$\bar{z}_2 = 2 + 5i$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (3 + 4i) \cdot (2 + 5i) = 6 + 15i + 8i + 20i^2 =$$

$$= 6 + 23i - 20$$

$$= -14 + 23i$$

konjugált:

$$\bar{\bar{z}} = a - bi \quad z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2$$

érték:

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{3 + 4i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{(3 + 4i)(2 - 5i)}{4 + 25} = \frac{6 - 14 + 23i}{29} = -\frac{14}{29} + \frac{23}{29}i$$

i hatványai:

$$i^{4k+1} = i$$

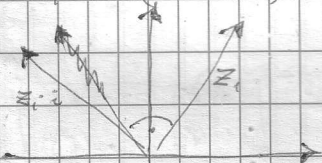
$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+3} = -i$$

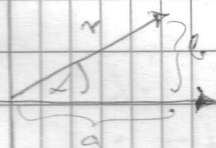
$$i^{4k} = 1$$

i-re való szorzás 90° -al fordítás:

$$\bar{z}_1 \cdot i = (3 + 4i) \cdot i = -4 + 3i$$



A



$(a, b) \rightarrow (r, \alpha)$ polár koordináta

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

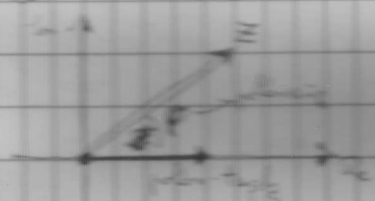
$$a = r \cdot \cos(\alpha)$$

$$b = r \cdot \sin(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$

$$\text{vagy } \tan\left(\frac{b}{a}\right) = \alpha$$

Polár koordináta-érték



$$z = (a, b) \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{vagy } 90^\circ < \varphi < 360^\circ$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$Z = a + bi = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r e^{i\varphi}$$

$$a = r \cos(\varphi)$$

$$b = r \sin(\varphi)$$

