

Komplex számok

7. Adja meg az alábbi komplex számok értékét:

$$\text{a, } \begin{cases} z_1 = 3 - 3i \\ z_2 = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \end{cases} \rightarrow \left(2 + \frac{\overline{z_1 - z_2}}{z_1 + z_2} \right)^4 = ?$$

$$\text{b, } \begin{cases} z_1 = 8 \cdot (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) \\ z_2 = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \\ z_3 = 1 + \sqrt{3}i \end{cases} \rightarrow \frac{\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}{z_3^3} + i^{413} = ?$$

$$\text{c, } \begin{cases} z_1 = 8 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \\ z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\ z_3 = 1 - \sqrt{3}i \end{cases} \rightarrow \left(\frac{5i}{2+i} - \frac{\overline{z_1} \cdot z_2}{z_3^3} \right)^{375} = ?$$

$$\text{d, } \begin{cases} z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \\ z_2 = -1 + i \end{cases} \rightarrow \frac{(6 - \sqrt{12}i)^3}{z_2^8} + \frac{\overline{z_1}}{i^{101}} = ?$$

$$\text{e, } \begin{cases} z_1 = 4 - 3i \\ z_2 = \sqrt{8}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \end{cases} \rightarrow \frac{\overline{z_1 + z_2}}{z_1 - z_2} = ?$$

$$\text{f, } \begin{cases} z_1 = \cos 35^\circ + i \sin 35^\circ \\ z_2 = 1 + \sqrt{3} \cdot i \end{cases} \rightarrow \frac{\overline{z_1^3} \cdot \overline{z_2^5}}{z_1 \cdot z_2} = ?$$

$$\text{g, } \begin{cases} z_1 = -\sqrt{3} + i \\ z_2 = \sqrt{2}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ) \end{cases} \rightarrow z_1^3 \cdot z_2^6 + \frac{\overline{z_1}}{z_2} = ?$$

$$\text{h, } \frac{1-2i}{2+i} \cdot 5 \cdot i^{173} = ?$$

$$\text{i, } \begin{cases} z_1 = -\sqrt{12} + 2i \\ z_2 = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) \end{cases} \rightarrow \frac{z_2^{12}}{z_1^3} + \frac{\overline{z_2}}{i^{677}} = ?$$

j, Határozza meg a $\sqrt[3]{1}$ értékei közül a 2. síknegyedbe esőt, ezt jelöljük z_1 -gyel!

$$\frac{(6 - \sqrt{12}i)^3}{\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^8} + \frac{\overline{z_1}}{i^{101}} = ?$$

k, $z_1 = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$
 $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
 $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$ $\rightarrow \left(\frac{10i}{4 + 2i} - \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_3^3} \right)^{413} = ?$

l, $z_1 = -6 + 10i$
 $z_2 = \sqrt{2} (\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$ $\rightarrow \frac{(\overline{z_1} + z_2^8)^4}{i^{563}} = ?$

m, $z_1 = 3 - 8i$
 $z_2 = \sqrt{2} (\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$ $\rightarrow \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{z_2^2} \cdot i^{63} = ?$

n, $z_1 = -\sqrt{12} + 2i$
 $z_2 = 2 (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ $\rightarrow \frac{z_2^8}{z_2^3 + \overline{z_1}^4} = ?$

o, $z_1 = \cos 35^\circ + i \cdot \sin 35^\circ$
 $z_2 = 1 + \sqrt{3} \cdot i$ $\rightarrow \frac{\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}{i^{222} \cdot z_1^3 \cdot z_2^5} = ?$

p, $z_1 = \sqrt{3} + 3i$
 $z_2 = 2 (\cos 330^\circ + i \cdot \sin 330^\circ)$ $\rightarrow \frac{z_1^8}{i^9 \cdot z_2^2} + \overline{z_2} = ?$

q, $z_1 = \sqrt{3} (\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)$
 $z_2 = 3 + \sqrt{3}i$ $\rightarrow \frac{i^{11} \cdot z_1}{z_2^6} - \frac{\overline{z_2}}{z_1^2} = ?$

8. Számolja ki az alábbi komplex számok megfelelő gyökeit! Adja meg a gyökök algebrai alakját, és ábrázolja őket a komplex számsíkon!

a, $z = -3 - \sqrt{27}i$ $\sqrt[4]{z} = ?$

b, $\sqrt[3]{-27} = ?$

c, $\sqrt[3]{8} = ?$

d, $z = 1 - \sqrt{3}i$ $\sqrt[2]{z} = ?$

e, $z = -4 - 4i$ $\sqrt[5]{z} = ?$

f, $\sqrt[3]{-8i} = ?$

g, $z = -3 + \sqrt{27} \cdot i$ $\sqrt[4]{z} = ?$

h, $z = -8 + 8\sqrt{3} \cdot i$ $\sqrt[4]{z} = ?$

i, $z = -8 - 8\sqrt{3} \cdot i$ $\sqrt[4]{z} = ?$

j, $\sqrt[4]{16i} = ?$

k, $\sqrt[5]{1} = ?$ Adja meg, hogy mely megoldások lesznek primitív egységgyökök!

l, $\sqrt[8]{1} = ?$ Adja meg, hogy mely megoldások lesznek primitív egységgyökök!

m, Adja meg a primitív 4. egységgyököket!

n, Adja meg a primitív 7. egységgyököket!

o, Igaz-e, hogy vannak primitív egységgyökök az $\frac{1}{2}\sqrt[4]{16i}$ komplex számok között?

p, Igaz-e, hogy vannak primitív egységgyökök az $\frac{1}{2}\sqrt[3]{8}$ komplex számok között?

9. Oldja meg az alábbi másodfokú egyenleteket!

a, $x^2 + 2ix - 1 - 2i = 0$

b, $x^2 - 2ix - 1 - 8i = 0$

c, $x^2 + 6x + 25 = 0$

d, $x^2 + 8ix - 15 = 0$

e, $x^2 + x + 1 = 0$

f, $x^2 + 2ix + 8 = 0$

g, $x^2 - 4ix - 4 - 8i = 0$

h, $x^2 + 4ix - 4 - 2i = 0$

i, $4x^2 + 4ix + 1 + 3i = 0$

j, $x^2 - ix - 1 = 0$

k, $2x^2 + 4x + 2 + i = 0$