

Komplex számok
- konzultáció -

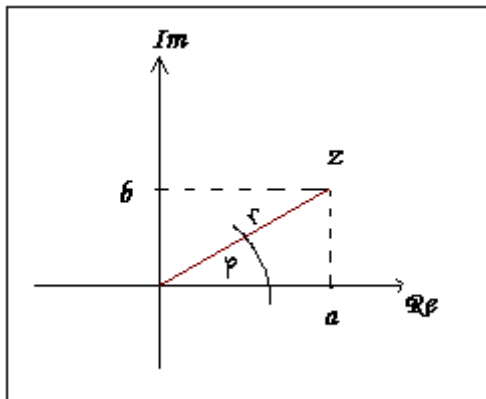
I. Elméleti ismételés:

A halmaz jele: $\mathbb{C}$

Komplex számok **kanonikus alakja**: $z=a+ib$ ahol $i=\sqrt{-1}$ az imaginárius egység

$a=\operatorname{Re} z \rightarrow$ ez a valós rész

$b=\operatorname{Im} z \rightarrow$ ez az imaginárius rész



Argand-diagram

φ : a valós tengely pozitív felétől mért távolság

Trigonometrikus alakja:

$$|z|=r(\cos \varphi+i \sin \varphi)$$

x koo. y koo.

Konjugált: z konjugáltja: $\bar{z}=a-i b \Rightarrow$ azaz a képzetes tag előjele megváltozik az ellenkezőjére

Műveletek:

- **Összeadás**: valósak összege + i(képzetesek összege)

$$(3+2 i)+(5+3 i)=8+5 i$$

↑ ↑
egyik szám másik szám

- **Kivonás**: valósak különbsége + i(képzetesek különbsége)

$$(3+2 i)-(5+3 i)=-2-i$$

- **Szorzás**

$$(3+2 i)(5+3 i)=\text { tagonként }=15+9 i+10 i+6 i^2=15+19 i-6=9+19 i$$

- **Osztás**: szorozni kell a nevező konjugáltjával $\Rightarrow$ ha egy komplex számot a konjugáltjával szorzunk, akkor valós eredményt kapunk.

$$\frac{7+2 i}{2-4 i}=\frac{7+2 i}{2-4 i} \cdot \frac{2+4 i}{2+4 i}=\frac{14+28 i+4 i-8}{4+16}=\frac{6+32 i}{20}=\frac{3}{10}+\frac{8}{5} i$$

Moivre-képlet: trigonometrikus alakban számolunk

$$z_1 z_2=r_1(\cos \varphi_1+i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2+i \sin \varphi_2)=r_1 r_2(\cos (\varphi_1+\varphi_2)+i \sin (\varphi_1+\varphi_2))$$

Ugyanígy osztásra is:

$$z_1 / z_2=\frac{r_1}{r_2}(\cos (\varphi_1-\varphi_2)+i \sin (\varphi_1-\varphi_2))$$

- **Gyökvonás**

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r} \cdot \cos \frac{\varphi+2 k \pi}{n}+i \sin \frac{\varphi+2 k \pi}{n} \quad |$$

A $2 k \pi$ -s szorzóra a forgásszögek miatt van szükség, ezzel is számolni kell.

$$\frac{10}{1-i} = \frac{10(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{10(1+i)}{1-1} = \frac{10(1+i)}{0} = 5+5i$$

7.) Egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} (2-3i)z + (2-i)u &= 1-i & /* (1+2i) \text{ megszorozzuk a sorokat ezekkel tagokkal} \\ (1+2i)z + (-2+3i)u &= -3-3i & /* (2-3i) \text{ majd kivonjuk egymásból őket} \end{aligned}$$

így ki tudjuk ejteni az egyik ismeretlent: z-t, és csak u-t tartalmazó egyenletünk marad.
Ha u-t megadjuk, utána egyszerű visszahelyettesítéssel kijön z is.

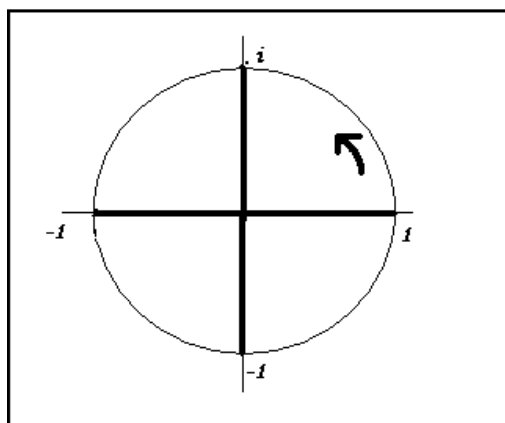
$$\begin{aligned} (2-i)(1+2i)u - (-2+3i)(2-3i)u &= (1-i)(1+2i) - (-3-3i)(2-3i) \\ u[(2+4i-i-2i^2) - (-4+6i+6i-9i^2)] &= (1+2i-i-2i^2) - (-6-6i+9i+9i^2) \\ (2+3i+2+4-12i-9)u &= 18-2i \\ (-1-9i)u &= 18-2i \end{aligned}$$

$$u = \frac{18-2i}{-1-9i} = \frac{(18-2i)(-1+9i)}{(-1-9i)(-1+9i)} = \frac{-18+162i+2i-18i^2}{1-81i^2} = \frac{164i}{82} = 2i$$

8.) Mi lesz az eredmény?

$$\frac{7i-4i^9-4-3i^5}{4i^2-3i^7-2i^4-5i^{15}} = ?$$

Az i hatványai egy egységkörön mozognak:



Hatvány	érték:
0.	$i^0 = 1$
1.	$i^1 = i$
2.	$i^2 = -1$
3.	$i^3 = -i$
4.	$i^4 = 1$
5.	$i^5 = i$
6.	$i^6 = -1$
7.	$i^7 = -i$
stb....	

Tehát ez alapján le tudjuk egyszerűsíteni a feladatot:

$$\frac{7i-4i^9-4-3i^5}{4i^2-3i^7-2i^4-5i^{15}} = \frac{4}{-2-2i} = \frac{2}{-1-i}$$

9.) trigonometrikus alakra algebraira:

$$z = 7(\cos 135 + i \sin 135) \quad \varphi$$

$$a = r \cos \varphi$$

$$b = r \sin \varphi$$

mivel $r=7$ és $\varphi=135$ ezért:

$$\cos 135 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin 135 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tehát az algebrai alak:

$$z = -7\frac{\sqrt{2}}{2} + i*7\frac{\sqrt{2}}{2}$$

10.) Kanonikusról trigonometrikusra

$$z = 12 - i4\sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{12^2 + 4^2} = 12.65 \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a} = \arctg \frac{-4\sqrt{3}}{12} = \arctg \left[-\frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

tehát $\varphi = -30^\circ$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 12.65 (\cos 330 + i \sin 330) \quad (-30\text{-at is írhatnánk, nem szokás negatívát, hanem helyette 330-at.})$$

11.) Gyökvonás

$$z^3 = \sqrt[3]{3} - i \quad \text{ebből szeretnénk 3. gyököt vonni, hogy mi lesz } z?$$

$$r = \sqrt[3]{3} \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a} = \arctg \frac{-1}{\sqrt{3}} = -30^\circ = 330^\circ$$

átváltjuk radiánba, úgy számolunk tovább

$$z = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left[\cos \frac{11\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi + 2k\pi}{6} \right]$$

és $k=0, 1, 2$ mivel 3dik gyököt számolunk
→ mindig annyi gyök van, ahányadik gyököt vonunk

k=0:

$$z = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left[\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right] \quad (110^\circ)$$

k=1:

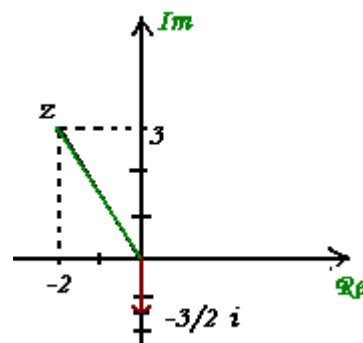
$$z = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left[\cos \frac{23\pi}{6} + i \sin \frac{23\pi}{6} \right] \quad (230^\circ)$$

k=2:

$$z = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left[\cos \frac{35\pi}{6} + i \sin \frac{35\pi}{6} \right] \quad (350^\circ)$$

12.) Ábrázolások

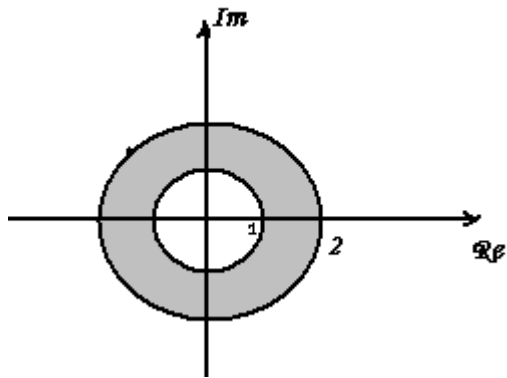
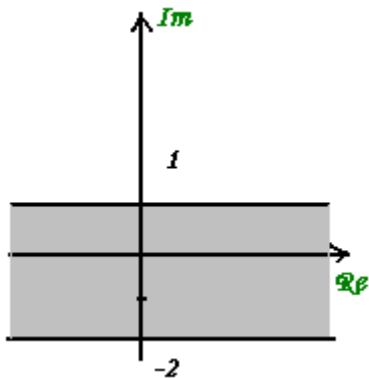
Ábrázold a következő komplex számokat: $z = -2 + 3i$
 $u = -(3/2)i$



Mi a mértani helye a komplex számsík azon z pontjainak melyekre:

$$-2 < \text{Im}(z) < 1$$

$$1 < |z| < 2$$



13.) Igaz-e, hogy

$$\frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i} = \frac{1}{32} ?$$

A trigonometrikus alakkal érdemes számolni:

$$z = 1 - i \quad r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \varphi = \arctg \frac{1}{1} = 45^\circ \quad \text{azaz } \arctg \frac{1}{1} = 45^\circ$$

átírva tehát:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 45^\circ - i \sin 45^\circ \quad \text{és} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 45^\circ - i \sin 45^\circ$$

Moivre szabály alapján

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{45^\circ}{8} - i \sin \frac{45^\circ}{8} \quad \text{és} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{45^\circ}{8} - i \sin \frac{45^\circ}{8}$$

$$\frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{45^\circ}{8} - i \sin \frac{45^\circ}{8} \right)^8 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

tehát igaz.

14.) (Másodfokú egyenlet) Mik lesznek az egyenlet gyökei?

$$2x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 24}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}i}{4}$$

innen két gyök adódik:

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}i}{2} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}i}{2}$$

Ellenőrzés: vissza kell helyettesíteni a gyököket az eredeti egyenletbe!

$$2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}i}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}i}{2} \right) + 3 = 0 \quad \text{és} \quad 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}i}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}i}{2} \right) + 3 = 0 \quad \text{☺}$$