4. Magtér, Képtér, Izomorfia

1. Mi az alábbi leképezések magtere, képtere? Hány dimenziósak a megadott alterek? Teljesül-e a dimenziótétel?

a, A = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b, A = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3x-2y+7z \\ 0 \end{pmatrix}$

c, A = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ d, A = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$

M.o.: A : $V_1 \rightarrow V_2$ Homogén, Lineáris leképezés

Magtér (KerA) – „azoknak a V_1-beli vektoroknak a halmaza, amelyeket a leképezés a nullvektorba képez"
Képtér (ImA) – „a leképezés „értékkészlete", azoknak a V_2-beli vektoroknak a halmaza, amelyeket a leképezés hozzárendel egy V_1-beli vektorhoz"

Dimenzió tétel: dim(KerA) + dim(ImA) = dim V_1

a, Minden vektort a nullvektorba képez, ezért:

KerA = $V_1 = R^2$ 2 dim
ImA ={0} 0dim

Dim.tétel: dim(KerA) + dim(ImA) = dim R^2 $\rightarrow$ 2 + 0 = 2

b, Azokat a vektorokat képezi a nullvektorba, ahol: $3x-2y+7z = 0$ $\rightarrow$ $x = \frac{2}{3}y - \frac{7}{3}z, \quad y \in R, \quad z \in R$

KerA = $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y - \frac{7}{3}z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y \in R, z \in R \right\}$ 2 dim

Minden olyan vektor előáll egy vektor képeként, aminek a második koordinátája 0:

ImA = $\left\{ \begin{pmatrix} 3x-2y+7z \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \middle| a \in R \right\}$ 1 dim

Dim.tétel: dim(KerA) + dim(ImA) = dim R^3 $\rightarrow$ 2 + 1 = 3

c, Egy $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektor a magtér eleme, ha a képe a null vektor tehát, ha: $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$

$\rightarrow$ Csak a nullvektor képe nullvektor! KerA = $\{\underline{0}\}$ 0 dim

Viszont tetszőleges kétdimenziós vektor előáll valamely vektor képeként:

ImA = $\left\{ \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \middle| x, y \in R \right\} = R^2$ 2 dim

Dim.tétel: dim(KerA) + dim(ImA) = dim R^2 → 0 + 2 = 2

d, Egy $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektor a magtér eleme, ha a képe a null vektor tehát, ha: $\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = -y \\ y \in R \end{matrix}$

KerA = $\left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y \middle| y \in R \right\}$ 1 dim

Minden olyan vektor képvektor, aminek a két koordinátája megegyezik:

ImA = $\left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} \middle| x, y \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \middle| a \in R \right\}$ 1 dim

Dim.tétel: dim(KerA) + dim(ImA) = dim R^2 → 1 + 1 = 2

2. Az 1. feladatban megadott leképezések Izomorfiát határoznak-e meg?

Emlékeztető:

Izomorfia (Izomorf leképezés) vektorterek között:
Bijektív (kölcsönösen egyértelmű), homogén és lineáris leképezés.

Tétel1: Két vektortér között akkor és csak akkor létezik izomorf leképezés, ha a dimenziójuk megegyezik.

Tétel2 : Egy A : $V_1 \rightarrow V_2$ homogén lineáris leképezés akkor és csak akkor izomorfia, ha:
KerA = $\{0\}$ és ImA = V_2

M.o.:
Az 1.a, és 1.b, feladatok esetén a V_1 és V_2 dimenziója nem egyezik meg, ezért közöttük megadott leképezés biztosan, nem lehet Izomorfia:

a, A = $R^2 \rightarrow R^3$

b, A = $R^3 \rightarrow R^2$

Az 1.c, és 1.d, feladatokban megadott leképezések esetén a V_1és V_2 dimenziója megegyezik, hiszen mindkettő esetén: A = $R^2 \rightarrow R^2$, ezért közöttük lehet izomorfiát megadni. Ez még nem jelenti azt, hogy az itt megadott leképezések tényleg izomorf leképezések, ezért ennek eldöntésére felhasználjuk a Tétel2-t:

c, KerA = $\{0\}$ ImA= R^2 = V_2
És így a Tétel2 alapján kijelenthetjük, hogy a megadott leképezés izomorfia.

d, KerA = $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y \middle| y \in R \right\} \neq \{0\}$ ImA = $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \middle| a \in R \right\} \neq R^2$ = V_2

Ezért ez a leképezés nem izomorfia!

3. Adja meg az alábbi mátrix által meghatározott leképezés magterét, képterét, illetve döntse el, hogy izomorfiát határoznak-e meg:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 5 & -65 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

M.o.:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 5 & -65 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 44 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 27 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$KerA = \left\{ \begin{pmatrix} -31u \\ -9u \\ -2u \\ u \end{pmatrix},\ u \in R \right\}$$ 1 dimenziós altér, $$\operatorname{Im} A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$ 3 dimenziós

→ Nem izomorfia

4. Gyakorló feladatok.
Mi az alábbi leképezések magtere, képtere? Hány dimenziósak a megadott alterek? Teljesül-e a dimenziótétel?Izomorfiát határoznak-e meg?

a, A = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ b, B = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c, C = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3y \end{pmatrix}$ d, D = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

e, E = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3x-2y+7z \\ 0 \end{pmatrix}$. f, F = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -y \\ 5x \\ 2y-x \end{pmatrix}$

g, Térben egy adott síkra vetítés h, Térben egy adott síkra tükrözés

i, Legyen $\underline{a} \in R^n$ rögzített, és tetszőleges $\underline{b} \in R^n$ esetén a leképezés: $\underline{b} \to \underline{a} \cdot \underline{b}$

j, $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to a+d$ k, $K: \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

l, P_2 vektortéren értelmezett deriválás

m, P_3 vektortéren értelmezett $f(x) \to x \cdot f'(x)$ leképezés

n, $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \to (x-1)\cdot(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$.

o, A következő mátrixokhoz tartozó leképezések

A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & 3 & -6 \\ -5 & 21 & 5 & -35 \end{bmatrix}$ C= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 5 & -65 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ B=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 8 & 2 \\ -1 & -8 & 5 \end{bmatrix}$ C=$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 8 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

(Részleges megoldás:
Izomorfia: c, d, h, k,
Nem izomorfia: a, b, e, f, g, i, j, l, m, n,)

5. Még néhány érdekes feladat:
Izomorfia-e *L*, ha

a, $L: R^3 \to R^3; \underline{v} \mapsto \underline{a} \times \underline{v}, \quad (\underline{a} \neq \underline{0})$.

b, $L: P^{10} \to P^{10}; p(x) \mapsto p'(x)$, ahol P^{10} a legfeljebb tizedfokú valós együtthatós polinomok vektortere, a vessző pedig deriválást jelent.

c, $L: P^{10} \to P^{10}; p(x) \mapsto \tilde{p}(x)$, ahol $\tilde{p}(x)$-et úgy kapjuk $p(x)$-ből, hogy az együtthatók sorrendjét felcseréljük, tehát a tizedfokú tag együtthatója a nulladfokúé lesz, a kilencediké az elsőé, és így tovább.

d, $L: P^{10} \to P^{10}; p(x) \mapsto a_5 \cdot p(x)$, ahol a_5 az ötödfokú tag együtthatója.

e, *L* a háromdimenziós térben egy adott, origón átmenő síkra való vetítés.

f, *L* a háromdimenziós térben egymás utáni forgatások, tükrözések és nyújtások tetszőleges kombinációja.

Megoldások:

a, $\underline{a} \times \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$ vagy $\underline{a} \perp \underline{v}$. Az utóbbi lehetőség miatt a teljes $\underline{a}$-ra merőleges sík a nullvektorba képeződik le, vagyis ez az egész sík a magtere *L*-nek, így a leképezés nem izomorfia.

b, A deriválás miatt a képtérben legfeljebb csak kilencedfokú polinomok lehetnek, vagyis a leképezés nem szürjektív, ezért nem is izomorfia.

c, Igen, izomorfia. Minden polinomot lehet jellemezni az együtthatókból alkotott oszlopvektorral: $p(x) \to \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_9 \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}$. Ebből az *L* a következőt gyártja: $L(p(x)) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{10} \end{pmatrix}$, ami a tizenegy dimenziós térben a tengelyek felcserélését jelenti, és amely természetesen nem érinti azt a tényt, hogy az összes polinom a teljes tizenegy dimenziós teret „lefedi”. A két oszlopvektor csak a komponensek sorrendjében tér el, és csak konvenció kérdése, hogy melyiket rendeljük már eleve $p(x)$ -hez.

d, A leképezés még csak nem is lineáris, tehát nem lehet izomorfia sem.

e, A vetítés egy síkra képezi le az összes vektort, vagyis a képtér nem a teljes R^3, a leképezés nem szürjektív, nem izomorfia.

f, Mindhárom lineáris transzformáció típus izomorfia (ez könnyen látható), emiatt tetszőleges szorzatuk is az.