Komplex euklideszi terek:

Skalárszorzat: $\langle \,;\, \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{C}$

1) $\forall z \in V : \langle z ; z \rangle \geq 0$ és $\langle z, z \rangle = 0 \iff z = 0$ (Pozitív definit)
   Következmény: $\langle z, z \rangle \in \mathbb{R}$
2) $\forall z_1, z_2 \in V : \langle z_1, z_2 \rangle = \overline{\langle z_2, z_1 \rangle}$ (Szimmetria)
3) a) $\forall z_1, z_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C} : \langle \lambda z_1, z_2 \rangle = \lambda \langle z_1, z_2 \rangle$ } Homogenitás
   b) ——— " ——— : $\langle z_1, \lambda z_2 \rangle = \lambda \langle z_2, z_1 \rangle$
4) a) $\forall z_1, z_2, z_3 \in V : \langle z_1, z_2 + z_3 \rangle = \langle z_1, z_2 \rangle + \langle z_1, z_3 \rangle$
   b) ——— " ——— : $\langle z_1 + z_2, z_3 \rangle = \langle z_1, z_3 \rangle + \langle z_2, z_3 \rangle$

Ezt a skalárszorzatot fogjuk használni:

$\langle x, y \rangle = \overline{y}^T \cdot x = \sum_i \overline{y_i} \cdot x_i$

$\|x\| = \langle x, x \rangle = \sqrt{\sum_i \overline{x_i}\, x_i}$

$d(x, y) = \|y - x\| = \langle y - x, y - x \rangle = \sqrt{\sum_i \overline{(y_i - x_i)}(y_i - x_i)}$

$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$

↳ Ortogonalitás: $\alpha = 90° \iff \langle x, y \rangle = 0$

Gram-Schmidt-ortogonalizáció

Tétel: Ortogonális vektorrendszer egyben lineárisan független is.
$\iff \langle v_i, v_j \rangle = 0 : \forall i,j < n, \; i \neq j$

Algoritmus:

Adott $\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ független vektorrendszer

→ Cél: $\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$ ortogonális (és egyben lin. független) vektorrendszer

Lépései:

1) $c_1 := b_1$
2) $c_i := b_i + \alpha_{i,i-1} \cdot b_{i-1} \quad \mid \cdot c_{i-1}$

$0 = \langle c_i, c_{i-1} \rangle = \langle c_{i-1}, b_i + \alpha_{i,i-1} \cdot b_{i-1} \rangle = \langle c_{i-1}, b_i \rangle + \langle c_{i-1}, b_{i-1} \rangle \cdot \alpha_{i,i-1}$

$\frac{-\langle c_{i-1}, b_{i-1} \rangle}{\langle c_{i-1}, c_{i-1} \rangle} = \frac{-\langle c_{i-1}, b_i \rangle}{\langle c_{i-1}, b_{i-1} \rangle} = \alpha_{i,i-1}$

… $\boxed{c_k = b_k + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{k,i} \cdot b_i \Rightarrow \alpha_{k,i} = \frac{-\langle c_i, b_k \rangle}{\langle c_i, c_i \rangle} : i \in \{1, 2, 3, \dots, k-1\}}$

Cramer-szabály

$\underline{A}\cdot\underline{x}=\underline{b}$ egyenletrendszer megoldását keressük (az $\underline{x}$-et keressük)

A Cramer-szabályt akkor alkalmazhatjuk, ha $\det(A)\neq 0$

$x_i=\frac{\det\left[\ldots\overset{i.}{b}\ldots\right]}{\det(A)}=\frac{D_i}{D}$ D_i: A mátrix i-dik oszlopát kicseréljük a b vektorra

Diagonalizáció

//Def//: $\underline{A}$ mátrix hasonló $\underline{B}$ mátrixhoz, ha $\underline{A}=T^{-1}\cdot\underline{B}\cdot T$ (ahol $\det(T)\neq 0$)

//Tétel//: $\underline{A}$ hasonló $\underline{B}$-hez $\Longleftrightarrow$ $\underline{A}$ és $\underline{B}$ sajátértékei megegyeznek

//Def//: $\underline{A}$ diagonizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz ($\underline{A}=T^{-1}\cdot\underline{D}\cdot T$), ahol a főátlóban $\underline{A}$ mátrix sajátértékei állnak.

//Tétel//: A diagonizálható, ha $\exists$ n db különböző sajátértéke (visszafelé nem igaz)

//Tétel//: A diagonizálható $\Longleftrightarrow$ $\exists$ n db lineárisan független sajátvektora.

Megjegyzés: másképp: sajátaltereinek dimenzióinak összege n.

//Tétel//: $\underline{A}^n=T^{-1}\cdot D^n\cdot T$ ahol $D^n=\begin{bmatrix}\lambda_1^n & & 0\\ & \lambda_2^n & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n^n\end{bmatrix}$

Biz: $\underline{A}^n=(T^{-1}\cdot D\cdot\cancel{T})(\cancel{T^{-1}}\cdot D\cdot\cancel{T})\cdot(\cancel{T^{-1}}\cdot D\cdot\cancel{T})\cdot\ldots\cdot(\cancel{T^{-1}}\cdot D\cdot T)$

//Def//: Bilineáris függvény: azon $B: V\times V\to\mathbb{R}$ függvény, melyre igaz

1) Bilineáris: $B(x,y+z)=B(x,y)+B(x,z)$
2) Lineáris: $B(x+y,z)=B(x,z)+B(y,z)$
3) Homogén: $B(c\cdot x,y)=c\cdot B(x,y)$
4) Homogén: $B(x,c\cdot y)=c\cdot B(x,y)$

//Tétel//: A $B: V\times V\to\mathbb{R}$ ~~bilineáris~~ bilineáris függvény $\underline{B}$ mátrixán azt a $(b_1|b_2|b_3|\ldots|b_n)$ mátrixot értjük, ahol $b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n$ a V vektortér egy tetszőleges, de rögzített bázisa. ~~Ezzel a~~ Erre a $\underline{B}$ mátrixra igaz: $B(x,y)=\underline{x}^T\cdot\underline{B}\cdot\underline{y}$; $\forall\,\underline{x},\underline{y}\in V$

//Def//: Kvadratikus alak: $Q(x)=B(x,x)=x^T\cdot\underline{B}\cdot x$

Def. $\underline{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha az $\underline{A} = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{D} \cdot \underline{T}$ képletben az T mátrix ortogonális

Megj.: A T áttérési mátrixnak a sajátvektorok bázisából képzett mátrix a legalkalmasabb, mert ezzel a mátrixszal felírva a $(T^{-1} \cdot \underline{A} \cdot T)$ mátrix diagonális alakot ölt

Tétel: Spektrál-tétel: $\underline{A}$ ortogonálisan diagonalizálható $\Leftrightarrow$ $\underline{A}$ szimmetrikus

Biz.: 1) Ha $\underline{A}$ szimmetrikus, akkor ortogonálisan diagonalizálható.

Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak (+ ortogonális vektorok függetlenek)

Tudjuk, hogy ha van sajátvektorokból álló bázis, akkor erre áttérve $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ mátrixot kapjuk

2) $\underline{A}$ ortogonálisan diagonalizálható, akkor $\underline{A}$ szimmetrikus

$$\underline{D} = \underline{S}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot S \qquad S^T = S^{-1}$$

$$\underline{A} = \underline{S} \cdot \underline{D} \cdot \underline{S}^{-1}$$

$$A^T = (S \cdot (D \cdot S^{-1}))^T = (D \cdot S^{-1})^T \cdot S^T = (S^{-1})^T \cdot D^T \cdot S^T = (S^T)^T \cdot D \cdot S^{-1} = S \cdot D \cdot S^{-1} = \underline{A}$$

Tétel: $Q(x)$ pozitív definit $\Leftrightarrow \forall \lambda_i > 0$

$Q(x)$ pozitív szemidefinit $(Q(x) \geq 0) \Leftrightarrow \forall \lambda_i \geq 0$

$\Rightarrow$ igaz negatív definitre és szemidefinitre is (+ indefinitre is)

Tétel: $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \dots, \underline{b}_n\}$ bázishoz tartozó $\underline{M}$ mátrix megadható a következő képp.:

$m_{ij} = L(\underline{b}_i, \underline{b}_j)$, ahol $L: V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris függvény

Tétel: $L(x, x) = x^T \cdot M \cdot x = Q(x)$ (kvadratikus alak)

(megegyezés szerint) ahol $L: V \times V \to \mathbb{R}$ olyan bilineáris függvény, melynek mátrixa szimmetrikus

Tétel: Főtengely transzformáció:

$$Q(x) = \underline{x}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{x} = u^T \cdot T^{-1} \cdot (T \cdot D \cdot T^{-1}) \cdot T \cdot u = \underline{u}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2$$

kanonikus bázisról sajátvektorok bázisára

$\underline{x}_e = T \cdot u$ (normált vektor: $\underline{x}_e$ és képe új bázisban: u)

$x_e^T = (T \cdot u)^T = u^T \cdot T^T = u^T \cdot T^{-1}$ (mivel sajátvektorok bázisa ortogonális)

Főtengely-transzformációval felismerhető alakzatok:

- Ellipszis: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- hiperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- párhuzamos egyenesek: $\frac{x^2}{a^2} = 1$

Def: $\underline{h} \perp H$: $\underline{h} \in V$, $H \subset V \iff \underline{h} \perp \underline{h}_i : \forall h_i \in H$

Def: $H_1 \perp H_2$: $H_1, H_2 \subset V \iff (h_1)_i \perp H_2 : \forall (h_1)_i \in H_1$

Def: Ha u altér, $m \subset V$ és $m \perp u$, akkor m u merőleges kiegészítője

Tétel: Ha $m \perp u$, és $u \subset V$, akkor m altér

Biz: 1) (cél: ha $\underline{m}_i \in m \Rightarrow \lambda \underline{m}_i \in m$)

$\forall \underline{u}_i \in u$: $\underline{m}_i \cdot \underline{u}_i = 0$

$(\lambda m_i) \cdot u_i = 0 \Rightarrow \lambda (\underline{m}_i \cdot u_i) = \lambda \cdot u = 0 \Rightarrow \langle \lambda \underline{x}, \underline{y} \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$

2) (cél: ha $\underline{m}_1, \underline{m}_2 \in m \Rightarrow \underline{m}_1 + \underline{m}_2 \in m$

$\forall \underline{u}_i \in u$: $\underline{m}_1 \cdot \underline{u}_i = 0$, $\underline{m}_2 \cdot u_i = 0$

$\Rightarrow (\underline{m}_1 + \underline{m}_2) \cdot u_i = \underline{m}_1 \cdot \underline{u}_i + m_2 \cdot u_i = 0 \Rightarrow \langle \underline{x}_1 + \underline{x}_2, \underline{y} \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$

Tétel: Ha M az U altér merőleges kiegészítője, akkor $\forall \underline{v} \in V$ (vektortér) felírható $\underline{v} = \underline{u} + \underline{m}$ alakban, ahol $\underline{u} \in U$ és $\underline{m} \in M$

Def: Vektorrendszer rangja: - kiválasztható független vektorok maximális száma
- vektorok által generált altér dimenziója

Tétel: n dimenziós tér 1) bármely vektorhalmazának legfeljebb n a rangja.
2) bázisának rangja n.

Def: Mátrix rangja $\equiv$ oszlopvektorainak a rangja $\equiv$ sorvektorainak a rangja
$\equiv$ determinánsának rangja $\equiv$ maximális, nem nulla aldeterminánsa mérete

Tétel: Lineáris egyenletrendszer megoldható $\overset{r=}{\iff}$ rang$[\underline{A}]$ = rang$[\underline{A} | \underline{b}]$, ahol $\underline{A}$ az együttható mátrix

Biz:

1) $\Leftarrow$:

$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ vektorok közül r db a_j-t kiválasztva független vektorrendszert kapunk, melyhez b-t hozzáadva összefüggővé válik

$\Rightarrow$ b ezért kifejezhető $\{a_1, a_2, \dots a_r\}$ vektorai lin. kombinációjával

$\Rightarrow$ léteznek azon $x_1, x_2, x_3, \dots x_r$ konstansok, melyre

$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_r a_r$

2) $\Rightarrow$: