Komplex mátrixok sajátértéke

1. Adja meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

M.o.:
$$\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}=\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det\left(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}\right)=(1-\lambda)(1-\lambda)-(-1)=\lambda^2-2\lambda+2=0$$

A sajátértékek:
$$\lambda_{1,2}=\frac{2+\sqrt{2^2-4\cdot 2}}{2}=\frac{2+\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$

● $\lambda=1+i$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok
Az alábbi egyenlet megoldásai adják a sajátvektorokat:

$$\left(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}\right)\cdot\underline{v}=\underline{0}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\cdot\underline{v}=\underline{0}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\cdot\underline{v}=\underline{0}$$

Az egyenlet kibővített mátrixa, a Gauss algoritmus után kapott mátrix, és a megoldás:

$$\left[\begin{array}{cc|c}-i & 1 & 0\\ 1 & -i & 0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 1 & -i & 0\end{array}\right]\rightarrow\quad x-iy=0\quad\rightarrow\quad \begin{array}{l}x=iy\\ y\in C\end{array}$$

<u>Az egyszerűség kedvéért a megoldásokban a sajátaltér vektorai vannak feltüntetve, ezért nincs kizárva a nullvektor, de fontos megjegyezni, hogy a nullvektor definíció szerint soha nem sajátvektor!!</u>

$$\underline{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}iy\\ y\end{pmatrix}\middle| y\in C\right\}=\left\{\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}\cdot y\middle| y\in C\right\}$$

Tehát például a $\underline{v}=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$ vektor sajátvektora a $\lambda=1+i$ sajátértéknek.

● $\lambda=1-i$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok számítása ugyanígy:

$$\left(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}\right)\cdot\underline{v}=\underline{0}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\cdot\underline{v}=\underline{0}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}i & -1\\ 1 & i\end{pmatrix}\cdot\underline{v}=\underline{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}i & 1 & 0\\ 1 & i & 0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 1 & i & 0\end{array}\right]\rightarrow\quad x+iy=0\quad\rightarrow\quad \begin{array}{l}x=-iy\\ y\in C\end{array}$$

A sajátvektorok:
$$\underline{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}-iy\\ y\end{pmatrix}\middle| y\in C\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix}\cdot y\middle| y\in C\right\}$$

Tehát például a $\underline{v} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor sajátvektora a $\lambda = 1 - i$ sajátértéknek.

2. Adja meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$A = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{bmatrix}$$

M.o.:

$$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} i - \lambda & 2 \\ 2 & i - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}\right) = (i - \lambda)(i - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 2i\lambda + -5 = 0$$

A sajátértékek: $\lambda_{1,2} = \dfrac{2i + \sqrt{(2i)^2 - 4 \cdot (-5)}}{2} = \dfrac{2i + \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2i \pm 4}{2} = i \pm 2$

- $\lambda = 2 + i$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}\right) \cdot \underline{v} = \underline{0} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} i - \lambda & 2 \\ 2 & i - \lambda \end{pmatrix} \cdot \underline{v} = \underline{0} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow -2x + 2y = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = y \\ y \in C \end{array}$$

Ezért a sajátvektorok: $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in C \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y \middle| y \in C \right\}$

Tehát például a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor sajátvektora a $\lambda = 2 + i$ sajátértéknek.

- $\lambda = -2 + i$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok számítása ugyanígy:

$$\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}\right) \cdot \underline{v} = \underline{0} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} i - \lambda & 2 \\ 2 & i - \lambda \end{pmatrix} \cdot \underline{v} = \underline{0} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow 2x + 2y = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = -y \\ y \in C \end{array}$$

Ezért a sajátvektorok: $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in C \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y \middle| y \in C \right\}$

Tehát például a $\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor sajátvektora a $\lambda = -2 + i$ sajátértéknek.

3. Adja meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$A = \begin{bmatrix} 3i & 2+i \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

M.o.:
A karakterisztikus egyenletből is megkaphatóak a sajátértékek, de most észre lehet venni, hogy ez egy felső háromszög mátrix, ezért a sajátértékei a diagonálisban lévő értékek:

$\lambda_1 = 3i$ és $\lambda_2 = 1-i$

- $\lambda_1 = 3i$

$$\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}\right) \cdot \underline{v} = \underline{0} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 1-4i & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow (2+i)y = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x \in C \\ y = 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \underline{v} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in C \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x \middle| x \in C \right\}$$ → Például: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 1-i$

$$\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}\right) \cdot \underline{v} = \underline{0} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1+4i & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow (-1+4i)x + (2+i)y = 0$$

$$x = -\frac{2+i}{-1+4i} \cdot y = -\frac{2+i}{-1+4i} \cdot \frac{-1-4i}{-1-4i} \cdot y = -\frac{2-9i}{17} \cdot y = \left(\frac{-2}{17} + \frac{9}{17} i\right) y$$

→ $y \in C$

$$\rightarrow \underline{v} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-2}{17} + \frac{9}{17} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y \middle| y \in C \right\}$$ → Például: $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{17} + \frac{9}{17} i \\ 1 \end{pmatrix}$

4.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2i & 2-2i \\ -2-2i & 0 \end{pmatrix}$$

M.o.:

$$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 2i-\lambda & 2-2i \\ -2-2i & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}\right) = (2i-\lambda)(-\lambda) - (2-2i)(-2-2i) = \lambda^2 - 2i\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2i + \sqrt{(2i)^2 - 4\cdot 8}}{2} = \frac{2i + \sqrt{-36}}{2} = \frac{2i \pm 6i}{2}$$

Tehát a két sajátérték valóban tisztán képzetes: $\lambda_1 = 4i, \lambda_2 = -2i$

A sajátvektorok: $v_1 = \left\{ \begin{pmatrix} (-1-i)y \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in C \right\}$ $v_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right) y \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in C \right\}$

5. $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -i \end{bmatrix}$

M.o.: $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \lambda_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ $v_1 = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \middle| \ y \in C \right\}$ $v_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \middle| \ y \in C \right\}$

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

M.o.: $\lambda_1 = i, -\lambda_2 = -i$ $v_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -iy \\ y \end{pmatrix} \middle| \ y \in C \right\}$ $v_2 = \left\{ \begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix} \middle| \ y \in C \right\}$

7. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3i & 2+i \\ -2+i & -i \end{bmatrix}$

M.o.: $x^2 - 2ix + 8 = 0 \quad (MO: 4i, -2i))$ $v_1 = \left\{ \begin{pmatrix} (1-2i)y \\ y \end{pmatrix} \middle| \ y \in C \right\}$ $v_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ (1+2i)x \end{pmatrix} \middle| \ x \in C \right\}$

8. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{bmatrix}$

M.o.: $\lambda^2 - 11\lambda + 18 = 0,$ sé: 9 és 2

9. $\begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}$

M.o.: -λ(λ^2+625), SÉ-k: 0, 25i, -25i A 0-hoz tartozó SV=$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$

10.

$A = \begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ -1+i & 3i \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}$