

KLASSZIKUS FIZIKA INFORMATIKUSOKNAK

ÍRÁSBELI ÉS SZÓBELI VIZSGA

2014. június 26.

Nem teljes! Rev.:12052

**PÁZMÁNY PÉTER
KATOLIKUS EGYETEM
INFORMÁCIÓS TECHNOLÓGIAI
ÉS BIONIKAI KAR**

Fontos tudnivalók

Tisztelt Vizsgázó!

Jelen kiadvány készültségi szinte még nem teljes, a tételek kidolgozása még nem befejezett. Kérem, hogy ennek figyelembe vételével olvassa a füzetet, valamint látogasson vissza rendszeresen, újabb verziók letöltése érdekében!

Jelen füzet a 2013/14/2. tanulmányi időszak Klasszikus fizika informatikusoknak szóbeli vizsgájához lett kiadva. A füzet tartalmazza az intézmény által nyilvánosságra hozott tételjegyzéket, valamint azok kidolgozott formáját is.

A kiadványban bárhol, de különösen a kidolgozott tételek körében előfordulhatnak hiányosságok, bővebb magyarázatra szoruló részek. Az ezek kiegészítése illetve jegyzetelés, feladatmegoldás céljából a kidolgozott tételeket a füzetben jegyzetoldalak követik.

Eredményes felkészülést kívánunk!

A kiadványt összeállította:
Naszlady Márton Bese – 2014

Külön köszönet illeti öcsikémet, aki rengeteg segítségével működött közre a füzet elkészítésében.



Ez a kiadvány a *Creative Commons Nevezd meg! – Ne add el! 4.0 Nemzetközi licenc* alá tartozik. A licenc megtekintéséhez látogasson el a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/> oldalra.

A kiadványban szereplő tartalmi elemek
harmadik személytől származó véleményt, értesülést tükröznek.
Az esetlegesen előforduló tárgyi tévedésekből fakadó visszás helyzetek
kialakulásáért, illetve azok következményeiért a kiadó nem vállal felelősséget!

Tartalomjegyzék

Tételjegyzék	4
Kidolgozott tételek.....	6
1.) Kinematika I.	6
2.) Kinematika II.....	11
3.) Tömegpont dinamikája.....	18
4.) Gravitáció, bolygók mozgása	25
5.) Tömegpont mozgására vonatkozó tételek	28
6.) Pontrendszerek	34
7.) Merev testek mechanikája.....	41
8.) Folyadékok és gázok mechanikája	50
9.) Elektrosztatika I.....	62
10.) Elektrosztatika II.	70
11.) Egyenáramok.....	74
12.) Időben állandó és változó mágneses erőkterek	78
13.) Maxwell egyenletek	80

Tételjegyzék

1.) Kinematika I.: A fizika tárgya, felosztása. A Nemzetközi Mértékegységrendszer (SI) alapmenyiségei és alapegységei. ~~Hosszúság és idő mérése~~. Egyenes vonalú egyenletes mozgás. Sebesség mérése Doppler-elv alapján. Térbeli helymeghatározás (a GPS működési elve). Szabadesés. Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás. Átlagsebesség, pillanatnyi sebesség definíciója. Harmonikus rezgőmozgás.

2.) Kinematika II.: Kinematikai jellemzők térbeli mozgásoknál. Sebesség és gyorsulás mint vektor. Egyenletes körmozgás. Centripetális gyorsulás. Hajítások. Egyenletesen gyorsuló körmozgás. Körmozgás és rezgőmozgás kapcsolata. Mozcások különböző koordinátarendszerekben. Polár-, henger-, gömbi-koordináták. Térbeli helymeghatározás V-SCOPE, GPS, VIDEO segítségével. Egyszerű numerikus módszerek a $\mathbf{v}(t)$ és $\mathbf{a}(t)$ függvények előállítására.

3.) Tömegpont dinamikája: Newton-törvények. A dinamika alaptörvénye. Erőtörvények és a mozgásegyenlet fogalma. Kezdeti feltételek. Mozcás, állandó erő hatására. Centripetális erő, példák körmozgásra (kúpínga, mesterséges hold). $F = F_0$, nehézségi erő, súrlódási erő, közegellenállási erők, lineáris erőtörvény. A harmonikus rezgőmozgás létrejöttének dinamikai feltétele, a mozgásegyenlet megoldása. Kényszererők, szabaderők. Lejtőn történő mozgás. Szabadesés folyadékban.

4.) Gravitáció, bolygók mozgása: Kepler-törvények. A Newton-féle gravitációs erőtörvény. Kapcsolata a Kepler-törvényekkel. A gravitációs állandó mérése, Cavendish kísérlet. A Föld és a Nap tömege. Mozcás gravitációs erőtérben. Mesterséges holdak, szökési sebesség. Távközlési műholdak.

5.) Tömegpont mozgására vonatkozó tételek: Impulzus (lendület), erőlkés. Impulzustétel. Forgatónyomaték, impulzusmomentum (perdület). Impulzusmomentum-tétel. Centrális erőtér (Kepler II. törvénye). Kinetikus energia, elemi munka, pillanatnyi teljesítmény. Erő munkavégzése adott görbére vonatkoztatva. Munkatétel. Munkavégzés speciális esetekben (állandó erő, lineáris erőtörvény, C/r^2 -es erőtörvény mellett). Konzervatív erőtér fogalma. Potenciál-függvény bevezetése. A mechanikai energia megmaradásának tétele.

6.) Pontrendszerek: Pontrendszer fogalma, erők osztályozása. Impulzustétel pontrendszerre. Tömegközéppont tétel. Zárt rendszer fogalma. Impulzusmomentum-tétel pontrendszerre. Munkatétel pontrendszerre. Zárt rendszerre vonatkozó tételek. Ütközések. Tökéletesen rugalmas ütközések. Rugalmatlan ütközések. Ballisztikus inga. Rakéta mozgása.

7.) Merev testek mechanikája: Szabadsági fok fogalma. Síkmozgás. Momentán centrum. **Sztatika:** Merev test egyensúlyának feltétele. Forgatónyomaték transzformációja. Egyensúlyi feltétel két, három erő esetén (példák). Erőpár. Helyettesítő erőrendszerek. Síkbeli erőrendszer eredője. Párhuzamos erőrendszer. Súlypont fogalma, kapcsolata a tömegközépponttal. **Dinamika:** Kinetikus energia tengely körüli forgásnál. Tehetetlenségi nyomaték és tulajdonságai. A forgó mozgás alapegyenlete. Impulzusmomentum forgó mozgásnál. Tiszta görbülés. ~~Torziós rezgések.~~ Fizikai inga.

8.) Folyadékok és gázok mechanikája: Folyadékok általános tulajdonságai. Belső súrlódási együttható. **Sztatika:** Pascal törvénye. Hidrosztatikai nyomás, felhajtóerő. Hidrosztatikai paradoxon. Alkalmazások (úszás). Torricelli kísérlet. A légnyomás függése a magasságtól. Barometrikus magasságformula és következményei. Molekuláris erők folyadékokban, felületi feszültség. Görbületi nyomás (Laplace-törvény). Kapillaritás jelensége, értelmezése. **Dinamika:** Áramlások jellemzése, osztályozása. Kontinuitási egyenlet. Bernoulli-törvény. Alkalmazások. Súrlódó folyadékok lamináris áramlása. Hagen-Poiseuille törvény. Stokes-törvény.

9.) Elektrosztatika I.: Elektrosztatikai alapjelenségek. Coulomb-törvény. A töltés egysége. Szuperpozíció. Kiterjedt testek elektromos tere (alkalmazások). Dipólus. Az elektrosztatikus tér konzervatív. Elektromos térerősség és potenciál kapcsolata. Fluxus fogalma, meghatározása. Gauss-törvény. Elektrosztatikai alapelveken működő eszközök. Töltött részecske mozgása homogén elektromos térben (katódsugárcső).

10.) Elektrosztatika II.: Síkkondenzátor. Hengerkondenzátor. Kapacitás fogalma. Elektromos tér vezetők és szigetelők jelenlétében. Csúcs hatás. ~~Polarizáció. Energiasűrűség elektrosztatikus térben.~~ Kondenzátorok soros és párhuzamos kapcsolása.

11.) Egyenáramok: Áramerősség, áramsűrűség fogalma, egysége. Szabad töltéshordozók. Differenciális Ohm-törvény, Ohm-törvény. ~~Joule-hő. Feszültségforrások a gyakorlatban.~~ Elektromotoros erő, belső ellenállás fogalma. Ellenállások soros és párhuzamos kapcsolása. Kirchhoff törvények.

12.) Időben állandó és változó mágneses erőterek: Mágneses alapjelenségek. Erőhatás mágneses térben (Lorentz-erő). Töltött részecskék mozgása mágneses térben. Mágneses eltérítés, ciklotron. ~~Áramvezetőre ható erő. Mágneses dipólusra ható forgatónyomaték.~~ Oersted-kísérlete. Gerjesztési törvény és alkalmazásai.

13.) Maxwell egyenletek: Mozgási indukció. A Faraday-féle indukciós törvény. Lentz-törvénye. Önindukció. ~~Kölcsönös indukció. Soros R-L-C kör.~~ Energiasűrűség elektromágneses térben. Az elektrodinamika alapegyenleteinek integrális (differenciális*) alakja. Eltolási áram. Maxwell-egyenletek.

Kidolgozott tételek

1.) Kinematika I.

A fizika tárgya, felosztása

A fizika (görög: φύσις – természet) tudománya az ókori Görögországban fogant meg, és a 18. századig magában foglalta az összes természettudományos ismeretet. A 18. századot követően a fizika a kísérletek, mérések és megfigyelések révén rengeteg ismeretanyaggal bővült. Ezt követően a tudományág két részre szakad: a fizika az élettelen világ jelenségeit, azokat a megváltozásokat vizsgálja, ahol az anyag nem alakul át; míg a kémia a vegyi folyamatokat elemzi.

A fizika által vizsgált anyagi világ mérettartománya az atomi szinttől az univerzum határáig terjed, és így vált a fizika valamennyi természettudomány alapjává.

A fizikát aszerint, hogy mely területekkel foglalkozik, az alábbi részekre oszthatjuk föl: mechanika, termodinamika, elektromosság- és mágnességtan, fénytan, relativitáselmélet, atomfizika. A kutatás módszere szerint elméleti és gyakorlati fizikát, a kutatás célja szerint pedig alap- és alkalmazott kutatást lehet megkülönböztetni.

A Nemzetközi Mértékegységrendszer (SI) alapmennyiségei és alapegységei

A nemzetközi együttműködés szükségessé tette a tudomány, a technika és a mindennapi élet valamennyi területére érvénye, összehangolt (koherens) nemzetközi mértékegységrendszer (System International of Units, SI) megalkotását. A Nemzetközi Mértékegységrendszernek hét alapmennyisége van. Ezek a következők:

Alapmennyiség		Az SI-alapegység		
neve	jele	neve	jele	meghatározása
hosszúság	l	méter	m	A méter annak az útnak a hosszúsága, amelyet a fény vákuumban $1/299\,792\,458$ -ad másodperc alatt tesz meg.
tömeg	m	kilogramm	kg	A kilogramm az 1889. évben Párizsban megtartott Első Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet által a tömeg nemzetközi etalonjának elfogadott, a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban, Sevres-ben őrzött platina-irídium henger tömege.
idő	t	másodperc	s	A másodperc az alapállapotú cézium-133-atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás $9\,192\,631\,770$ periódusának időtartama.
elektromos áramerősség	I	amper	A	Az amper olyan állandó elektromos áram erőssége, amely két párhuzamos, egyenes, végtelen hosszúságú, elhanyagolhatóan kicsiny körkeresztmetszetű és vákuumban egymástól 1 méter távolságban levő vezetőben áramolva, e két vezető között méterenként $2 \cdot 10^{-7}$ newton erőt hoz létre.
termodinamikai hőmérséklet	T	kelvin	K	A kelvin a víz hármaspontja termodinamikai hőmérsékletének $1/273,16$ -szorosa.

anyagmennyiség	n	mól	mol	A mól annak a rendszernek az anyagmennyisége, amely annyi elemi egységet tartalmaz, mint ahány atom van 0,012 kilogramm tiszta szén-12-ben.
fényerősség	I_v	kandela	cd	A kandela az olyan fényforrás fényerőssége adott irányban, amely $540 \cdot 10^{12}$ hertz frekvenciájú monokromatikus fényt bocsát ki, és sugárerőssége ebben az irányban 1/683-ad watt per szteradián.

Hosszúság és idő mérése

~~Még mindig nem vitt rá semmi, hogy ezt kitaláljam...~~

Egyenes vonalú egyenletes mozgás

Az olyan mozgásokat, melyeknél a megfigyelt test egyenes vonalban, egyenlő időközök alatt egyenlő utakat tesz meg, bármekkora is ezek az időközök, egyenes vonalú egyenletes mozgásnak nevezzük.

Az út és az idő hányadosaként kapott állandó annak mértéke, hogy milyen gyorsan mozog a test. Ezt az állandót a test sebességének nevezzük:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} v \quad \text{illetve} \quad \frac{s}{t} = v$$

Ez utóbbiból

$$s = vt$$

A sebesség származtatott fizikai mennyiség, és megmutatja az időegység alatt megtett utat. SI egysége a méter per másodperc, jele m/s.

Ha az egyenes vonalú, egyenletes mozgás út-idő grafikonját ábrázoljuk az (s, t) koordináta-rendszerben, akkor az origón átmenő, valamilyen $(\tan \alpha \neq 0)$ meredekségű egyenest kapunk. Ha a mozgás (v, t) grafikonját ábrázoljuk, akkor az időtengellyel párhuzamos eredményt kapunk.

A mozgás geometriai ábrázolásából szemléletesen adódik a sebesség nagysága, mint az egyenes meredeksége, illetve a megtett út, mint a sebesség-idő grafikon alatti terület nagysága.

Példa Egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez a Mikola-csőben lévő buborék.

Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás

Az olyan egyenes vonalú mozgásoknál, melyeknél a test sebesség nem állandó, hanem az „gyorsul” illetve „lassul”, megállapítható, hogy a test által megtett út a mozgás kezdetétől számított idő négyzetével arányos, vagyis

$$s \sim t^2, \quad s = kt^2$$

ahol k a mozgást jellemző állandó.

Átlagsebesség, pillanatnyi sebesség definíciója

Természetesen fölmerül a kérdés, hogy miként határozható meg ennek a mozgásnak a sebessége, illetve miként értelmezhetjük a k konstanszt.

Az egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén definiált sebességhez hasonlóan most egy átlagsebességnek nevezett a $\bar{v} = s/t$ mennyiséget vezethetünk be. Ez azonban nyilvánvalóan más-más értéket ad attól függően, hogy mekkora időtartamra számítjuk. Eszerint

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{kt^2}{t} = kt$$

vagyis $\bar{v}$ az idővel arányos. Az átlagsebesség nem adja meg a test sebességét az adott időpillanatban. Ezért célszerű az átlagsebességet rövid útszakaszra, rövid időtartamra kiszámítani. Egy Δt idő alatt megtett Δs útra kiszámolva a $\bar{v}$ átlagsebességet:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{k(t + \Delta t) - kt^2}{\Delta t} = 2kt + k\Delta t$$

vagyis az átlagsebesség függ attól, hogy mennyi idő telt el a mozgás kezdetétől a sebességmérés kezdetéig (t), és mennyi ideig mértünk (Δt). Ezért az adott időpillanatbeli sebesség meghatározásához definiáljuk a v átlagsebességet azon sorozat határértékeként, melyben $\Delta t \rightarrow 0$.

Matematikai formában a v pillanatnyi sebesség:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

A négyzetes úttörvény szerint mozgó test pillanatnyi sebessége tehát $v = 2kt$.

A test sebességének megváltozása, vagyis a test gyorsulása (a) definíció szerint a Δv sebességváltozásnak és a közben eltelt Δt időnek a hányadosa:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{2k(t + \Delta t) - 2kt}{\Delta t} = 2k = \text{állandó}$$

Az átlagos gyorsulás határértékét, vagyis a pillanatnyi gyorsulást az

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

összefüggés adja meg.

A fenti típusú mozgásokra a test pillanatnyi- és átlaggyorsulása megegyezik, mert nem függ az időtől: $\bar{a} = a = 2k$, ahonnan $k = a/2$. Ezek után a mozgást leíró egyenletek:

$$s = \frac{a}{2} t^2, \quad v = at, \quad a = \text{állandó}$$

Az ilyen típusú mozgást egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgásnak nevezzük. A gyorsulás megmutatja az egységnyi idő alatti sebességváltozást, SI egysége a méter per másodperc-négyzet, jele: m/s^2 .

Példa Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez a lejtőn leguruló golyó.

Szabadesés

A testek esésének jelenségével kapcsolatban végzett számos kísérlet mind arra az eredményre mutatott, hogy (vákuumban) anyagi minőségtől függetlenül, azonos gyorsulással esnek a testek. Ezt a kitüntetett gyorsulást nehézségi gyorsulásnak nevezzük és g -vel jelöljük. A nehézségi gyorsulás értéke Magyarországon $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$. Ennek ismeretében a szabadon eső test útját, sebességét az alábbi képletekkel adhatjuk meg:

$$s = \frac{g}{2} t^2, \quad v = gt, \quad s = \frac{v^2}{2g}, \quad v = \sqrt{2gs}, \quad \text{ha } v_0 = 0$$

A függőlegesen lefelé illetve fölfelé elhajított test által megtett út és sebesség pedig

$$s = v_0 t \pm \frac{g}{2} t^2, \quad v = v_0 \pm gt$$

Harmonikus rezgőmozgás

A rugóra akasztott, függőlegesen kitérítve nyugalmi helyzetéből, majd pedig magára hagyva, a test két szélső helyzet között periodikusan ismétlődő mozgást végez. Az egy teljes rezgés megtételéhez szükséges T időt rezgésidőnek, a maximális A kitérést amplitúdónak nevezzük.

Ha az időt attól a pillanattól kezdjük számítani, amikor a test a nyugalmi helyzetből a választott pozitív irányban halad át, vagyis $t = 0$ -nál $x = 0$, majd pozitív, akkor a pillanatnyi kitérést az alábbi összefüggés írja le:

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Az ilyen mozgást harmonikus rezgőmozgásnak nevezzük. Ha a $t = 0$ időpillanatban a rezgőmozgást végző anyagi pont kitérése nem nulla, akkor a kitérés

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$$

ahol φ a kezdőfázis (fázisállandó), $2\pi/T$ -t pedig körfrekvenciának nevezzük, jele ω . Ez utóbbi SI-egysége a radián per másodperc, jele: rad/s, kifejezése $1 \text{ rad/s} = 1/\text{s}$.

A harmonikus rezgés leírásánál a T rezgésidő helyett gyakran a frekvencia (rezgésszám) szerepel. Megállapodás szerint a frekvencia (f) a rezgések számának (N) és az eltelt időnek (t) a hányadosa. Mivel $N = 1$ rezgéshez $t = T$ rezgésidő tartozik, ezért a frekvencia:

$$f = \frac{N}{t} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

A frekvencia SI-egysége a hertz, jele: Hz, kifejezése: $1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$.

A rezgő test pillanatnyi sebessége a pillanatnyi sebesség definíciója alapján:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A \sin(\omega t + \varphi)] = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

A gyorsulás pedig:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[A\omega \cos(\omega t + \varphi)] = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

Sebesség mérése Doppler-elv alapján

Egy álló megfigyelő felé közeledő jármű – melyre hangjelzés-adó készüléket szereltek – sebessége megállapítható abból, ha ismerjük a kibocsátott jelzés hosszát, és megmérjük, hogy a megfigyelő milyen hosszú hangjelzést hallott.

A kibocsátott hanghullám megváltozott hossza kétféleképp is kifejezhető:

$$\begin{aligned}\Delta L &= (c - v) \Delta T \\ \Delta L &= c \Delta t\end{aligned}$$

ahol c a hang terjedési sebessége, v a forrás sebessége, ΔT a kibocsátott, Δt az észlelt jelzés hossza. A fentiekből:

$$v = c - \frac{\Delta L}{\Delta T} = c - \frac{c \Delta t}{\Delta T}$$

Ha a megfigyelő is és a hangforrás is mozog, akkor e két sebességből az következik, hogy

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{c + u} = \frac{c - v}{c + u} \cdot \Delta T$$

ahol u a megfigyelő sebessége, és a hangforrással szemben, felé közeledve mozog.

Térbeli helymeghatározás (a GPS működési elve)

A GPS (Global Positioning System) a Föld felszínén (illetve emberi léptékben attól eltávolodott) objektumok rendkívül pontos helymeghatározását teszi lehetővé. Működési eleve a Föld felszíne fölött 20 200 km magasan keringő műholdak által kibocsátott rádiójelek vételén, és a vételkor meghatározható műhold–megfigyelő távolságon alapszik.

Ha minden műhold egyszerre bocsát ki jelet, akkor a Földön lévő megfigyelő $\mathbf{r}$ helyvektora és a műholdak $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ helyvektorainak különbsége, vagyis a műholdak megfigyelőtől való távolságai a következőképp számolhatók:

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| = (\tau_1 - \delta) \cdot c_v$$

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}| = (\tau_2 - \delta) \cdot c_v$$

$$|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}| = (\tau_3 - \delta) \cdot c_v$$

ahol τ_1, τ_2, τ_3 a műholdak jele észlelésének megfigyelő által mért időeltolódása, δ a megfigyelő időmérő készülékének bizonytalansága, c_v pedig a műholdak által kisugárzott rádiójel terjedési sebessége (az adott közegben).

Mivel ez három egyenlet, melyben δ miatt négy ismeretlen van, az egyértelmű megoldáshoz szükség van egy negyedik műhold jelének vételére is. Ezzel már az egyenletrendszer megoldható.

2.) Kinematika II.

Kinematikai jellemzők térbeli mozgásoknál

Az anyagi pont mozgását a vonatkoztatási rendszerhez kötött koordináta-rendszerben írjuk le. A koordináta-rendszer origójából az anyagi ponthoz húzott irányított szakaszt, $\mathbf{r}$ -t helyvektornak nevezzük. A helyvektor a mozgás során változik, azaz $\mathbf{r}$ az idő függvénye, amit röviden így jelölhetünk: $\mathbf{r}(t)$.

Azt a görbét, amelyet az anyagi pont mozgása során leír, a mozgás pályájának nevezzük. A pálya egészének vagy egy részének hossza az út. A pálya kezdőpontjából a végpontjába mutató vektor elmozdulás-vektor ($\mathbf{r}$).

A test mozgásának leírása azt jelenti, hogy megadjuk a helyvektor nagyságát és irányát minden időpillanatban, vagy ami ezzel egyenértékű, a helyvektor koordinátáinak $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ értékét, minden pillanatban.

A mozgások kinematikai leírásánál arra keresünk választ, hogy hogyan mozognak a testek, hogyan függ a megtett út, elmozdulás, helyvektor az időtől.

Egy mozgást akkor tekinthetünk ismernek, ha minden t időpillanatban meg tudjuk adni a helyvektort, azaz tudjuk a test helyzetét.

Sebesség és gyorsulás mint vektor

A háromdimenziós térben történő mozgásoknál a sebesség és a gyorsulás is vektormennyiség.

Sebességvektor

Az $\mathbf{s}(t)$ sebességvektor nagysága megadja a test t időpillanatbeli sebességét, a vektor iránya pedig megegyezik azzal az iránnyal, amerre a test mozog.

A t_0 időpillanatban a pillanatnyi sebesség a következőképpen definiálható:

$$\mathbf{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} = \dot{\mathbf{r}}(t_0)$$

A pillanatnyi sebesség (ha létezik) akkor az adott térgörbe érintővektora.

Ez koordináták alakban írva

$$\mathbf{v}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \cdot \mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \cdot \mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \cdot \mathbf{k}$$

vagyis

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{r}}, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Gyorsulásvektor

Ha a sebességvektor megváltozását, azaz a gyorsulást tekintjük, akkor ez a (pillanatnyi) gyorsulás kifejezhető a következőképpen:

$$\mathbf{a}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t_0)}{t - t_0} = \dot{\mathbf{v}}(t_0) = \ddot{\mathbf{r}}(t_0)$$

Egyenletes körmozgás

Ha egy kör mentén egyenletes sebességgel mozgó test jelöléseket ejt a körvonalon, akkor a jelölések távolságából elolvasható, hogy a körmozgást végző test egyenlő időtartamok alatt egyenlő íveket és középponti szögeket fut be, bármekkora is ezek az időtartamok.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v = \text{állandó}, \quad \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \omega = \text{állandó}$$

A két összefüggéssel definiált v sebességet kerületi sebességnek, az ω sebességet pedig szögsebességnek nevezzük. Egy teljes körbefordulás T periódusideje alatt a megtett út nagysága egy teljes körív ($2r\pi$), az elfordulás pedig egy teljes szög (2π). Ezért

$$\frac{2r\pi}{T} = v, \quad \text{valamint} \quad \frac{2\pi}{T} = \omega$$

A szögsebesség SI-egysége a radián per másodperc, jele: rad/s, kifejezése $1 \text{ rad/s} = 1/\text{s}$. A két utóbbi egyenletből a kerületi sebesség és a szögsebesség kapcsolatára fölírható a

$$v = r\omega$$

összefüggés. Az egyenletes körmozgás jellemzésére bevezetésre került még a fordulatszám is, jele: n . Fordulatszámon a megtett N fordulat és az ezalatt eltelt t idő hányadosát értjük. Mivel $N = 1$ fordulathoz $t = T$ periódusidő kell, ezért a fordulatszám:

$$n = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}$$

A fordulatszám SI-egysége 1/s.

Centripetális gyorsulás

A körmozgás teljes kinematikai leírásához meg kell határoznunk a test gyorsulását is. Bár a test sebességének nagysága állandó, iránya pillanatonként változik, tehát gyorsul. Ha Δt idő-különbséggel veszünk két sebességvektort, akkor azok különbsége, $\Delta \mathbf{v}$ a kör(ív) húrja lesz. A sebesség megváltozásának nagysága, azaz a húr hossza:

$$|\Delta \mathbf{v}| \approx v \cdot \Delta \varphi$$

vagyis közel egyenlő a v sugárral rajzolt ív hosszával. Határértékben, mikor a mérés időtartama $\Delta t \rightarrow 0$, az átlaggyorsulás $\bar{a} \rightarrow a$, vagyis tart a pillanatnyi gyorsuláshoz:

$$a = \frac{v \cdot \Delta \varphi}{\Delta t} = v\omega = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

A gyorsulás iránya merőleges a sebességre és a kör középpontja felé mutat, ezért centripetális gyorsulásnak nevezzük:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v\omega$$

Egyenletesen gyorsuló körmozgás

Ha a körpályán mozgó test egyenletesen gyorsulva mozog, akkor megfigyelhető, hogy a test által befutott ívek és középponti szögek az eltelt idő négyzetével arányosak, vagyis

$$s \sim t^2, \quad \varphi \sim t^2,$$

illetve más alakban

$$s = kt^2, \quad \varphi = Kt^2$$

ahol k és K állandó. Az utóbbi két egyenlettel az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásnál levezetett módon felírhatók a következő összefüggések erre az esetre is:

$$s = \frac{a_t}{2} t^2, \quad v = a_t t, \quad a_t = \text{állandó}$$

ahol s a t idő alatt befutott ív hossza, v a körmozgást végző test pillanatnyi kerületi sebessége, a_t pedig a test érintőleges (tangenciális) gyorsulása, mely a sebességváltozás miatti gyorsulás. Hasonlóan a szögelfordulásra is

$$\varphi = \frac{\beta}{2} t^2, \quad \omega = \beta t, \quad \beta = \text{állandó}$$

ahol φ a szögelfordulás, ω a pillanatnyi szögsebesség, β pedig a

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega}{t} = \text{állandó}$$

egyenlettel bevezetett szöggyorsulás. A szöggyorsulás SI-egysége a radián per másodperc a négyzeten, jele: rad/s^2 , kifejezése: $1 \text{ rad/s}^2 = 1/\text{s}^2$.

Figyelembe véve a körív és a középponti szög közötti kapcsolatot, azaz hogy

$$s = r\varphi$$

a kerületi gyorsulás és a szöggyorsulás közötti összefüggés

$$a_t = r\beta$$

ahol r a körpálya sugara.

Ha a kezdeti sebesség $v_0 \neq 0$, és vele együtt a kezdeti szögsebesség $\omega_0 \neq 0$, akkor az egyenletek a következőképpen módosulnak:

$$s = v_0 t + \frac{a_t}{2} t^2, \quad v = v_0 + a_t t, \quad a_t = \text{állandó}$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\beta}{2} t^2, \quad \omega = \omega_0 + \beta t, \quad \beta = \text{állandó}$$

Körmozgás és rezgőmozgás kapcsolata

Ha a körmozgást végző test periódusideje megegyezik a rezgő test rezgésidejével és a kör sugara egyenlő a rezgés amplitúdójával, akkor a két mozgó test ernyőre kivetített képe minden időpillanatban egybeesik.

Ebből az a tapasztalat szűrhető le, hogy az egyenletes körmozgást végző testnek a kör átmérőjére eső vetületi mozgása harmonikus rezgőmozgás. A körmozgást végző test vetületének kitérése:

$$x = r \sin \varphi$$

ahol x a körpályán mozgó test távolsága a középponton át húzott egyenestől, φ ugyanezen egyenes és a kör középpontját a testtel összekötő szakasz által bezárt szög, r pedig a kör sugara. Figyelembe véve azt, hogy az egyenletes körmozgás miatt $\varphi = \omega t$, valamint hogy a vetület maximális értéke $A = r$, a fenti egyenlet

$$x = A \sin \omega t$$

alakot ölt, ahol ω a körmozgás szögsebessége, illetve a rezgőmozgás körfrekvenciája. A körmozgás $v_{\text{kör}} = r\omega$ kerületi sebességéből könnyen származtatható a rezgőmozgás sebessége:

$$v = A\omega \cos \omega t$$

Hasonlóan a rezgőmozgás gyorsulása

$$a = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x$$

Hajítások

Vízszintes hajítás

Ha egyidejűleg két tömegpontot azonos magasságból leejtünk úgy, hogy az egyiknek vízszintesen kezdősebességet adunk, akkor azt tapasztaljuk, hogy a két test egyszerre ér földet. Ha a vízszintesen elhajított test pályájának kezdőpontjába egy derékszögű koordinátarendszert helyezünk, akkor az elhajított test elmozdulásának x illetve y irányú skalárkomponenseire a következő összefüggéseket kapjuk:

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{g}{2} t^2$$

A megfelelő sebességkomponensekre

$$v_x = v_0, \quad v_y = gt$$

A gyorsuláskomponensekre pedig

$$a_x = 0, \quad a_y = g$$

Ha a legfőbb egyenletből kifejezzük az időt és a második egyenletbe helyettesítjük, megkapjuk a test x és y helykoordinátái közötti összefüggést, az úgynevezett pályaequációt:

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

Látható, hogy a mozgó test pályája parabola. A mozgások függetlensége elvének felhasználásával a görbe vonalú mozgást két egyenes vonalú mozgásra vezettük vissza.

Ferde hajítás

Ha a testet nem vízszintesen, hanem a vízszinteshez képest valamilyen α szöggel löjük ki, akkor a pályagörbéhez illesztett derékszögű koordinátarendszerben az x illetve y irányú elmozdulások skalárkomponenseit a következő egyenletek írják le:

$$x = v_0 \cos \alpha t, \quad y = v_0 \sin \alpha t - \frac{g}{2} t^2$$

A megfelelő irányú sebességkomponensek:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

A gyorsuláskomponensek pedig

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

Ebben a leírásban a ferde hajítást két egymásra merőleges, egyenes vonalú mozgásra bontottuk fel. Ha a már látott módon az első egyenletből kifejezzük az időt és a másodikba helyettesítjük, akkor megkapjuk a hajítás pályaequációját:

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

A helyet, sebességet és gyorsulást leíró egyenletekből következtetni lehet a pálya tetőpontjának magasságára, az elérhető legnagyobb távolságra, az emelkedés idejére. E képletek a következőképpen vezethetők le:

A pálya tetőpontján a test függőleges irányú sebessége nulla. Azaz

$$v_y(t_e) = 0 = v_0 \sin \alpha - g t_e$$

ahol t_e az emelkedési idő, vagyis amíg a test a pálya tetőpontjára nem jut. Ebből kifejezve:

$$t_e = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Az emelkedés idejének ismeretében megadható a pálya tetőpontjának magassága:

$$h_{\max} = y(t_e) = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}$$

A teljes mozgás időtartama $t_m = 2t_e$ (nyilvánvalóan), és ezért földet érés távolsága:

$$s_{\max} = x(t_m) = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Polár-, henger-, gömbi-koordináták

Polárkoordináták

Egy adott $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pont polárkoordinátái (r, φ) , ahol r a pont origótól vett távolsága, φ az origóból az adott pontba mutató vektornak az x tengely pozitív részével bezárt szöge. Így tehát a polárkoordinátákra

$$r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Átszámítási módok

Descartes $\rightarrow$ polár

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \text{"arctg}(y/x)"$$

polár $\rightarrow$ Descartes

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Hengerkoordináták

Egy adott $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pont hengerkoordinátái (r, φ, z) , melyeket így definiálunk: (r, φ) a pont xy síkra vett vetületének polárkoordinátái, z pedig a harmadik Descartes koordináta.

Átszámítási módok

Descartes $\rightarrow$ henger

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \text{"arctg}(y/x)"$$

$$z = z$$

henger $\rightarrow$ Descartes

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

Gömbi koordináták

Egy adott $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pont gömbi koordinátái (r, ϑ, φ) , melyeket a következőképp definiálunk: r a pont origótól vett távolsága, ϑ a pontba mutató helyvektor és a z tengely pozitív része által bezárt szög, φ a pontba mutató helyvektor xy síkra vett vetületének az x tengely pozitív részével bezárt szöge.

Átszámítási módok

Descartes $\rightarrow$ gömbi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

gömbi $\rightarrow$ Descartes

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \text{"arctg}(y/x)" & y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \vartheta &= \text{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} & z &= r \cos \vartheta\end{aligned}$$

Mozgások különböző koordináta-rendszerekben

Az előzőekben megismertetett koordináta-rendszerekkel bizonyos speciális térgörbén történő mozgások egyszerűbben kifejezhetők.

Körmozgás

Ha egy R sugarú körön történő egyenletes körmozgást akarunk kifejezni, akkor a tömegpont helyzetét leíró $r: t \mapsto (r, \varphi)$ helyfüggvény, melynek koordinátafüggvénye $r(t)$ és $\varphi(t)$, a következőképpen fejezhető ki:

$$r(t) = R, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t$$

ahol φ_0 a kezdeti szögelfordulás, ω_0 pedig a szögsebesség.

Csavarvonal

Ha a térben egy tömegpont egy henger felületén egyenletes körmozgás közben z tengely irányába emelkedik, akkor csavarvonalat ír le. A pontba mutató helyfüggvény $r: t \mapsto (r, \varphi, z)$, melynek koordinátafüggvényei a következőképpen fejezhetők ki:

$$r(t) = R, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t, \quad z(t) = ct$$

ahol φ_0 és ω_0 az előző példában ismertetett mennyiségek, c pedig az emelkedés ütemét meghatározó állandó.

Ciklois-görbe

Ha egy körlap tiszta gördülése közben a kerületének egy rögzített pontját (pl. egy kerék futófelületébe szorult kavicsot) vizsgálunk, akkor a gördülés során a kavics egy ciklois nevű görbét fog leírni. Ha e görbéhez egy derékszögű koordináta-rendszert rögzítünk, akkor a görbe egyenletét az alábbi koordinátafüggvények adják meg:

$$\begin{aligned}x(t) &= R\varphi(t) - R \sin \varphi(t) = R[\omega_0 t - \sin \omega_0 t] \\ y(t) &= R - R \cos \varphi(t) = R[1 - \cos \omega_0 t]\end{aligned}$$

ahol R a körlap sugara, $\varphi(t)$ a szögelfordulás-függvény, illetve ω_0 a szögsebesség.

Arkhimédészi spirál

Az arkhimédészi spirál olyan spirális síkgörbe, melyet egy rögzített pontból állandó sebességgel távolodó és ugyanezen pont körül egyenletes szögsebességgel forgómozgást végző test pályája rajzol. Az (r, φ) polárkoordinátákkal kifejezve a tömegpont t időpillanatbeli helyzetét, a koordinátafüggvények a következőként alakulnak:

$$\begin{aligned}r(t) &= r_0 + v_0 t \\ \varphi(t) &= \varphi_0 + \omega_0 t\end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenletből t -t kifejezve és azt az első egyenletbe helyettesítve az összefüggés

$$r(t) = r_0 + v_0 \cdot \frac{\varphi(t) - \varphi_0}{\omega_0}$$

alakban írható, ahol r_0 a kezdeti távolság az origótól, v_0 az egyenes vonalú mozgás sebessége, $\varphi(t)$ a szögelfordulás-függvény, φ_0 a kezdeti szögelfordulás, ω_0 pedig a szögsebesség.

Térbeli helymeghatározás V-SCOPE, GPS, VIDEO segítségével

V-scope

A V-scope a térben mozgó testek mozgását követi nyomon. A rendszer tornyokból, gombocskákból és egy mikroszámítógépből áll. A gombocska egy infravörös-vevőből és egy ultrahang-adóból áll. A gombocskát a nyomon követendő testhez rögzítve az eszköz képes mérni a test térbeli helyzetét. A mérést a tornyok végzik, az ismert helyzetű tornyok infravörös jelet sugároznak a gombocskák számára, mire azok ultrahang-kibocsátással válaszolnak. A tornyok mérik a válaszul adott hang beérkezéséig eltelt időt, és így meghatározható a gombocskáknak a toronytól való távolsága.

A gombocska $\mathbf{r}$ helyvektora és a tornyok $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ helyvektorainak különbsége, vagyis a kető közti távolságok a következőképp számolhatók:

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| = \tau_1 c_h$$

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}| = \tau_2 c_h$$

$$|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}| = \tau_3 c_h$$

ahol τ_1, τ_2, τ_3 a gombocska jele észlelésének tornyok által mért időeltolódása, c_h pedig a hang terjedési sebessége (az adott közegben). E távolságok ismeretében a gombocska helyzete háromszögeléssel meghatározható.

GPS

A GPS-szel való helymeghatározás módszerét lásd az első tételben a 10. oldalon!

Video

Mi a teremburája az a VIDEO? → Ez a Webcam Laboratory.

Egyszerű numerikus módszerek a $\mathbf{v}(t)$ és $\mathbf{a}(t)$ függvények előállítására

Ha ismertek az $\mathbf{r}(t)$ helyfüggvény bizonyos t értékeknél fölvetett értékei, akkor a $\mathbf{v}(t)$ és $\mathbf{a}(t)$ függvények előállítására több mód is kínálkozik.

Az első és legegyszerűbb módszer, hogy a pontokat szakaszokkal összekötve közelítjük a test pályáját, azonban ez a módszer „szögletes”, pontatlan grafikont eredményez.

A logaritmikus simítás módszer azon alapszik, hogy az $x(t)$ pont környezetében lévő $x(t + \Delta t)$ és $x(t - \Delta t)$ pontokat is felhasználva, ezekre parabolát illesztve közelíti a görbét.

$$x(t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_0)(\Delta t)^2$$

$$\begin{cases} x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_0)(\Delta t)^2 \\ x(t_0 - \Delta t) = x(t_0) - \dot{x}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_0)(\Delta t)^2 \end{cases}$$

A fenti egyenletrendszerből kifejezve a gyorsulás:

$$a(t_0) = \ddot{x}(t_0) = \frac{x(t_0 + \Delta t) + x(t_0 - \Delta t) - 2x(t_0)}{(\Delta t)^2}$$

valamint a sebesség

$$v(t_0) = \dot{x}(t_0) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0 - \Delta t)}{2\Delta t}$$

3.) Tömegpont dinamikája

Newton-törvények

Newton I. törvénye, a tehetetlenség törvénye

Minden test mindaddig megtartja nyugalmi állapotát, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgását, amíg más testekkel való kölcsönhatás annak megváltoztatására nem kényszeríti.

A tehetetlenség törvénye a minden más testtől távoli objektumok mozgására vonatkozik. Segítségével definiálható az inerciarendszer fogalma. Az olyan koordináta-rendszert, amelyben a minden más testtől távol elhelyezkedő testek nyugalomban vannak vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek, inerciarendszernek nevezzük.

Newton II. törvénye, a dinamika alaptörvénye

A törvény kimondása előtt vezessük be a súlyos és a tehetetlen tömeg fogalmát:

súlyos tömeg: a testek egymáshoz való vonzódásának mértéke (m_s)

tehetetlen tömeg: a test erővel szembeni ellenállása (m_t)

Ha egy erőmérővel megvizsgáljuk, hogy ugyanazon test különböző mértékű gyorsításához mekkora erők szükségesek, akkor lineáris összefüggést tapasztalunk.

Egy pontszerű test sebességének a megváltozása egyenesen arányos és azonos irányú a testre ható F erővel. Az arányossági tényező megegyezik a test m tömegével.

Tehát azt kapjuk, hogy $F \sim a$. Kísérletileg megállapítható, hogy az

$$\frac{F}{a} = m$$

hányadossal megadott mennyiség, a tömeg csak a gyorsított testre jellemző. Minél nagyobb a test tömege, annál nagyobb erő szükséges ahhoz, hogy a testet adott mértékben gyorsítsuk. Az arányossági tényező, a tömeg SI alapegység, egysége a kilogramm, jele: kg.

Az erő a tömeg és a gyorsulás szorzata. SI-egysége a newton, jele: N, meghatározása pedig: $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$.

A speciális esetekben kísérleti úton meghatározott erő-gyorsulás összefüggés általánosan igaz, pontszerű test gyorsulása és a rá ható F erő között fennáll az

$$F = ma$$

összefüggés, ahol m a test tömege. A dinamika alaptörvényét Newton az $I = mv$ impulzus segítségével a dinamika alaptörvényét az

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

alakban írta fel. A törvénynek ez az alakja az $m = \text{állandó}$ esetben egyenértékű az $F = ma$ összefüggéssel, hiszen

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = ma$$

A klasszikus mechanikában a tömeg állandósága mindig teljesül, nagy sebességeknél azonban, amikor a relativitáselmélet törvényeit kell alkalmazni, akkor a tömeg az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

összefüggés szerint sebességfüggvénné válik. Ekkor csak a Newton féle felírás érvényes.

Newton III. törvénye, a hatás-ellenhatás törvénye

Ha valamely test erőt fejt ki egy másikra, akkor a másik ugyanakkora, de ellentétes irányú erőt fejt ki őrá.

Azaz az A testre B részéről ható F_{AB} erő és a B testre A által kifejtett F_{BA} erő között fennáll az

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

összefüggés. Ez a hatás-ellenhatás törvénye.

Megjegyzés: Önállóan a fenti képlettel való felírás nem szerencsés, mivel nem foglalja magában azt a feltételt, hogy a két erő hatásvonalának közösnek kell lennie, illetve a felírásban szereplő két erő más-más testekre hat.

IV. axióma, az erőhatások függetlenségének elve

Ha egy testre egy időpillanatban több erő hat, akkor ezek együttes hatása megegyezik vektori eredőjük hatásával.

Az erőhatások függetlenségének elve szerint tehát, ha egy testre egyszerre több erő hat, akkor

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{\Delta \mathbf{I}}{\Delta t}$$

Az elvet bár Newton használta, önálló törvényként nem fogalmazta meg.

Erőtörvények és a mozgásegyenlet fogalma, kezdeti feltételek

A dinamika alaptörvényéből, ha az erőket ismerjük, következtethetünk a test mozgására. Ha pedig a test kinematikai jellemzői vannak birtokunkban, akkor az erőkről nyerhetünk felvilágosítást. Tapasztalat szerint az erők sokszor pusztán az erőt kifejtő test meghatározott paramétereinek, pl. helykoordinátáinak függvényében megadhatók. Az ilyen függvényeket erő törvényeknek nevezzük. Az az egyenlet, amit akkor kapunk, ha a dinamika alaptörvényébe beírjuk az erő törvényeket, a mozgásegyenlet.

Ha a gyorsulás helyébe a helyvektor második deriváltját írjuk, akkor az $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ mozgásegyenlet általában a mozgás pályáját meghatározó másodrendű differenciálegyenlet, ezért ahhoz, hogy a mozgás pontos leírását megadjuk, az erők mellett ismernünk kell valamilyen pillanatban a mozgás kinematikai jellemzőit is. Általában a mozgás kezdőpillanatában szokás megadni a test helyét és sebességét. Ezeket az adatokat kezdeti feltétleneknek nevezzük.

Erőtörvények**Konstans erők**

- (1) A Föld közelében a testekre – döntően a Föld vonzása miatt – ható nehézségi erő jó közelítéssel állanó. Az erő törvény:

$$\mathbf{F}_{neh} = m\mathbf{g}$$

ahol $\mathbf{g}$ a nehézségi gyorsulás (vektor).

- (2) A testek mozgásba hozását gátló tapadás súrlódási erő maximuma, melyet az érintkező felületek anyagi minőségei határoznak meg

$$F_{t,max} = \mu_0 K$$

törvény szerinti. Itt μ_0 a tapadási súrlódási együttható, K pedig az alátámasztási felület által a testre ható egyetlen T erő felületre merőleges K komponensének, az ún. kényszererőnek a nagysága.

Amikor a testek elmozdulnak egymáson, akkor az érintkező felületeken csúszási súrlódási erő lép fel. A csúszási súrlódási erőt ez

$$F_{cs} = \mu K$$

összefüggés adja meg, ahol K az érintkező felületekre merőleges kényszererő, a μ pedig a csúszási súrlódási együttható.

- (3) Elektromos térben mozgó q pontszerű töltésre ható erő nagysága szintén konstans, hasonlóan a nehézségi térben lévő testhez, az

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

erőtörvénnyel írható le, ahol $\mathbf{E}$ az elektromos térerősség (vektor).

Lineáris erők

- (4) A csavarrugó által kifejtett F_r rugalmas erő arányos és ellentétes irányú a rugó megnyúlásával, vagyis a rugalmas erő az

$$F_r = -Dx$$

összefüggés szerint függ a megnyúlástól, hol D a direkciós állandó

Nem lineáris erők

- (5) Két tömegpont, M és m , melyek távolsága r a tömegvonzás miatt vonzóerőt fejtenek ki egymásra. E gravitációs erő:

$$F_{gr} = \gamma \frac{Mm}{r^2}$$

ahol γ a gravitációs állandó.

- (6) Hasonló a jelenség, hogy ha két töltés, Q és q , melyek távolsága szintén r , kölcsönhatnak. Ekkor a Coulomb-féle erőtörvény:

$$F_{Co} = k \frac{Qq}{r^2}$$

ahol k a Coulomb-féle arányossági tényező.

Sebességtől függő erők

- (7) A Lorentz-erő az elektromágneses térben mozgó q töltésre ható erő:

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

ahol $\mathbf{E}$ az elektromos térerősség, $\mathbf{B}$ a mágneses indukció és $\mathbf{v}$ a töltés sebessége.

- (8) Folyadékban szabadon eső test esetén

$$F_k = kv$$

Mozgás, állandó erő hatására

Állandó erő hatására létrejövő mozgás például a szabadesés és a hajítások. Példaként ezeket tárgyaljuk.

A kísérleti tapasztalat szerint tetszőleges m tömegű testre a Föld közelében $F_{neh} = mg$ nehézségi erő hat. Így a mozgásegyenlet a szokásos koordináta-rendszerben:

$$ma = mg$$

A mozgásegyenletet integrálva adódnak a jól ismert összefüggések:

$$v(t) = v_0 + gt, \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{g}{2} t^2$$

Centripetális erő, példák körmozgásra (kúpinga, mesterséges hold)

Az egyenletes körmozgást végző test gyorsulása, az ún. centripetális gyorsulás a kör középpontja felé mutat. A centripetális gyorsulás nagysága többféle alakban is kifejezhető:

$$a_{cp} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} = v\omega$$

Ahhoz, hogy az m tömegű test ekkora gyorsulással egyenletesen körpályán mozogjon, a testre

$$F_{cp} = ma_{cp} = mr\omega^2$$

nagyságú, a kör középpontja felé mutató erőnek kell hatnia. Ha egyidejűleg több erő is hat a testre, akkor a centripetális erő ezeknek az erőknek az eredője. A centripetális erő tehát meg-
egyezik az egyenletes körmozgást végző testre ható erők eredőjével. Vektori alakban:

$$\mathbf{F}_{cp} = \sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_{cp}$$

Megjegyzés: A testre ható kölcsönhatási erők közé gyakran besorolják a centripetális erőt is. Ez hiba, mivel a centripetális erő éppen a testre ható eredő erő sugárirányú összetevőjével azonos.

Mesterséges holdak mozgása

A Föld körül keringő mesterséges holdakra ható gravitációs erő a holdakat a Föld körül körpályára állítja. Ekkor a gravitációs erőtvénnyel a mozgásegyenlet

$$ma_{cp} = \gamma \frac{Mm}{r^2}$$

Emellett a_{cp} kifejezhető, mégpedig a fent már említett alakban:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = v\omega$$

Ekkor

$$v = \sqrt{a_{cp}r} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r^2}r} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{R_F^2} \cdot R_F \cdot \frac{R_F}{r}} = \sqrt{g \cdot R_F \cdot \frac{R_F}{r}}$$

A keringési idő is kiszámolható:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{\gamma M}{r^3} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R_F}{g}}$$

Kúpinga

A fonálra akasztott és egy kúp alapköre mentén meglökött test mozgása közben, mialatt a fonál a kúp alkotójaként bejárja a palástot, körmozgást végez. Az összeállítást kúpingának nevezzük. A centripetális erő ez esetben a fonalerő és a nehézségi erő eredője.

$$\frac{F_{cp}}{mg} = \tan \alpha = \frac{m(l \sin \alpha)}{mg} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

A keringési idő:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l \cos \alpha} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}$$

Kényszererők, szabaderők

Vannak olyan erők, melyek meghatározásához a vizsgált test mozgásának ismerete is kell. Ez áll fenn, ha a testmozgásának valamilyen előírt pályán kell történnie, például ingamozgás vagy lejtőn való lecsúszás esetében.

Ezekben az esetekben a kényszert megvalósító test által kifejtett erőt nem tudjuk előre erőtvénnyel megadni, az erők csak a mozgás, ill. egyensúly körülményeinek ismeretében adható meg. Az ilyen erőket kényszererőknek nevezzük, szemben a szabaderőkkel, amelyek esetén az erő a kölcsönhatástól függetlenül meghatározható, mert az erőtvényt pontosan ismerjük.

Lejtőn történő mozgás

Vegyünk fel egy olyan koordinátarendszert, amelynek x tengelye a lejtő mentén a test mozgásának irányába, y tengelye pedig a lejtő síkjára merőlegesen felfelé mutat. A sima lejtőn a testre a függőlegesen lefelé mutató mg erő és a lejtő síkjára merőleges K kényszererő hat. A mozgásegyenletek:

$$ma_x = mg \sin \alpha, \quad ma_y = K - mg \cos \alpha$$

A kényszerfeltétel pedig az, hogy a testnek a lejtő mentén kell mozognia, azaz

$$y(t) = 0, \quad v_y(t) = 0, \quad a_y(t) = 0$$

Így a mozgásegyenletből

$$v_x(t) = gt \sin \alpha + v_{0x}, \quad v_y(t) = 0$$

$$x(t) = \frac{g \sin \alpha}{2} t^2 + v_{0x} t + x_0, \quad y(t) = 0$$

adódik.

Amennyiben a lejtő nem sima, de tudjuk, hogy a test biztosan lecsúszik rajta, akkor a μ csúszási súrlódási tényező felhasználásával a mozgásegyenletek az

$$ma_x = mg \sin \alpha - \mu K, \quad ma_y = K - mg \cos \alpha$$

a kényszerfeltételek pedig az

$$y(t) = 0, \quad v_y(t) = 0, \quad a_y(t) = 0$$

alakot öltik.

A harmonikus rezgőmozgás létrejöttének dinamikai feltétele, a mozgásegyenlet megoldása

A rugó megnyúlása egyenesen arányos és ellentétes irányú a nyújtó erővel. Ez ilyen erőt az

$$F = -Dx$$

erőtvénnyel adhatjuk meg, ahol x a megnyúlás, D a rugóra jellemző együttható. Keressük most azt, hogy milyen mozgást végez az a test, amelyre a lineáris erőtvénynek megfelelő erő hat. A dinamika alapegyenlete szerint

$$ma = -Dx$$

egyenlet megoldását kell keresni. Ez matematikailag az

$$m\ddot{x} = -Dx$$

másodrendű differenciálegyenlethez vezet, ahonnan átrendezés után

$$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$

alakra jutunk. A megoldást korábbi tapasztalataink alapján például az $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ alakban kereshetjük. Vizsgáljuk meg, hogy ezek után e függvény mikor megoldása a differenciálegyenletnek. E célból behelyettesítjük a kitérés-idő függvényt és a belőle adódó gyorsulást, majd kiemelés után az

$$A \sin(\omega t + \varphi) \left(\frac{D}{m} - \omega^2 \right) = 0$$

eredményre jutunk. Az egyenletnek minden időpillanatban teljesülnie kell. Ez csak úgy lehetséges, hogy

$$\frac{D}{m} - \omega^2 = 0$$

ahonnan a körfrekvencia és a rezgésidő

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

A fenti megoldásban A és φ a kezdeti feltételek ismeretében adható meg.

Amennyiben a rugót nem vízszintesen, hanem függőlegesen akasztjuk fel, akkor a rárögzített tömeg a nehézségi erő miatt megnyújtja a rugót. Ekkor:

$$m\ddot{x} = mg - Dx$$

Ezt átrendezve

$$m\ddot{x} = -D \left(x - \frac{mg}{D} \right)$$

majd mivel a jobboldalon a zárójelben tulajdonképpen x áll, ezért

$$\begin{aligned} m \left(x - \frac{mg}{D} \right)'' &= -D \left(x - \frac{mg}{D} \right) \\ \left(x - \frac{mg}{D} \right)'' + \omega_0^2 \left(x - \frac{mg}{D} \right) &= 0 \end{aligned}$$

ekkor az általános megoldás

$$x = \frac{mg}{D} + A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

ahol az egyensúlyi helyzet eltolódik.

Szabadesés folyadékban

A folyadékban szabadon eső testre a nehézségi erő mellett a közegellenállási erő is hat, mely utóbbi a sebesség függvénye. A mozgásegyenlet

$$ma = m\dot{v} = m\ddot{x} = mg - F_k(v)$$

A folyadékban mozgó testre ható közegellenállási erőről tudjuk, hogy

$$F_k(v) = kv$$

ahol kicsiny gömb esetén $k = 6\pi\eta r$

A mozgásegyenlet új alakja tehát

$$\dot{v} = g - \frac{k}{m}v = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right)$$

Mivel a harmonikus rezgőmozgásnál alkalmazott módszerrel a jobboldalon itt is v szerepel, ezért

$$\left(v - \frac{mg}{k}\right)' + \frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right) = 0$$

Ahol a zárójeles tagot u -val, k/m -et pedig λ -val jelöljük, akkor

$$\dot{u} + \lambda u = 0$$

vagyis az egyenlet általános megoldása

$$u = c e^{-\lambda u}$$

Így a mozgásegyenlet általános megoldása

$$v(t) = \frac{mg}{k} + c e^{-\frac{k}{m}t}$$

4.) Gravitáció, bolygók mozgása

Kepler-törvények

Kepler I. törvénye

A bolygók olyan ellipszispályán keringenek a Nap körül, amelynek egyik fókuszpontjában a Nap található.

Kepler II. törvénye

A Naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol.

Ez azt jelenti, hogy a $\Delta A/\Delta t$ területi sebesség állandó. Ezt a következőkre lehet visszavezetni:

$$\Delta A = \frac{1}{2} (rv_{\perp} \Delta t)$$

$$q := \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} rv_{\perp} = \frac{1}{2} |\mathbf{r}| |\mathbf{v}| \sin \alpha = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$$

ahol q a területi sebesség, r a gyújtópontból a bolygóba mutató vektor, $v_{\perp}$ pedig erre a helyvektorra merőleges sebességkomponens.

Kepler III. törvénye

A Nap körül keringő különböző bolygók keringési időinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a Naptól mért távolságaik köbei:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \text{állandó}$$

A Newton-féle gravitációs erőtvény, kapcsolata a Kepler-törvényekkel

Kepler első törvénye alapján a bolygómozgás síkban zajlik, a második törvény miatt pedig következtethetünk arra, hogy a vonzóerő a Napot a bolygóval összekötő egyenesre esik. Közelítsük az ellipszispályát körrel (mint ahogy az a Naprendszer bolygóinál igen jól teljesül). Ekkor a centripetális erő fölírható mint

$$F_{cp} = mr\omega^2$$

ami tovább egyenlő:

$$F_{cp} = mr \frac{4\pi^2}{T^2}$$

Megszorozva ezt r^2 -tel olyan alakra jutunk, melyből látszik a harmadik Kepler törvény miatt, hogy

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

A Newton-féle gravitációs erőtvény alakja

$$F_{gr} = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

amit levezethető az előző felírásokból, mivel

$$F_{cp} = mr \frac{4\pi^2}{T^2} = m \frac{4\pi^2}{kr^2} = F_{gr}$$

ahol

$$k = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$$

A gravitációs állandó mérése, Cavendish kísérlet

A γ gravitációs állandó méréseire Henry Cavendish szerkesztett eszközt: a torziós inga egy nagyon vékony fémszálon függő vízszintes rúdból, és a rúd két végén elhelyezett tömegekből áll. Ha a rúd két végének közelében gömb alakú, néhány kg tömegű testeket helyezünk el, akkor a kis és nagy golyók közti gravitációs vonzerő hatására a vízszintes rúd elfordul, a vékony függesztőszál pedig megcsavarodik. Az inga akkor lesz egyensúlyban, amikor a gravitációs erők forgatónyomatéka és a rugalmas szál visszatérítő nyomatéka megegyezik. Ebből a gravitációs állandó meghatározható.

Az inga kis elfordulásának mértékét a szálra rögzített tükörről irányított fénysugár visszavert képének ernyőn való elmozdulásának mérésével lehet megállapítani.

A gravitációs állandót Cavendish mérte meg először, pontos értéke

$$\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

A Föld és a Nap tömege

A Naprendszer bolygói jó közelítéssel körpályán mozognak, azaz a Kepler törvények szerinti ellipszispálya ε numerikus excentricitása, vagyis a c fókusz távolság és a fél nagytengely a hosszúságának aránya $\varepsilon = \frac{c}{a} \cong 0$. Így az m tömegű bolygó mozgásegyenlete a

$$\gamma \frac{M_N m}{a^2} = m \frac{v^2}{a}$$

alakban írható fel. Ebből a pályasugár valamint a keringési idő ismeretében a Nap M_N tömege meghatározható, ha figyelembe vesszük, hogy $v = 2\pi a/T$:

$$M_N = \frac{4\pi^2}{\gamma} \cdot \frac{a^3}{T^2}$$

A fenti összefüggésbe a pálya adatait beírva a Nap tömegére $M_N = 1,986 \cdot 10^{30}$ kg adódik. Hasonló gondolatmenettel a Föld tömege is kiszámítható: $M_F = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg.

Mozgás gravitációs erőterben

A Kepler első törvényében lévő parabolapályát leíró egyenlet, azaz

$$r(\varphi) = \frac{P}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

ahol r a P pont és a (keringés középpontjaként szolgáló) fókuszpont távolsága, φ a nagytengely és az r szakasz által bezárt szög, ε pedig az ellipszisre jellemző numerikus excentricitás ($0 \leq \varepsilon < 1$)

A gravitációs erőtvényből ugyanez levezetető a

$$ma = m\ddot{r} = \gamma \frac{mM}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right)$$

differentiálegyenlet megoldásával, melyre

$$r(\varphi) = \frac{P}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

az eredmény. Tehát kimutattuk, hogy tetszőleges vonzócentrum (pl. a Nap) hatására mozgó égitestek pályája mindig kúpszelet: a vissza nem térő üstökösök esetén $\varepsilon = 1$, azaz parabola,

vagy $\varepsilon > 1$, azaz hiperbola alakú pályán haladnak. A tartósan a vonzáscentrum közelében maradó égitestekre $0 \leq \varepsilon < 1$, azaz pályájuk ellipszis.

Mesterséges holdak, szökési sebesség

A mesterséges holdak mozgása is a Newton-féle tömegvonzási törvénnyel írható fel. Ebben az esetben a Föld a vonzócentrum, és körülötte keringenek a műholdak.

Körsebesség

A műholdakkal kapcsolatos legegyszerűbb kérdés az, hogy a Föld középpontjától bizonyos r távolságban milyen sebességgel kell mozogniuk, hogy pályájuk pontosan kör legyen. A h magasságban keringő m tömegű műhold mozgásegyenlete ekkor

$$\gamma \frac{M_F m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

ahonnan

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M_F}{r}}$$

Felhasználva azt, hogy $r = R_F + h$, illetve, hogy $\gamma M_F = g R_F^2$, az adódik, hogy

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M_F}{R_F + h}} = \sqrt{\frac{g R_F^2}{R_F + h}} = \sqrt{g R_F} \cdot \sqrt{\frac{R_F}{R_F + h}}$$

Ha a műhold a Föld felszíne fölött nagyon kis magasságban kering, azaz $h \ll R_F$, akkor a keringő műhold sebessége

$$v_I = \sqrt{g R_F}$$

A $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ és $R_F = 6370 \text{ km}$ értékeket behelyettesítve $v_I = 7,9 \text{ km/s}$ értéket kapunk, melyet első kozmikus sebességnek vagy körsebességnek nevezünk.

Ha egy rakétát tekintünk, ami a Földtől végtelen nagy távolságra eltávolodott és sebessége ekkor nullára csökkent, megkapjuk azt a sebességet, amivel a Földről indított test képes elhagyni a bolygó vonzókörét. Az energiatétel szerint a rakétára teljesül, hogy

$$\frac{1}{2} m v_{II}^2 - \gamma \frac{M_F m}{R_F} = 0$$

Innen a v_{II} indítási (szökési) sebesség

$$v_{II} = \sqrt{2g R_F}$$

azaz $\sqrt{2}$ -ször akkora, mint az első kozmikus sebesség, tehát $v_{II} = \sqrt{2} \cdot v_I = 11,2 \text{ km/s}$.

Távközlési műholdak

Hát ide meg mi kell? → Földdel szinkronban keringő műholdak. Nyilván pályasebesség és keringési magasság. Lesz majd ilyen is, csak érjem meg! :DD

5.) Tömegpont mozgására vonatkozó tételek

Impulzustétel

Impulzus, erőlökhés

Newton második törvényének eredeti alakjában az impulzus szerepelt, vagyis ő fogalmazta meg a dinamika alaptörvényét

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{I}}{\Delta t}$$

alakban. Ez a fölírás átalakítható:

$$\Delta \mathbf{I} = \mathbf{F} \Delta t, \quad \mathbf{I} = m\mathbf{v}$$

mely felírásban az első egyenletben szereplő $\mathbf{F} \Delta t$ szorzatot erőlökhésnek, a második egyenlettel definiált $\mathbf{I}$ vektort pedig impulzusnak nevezzük.

Impulzustétel

A tétel kimondja, hogy egy test impulzusnak időegység alatti megváltozása egyenlő a testre ható erők eredőjével, vagy másképpen, egy test impulzusának megváltozása egyenlő a testet ért erőlökhések eredőjével.

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{F} = \dot{\mathbf{I}}$$

A tétel megfogalmazható integrális alakban is, ha kiintegráljuk a fenti egyenlet középső- és jobboldalát:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{I}}(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\tau) d\tau$$

vagyis

$$\mathbf{I}(t_1) - \mathbf{I}(t_2) = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\tau) d\tau$$

A fenti tételből következik, hogy ha $\mathbf{F} = 0$, akkor $m\mathbf{v} =$ állandó, vagyis $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, illetve hogy ha $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0$, akkor $m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{F}_0(t_2 - t_1)$.

Összefoglalva, az impulzustétel három alakja:

$$\boxed{\Delta \mathbf{I} = \mathbf{F} \Delta t}, \quad \boxed{\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{F} = \dot{\mathbf{I}}}, \quad \boxed{m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\tau) d\tau}$$

Perdülettel

Forgatónyomaték

A forgatónyomaték definíció szerint az a mennyiség, ami az erő forgatóhatását jellemzi.

$$M := |\mathbf{F}| |\mathbf{r}| \sin \alpha = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

mely fölírásban $\mathbf{F}$ az erő, $\mathbf{r}$ pedig a forgáspontból az erő támadáspontjába mutató vektor.

Perdület (impulzusmomentum)

Az $\mathbf{I} = m\mathbf{v}$ impulzus definíciójából és a forgatónyomatékból fölírható $\mathbf{N} := \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ vektor a perdület.

Perdülettétele

A perdülettétele kimondja, hogy egy test perdületét a külső erők forgatónyomatékai változtatják meg. A forgatónyomatékok eredője egyenlő a perdület időegység alatt bekövetkezett megváltozásával. Ezen összefüggés a következőből vezethető le:

$$m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{v} = \mathbf{F}$$

Ezt $\mathbf{r}$ vektorral megszorozva:

$$m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Vagyis ezt a szorzatot deriválva:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}$$

adódik, ahonnan, mivel $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ezért

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$$

Ez a perdülettétele differenciális alakja. Ha az integrális alakot keressük, akkor tekintsük az

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{N}}(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}(\tau) d\tau$$

összefüggést, ahonnan

$$\mathbf{N}(t_2) - \mathbf{N}(t_1) = \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2 - \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{F})(\tau) d\tau$$

Tehát összefoglalva, a perdülettétele három alakja

$$\boxed{\Delta \mathbf{N} = \mathbf{M} \Delta t}, \quad \boxed{\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \dot{\mathbf{N}}}, \quad \boxed{\mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2 - \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}(\tau) d\tau}$$

Centrális erőter (Kepler II. törvénye)

Megvizsgálva azt, hogy mikor marad meg egy test impulzusmomentuma, arra jutunk, hogy olyan esetekben, mikor a testre ható forgatónyomatékok eredője zérus. Ez kétféleképp valószínűsíthető meg: egyrészt, az $\mathbf{r} = 0$ eset triviális, másrészt, ha az $\mathbf{r}$ helyvektor párhuzamos az erők eredőjével. Ez utóbbi azt jelenti, hogy az eredő erő hatásvonala a test helyvektorának egyenesébe esik. Ilyen esetben centrális erőről beszélünk, hiszen az erő a test mozgásának minden pillanatában a koordináta-rendszer origójába mutat.

Kepler második törvénye kimondja, hogy a keringési centrumból a keringő testbe mutató vektor területi sebesség, vagyis azok a ΔA területek, melyeket a vektor Δt időtartam alatt végigsöpör, állandó. Ez algebrailag kifejezve

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = q = \text{állandó}$$

A területi sebesség szintén egyenlő a következő mennyiséggel:

$$q = \frac{1}{2m} |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = \frac{1}{2m} |\mathbf{N}|$$

A dinamika alapötvényének newtoni alakját felírva

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M} = \mathbf{0} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{gr}$$

Mivel a fenti szorzat zérus, és $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ ez csak úgy lehet, ha $\mathbf{r}$ és $\mathbf{F}_{gr}$ egy egyenesbe esnek, azaz a gravitációs erőter centrális.

Munkatétel

Kinetikus energia

Az

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{a}{2}\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a}$$

összefüggésből és az $F = ma$ felírásból teljesül az

$$\frac{1}{2}mv^2 = Fs$$

egyenlőség. Ezen kifejezés baloldalán álló mennyiséget kinetikus energiának nevezzük és E_k -val jelöljük.

Munka, elemi munka

Az F erő által végzett W_F munka egyenlő a kinetikus energia megváltozásával, azaz

$$\Delta E_k = W_F$$

Az elemi munka az

$$\frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

összefüggésből kifejezve

$$\Delta E_k = \mathbf{F}(\mathbf{v}\Delta t) = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r} \rightarrow \Delta W = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r}$$

Pillanatnyi teljesítmény

A munkavégzés gyorsaságának jellemzésére bevezetett mennyiség, a teljesítmény megadja, hogy mekkora idő alatt mekkora munkavégzés történt. Az átlagos teljesítményt a

$$\bar{P} = \frac{W}{t}$$

összefüggés határozza meg. A teljesítmény SI-egysége a watt, jele: W, meghatározása: $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$. Az átlagos teljesítmény mellett használatos még a pillanatnyi teljesítmény is, amit a következő összefüggéssel definiálunk:

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Erő munkavégzése adott görbére vonatkoztatva

Legyen adott a Γ görbe, melynek végpontjait jelölje (1) és (2). Az $\mathbf{F}$ erő által végzett munka, míg az m tömeget e görbe mentén mozgatja, a

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \Delta\mathbf{r}_i$$

értékkel közelíthető, ahol a görbe egy felosztása azt n darabra osztja és F_i , $\Delta \mathbf{r}_i$ ezen szakaszokra vonatkozó erők és elmozdulások. Ha a fenti közelítő összeg határértéke $n \rightarrow \infty$ esetén létezik, miközben $\max|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0$, akkor a görbe mentén végzett munka a görbe menti integrál bevezetésével kiszámolható:

$$W_F(1 \rightarrow 2) := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i = \int_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

Munkatétel

A munka definícióját fölhasználva határozzuk meg a pontszerű testre ható erők eredőjének munkáját! Ha a testre ható erők $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ eredője állandó, és a test v_0 kezdősebességének egyenesében esik, akkor a feladat igazán egyszerű. A munka definíciós egyenletébe behelyettesítve az erőt, gyorsulást és utat:

$$W = Fs = ma \cdot s = m \frac{(v - v_0)}{t} \cdot \frac{v + v_0}{2} t$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket, az adódik, hogy

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Ez a munkatétel. Integrális alakja

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_F(1 \rightarrow 2) = \int_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

Tehát összefoglalva, a munkatétel három alakja:

$$\boxed{\Delta E_k = \Delta W}, \quad \boxed{\frac{dE_k}{dt} = P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \dot{E}_k}, \quad \boxed{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}$$

Nevezetes erők munkája

Nehézségi erő munkája

Emeljük föl az m tömegű testet h úton F erővel, miközben a testre még az $F_{neh} = mg$ nehézségi erő is hat. Az F erő munkája ekkor $W_F = Fh$. A nehézségi erőé pedig $W_{neh} = -mgh$. Ha a testet agyon lassan, állandó sebességgel emeljük, akkor $F = mg$ és természetesen a két erő abszolút értéke is egyenlő egymással. Az F erő által végzett emelési munka:

$$W_{em} = mgh$$

Ha az emelést nem függőlegesen, hanem valamilyen Γ görbe mentén végezzük, akkor egyszerűen belátható, hogy az emelési munka bármilyen olyan görbe mentén azonos lesz, mely görbék azonos kezdőpontból indulnak ki, és ugyancsak azonos végpontjuk is.

$$\sum_i \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{F}_0 \cdot \sum_i \Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{F}_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = W_F(1 \rightarrow 2)$$

ahol

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = [0, 0, F_0](\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = F_0(z_2 - z_1) = F_0h$$

tehát a görbe alakja nem számít az elvégzett munka szempontjából.

Súrlódási munka

Ha az m tömegű test valamely felületen F erő hatására mozog, akkor a felület által a testre ható T erő felületre merőleges komponense a K kényszererő, a felülettel párhuzamos összetevője pedig az $F_{\text{súrl}} = \mu K$ súrlódási erő. Ha a test állandó sebességgel mozog, akkor az $F = F_{\text{súrl}}$ erő munkája s hosszúságú pályaszakaszon $W_F = Fs \cos 0^\circ = \mu Ks$, a sebességgel ellentétes irányú súrlódási erő munkája pedig $W_{\text{súrl}} = F_{\text{súrl}}s \cos 180^\circ = -\mu Ks$.

A fentiekből következik, hogy zárt görbe mentén sem a súrlódási erő munkája, sem a súrlódási erő ellenében végzett munka nem zérus.

Rugó ellenében végzett munka

A D rugóállandójú, $F_r = -Dx$ erőtvényű rugó lassú megnyújtásához szükséges F erő munkája az erő-megnyúlás grafikon görbe alatti területe, ami

$$W_F = \frac{1}{2} Dx_2^2 - \frac{1}{2} Dx_1^2$$

Ugyanebben a folyamatban, tehát amikor a rugó megnyúlását x_1 -ről x_2 -re növeljük, a rugóerő munkája $W_r = -W_F$. Látható, hogy zárt görbe mentén, vagyis a rugót megnyújtva és visszahozva a rugóerő ellenében végzett munka zérus.

Kényszererők munkája

A kényszererők előírt felületre korlátozzák a testek mozgását, és mint megállapítottuk, merőlegesek a felületre, azaz nyugvó felület esetén a lehetséges elmozdulásra. Ez azt jelenti, hogy a kényszererők munkája mindig zérus.

Konzervatív erőter fogalma

Mint láttuk, léteznek olyan erők, melyek által bármilyen zárt g görbe mentén végzett munka zérus, vagyis

$$W = \sum_g^{\text{zárt}} \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i = 0$$

Az ilyen erőket konzervatív erőknek nevezzük.

Ha a konzervatív erő hatására az m tömegű anyagi pont tetszőleges pályán A pontból B pontba jut, akkor a konzervatív erő rajta pozitív munkát végez. Ha ezután a tömegpont egy tetszőleges (különböző) pályán visszajut A pontba, a konzervatív erő ellenében, akkor a végzett munka az előzővel megegyező nagyságú, de ellentétes előjelű, vagyis $W_1 + W_2 = 0$, amiből következik, hogy $W_1 = -W_2$.

Potenciálfüggvény bevezetése

Megállapodás szerint konzervatív erő esetén az A pontban lévő anyagi pont E_{pA} potenciális energiáján értjük azt a munkát, amelyet a konzervatív erő képes rajta végezni, ha a tömegpont tetszőleges úton jut el az A -ból az elvileg bárhol fölvehető O vonatkoztatási pontba.

A konzervatív erő jellegéből következik, hogy az anyagi ponton A -ból B -ig végzett munka ugyanakkora, mint amekkora munkát végez az O értésével A -tól O -ig és O -tól B -ig.

$$W_{AB} = W_{AO} + W_{OB} = W_{AO} - W_{BO} = E_{pA} - E_{pB} = \Delta E_p$$

A konzervatív erő munkája tehát egyenlő a tömegpont kezdő- és végállapotbeli potenciális energiájának a különbségével.

A mechanikai energia megmaradásának tétele

A konzervatív erő munkája a munkatétel szerint kifejezhető a tömegpont mozgási energiájának megváltozásával is:

$$W_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Ezt az egyenletet és a konzervatív erő munkavégzését a potenciális energiából megadó egyenletet összevetve

$$E_{pA} - E_{pB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

illetve

$$E_{pA} + \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{pB} + \frac{1}{2}mv_B^2$$

Minthogy a kezdő és végpontra semmilyen kikötést nem tettünk, ez utóbbi egyenlet azt jelenti, hogy a tömegpont potenciális és mozgási energiájának összege, vagyis

$$E_p + \frac{1}{2}mv^2 = \text{állandó}$$

a mozgás során. Ez a mechanikai energia megmaradásának tétele.

6.) Pontrendszerek

Pontrendszer fogalma, erők osztályozása

A pontrendszerek olyan testek illetve anyagi rendszerek, amelyek diszkrét (elkülönült) pontokból állnak. A rendszer tagjai közötti kapcsolatra egyetlen megkötés van érvényben: a pontrendszer két eleme között ható erő mindig centrális, vagyis az erő hatásvonala a két pontot összekötő egyenesbe esik.

A pontrendszer tagjai között működő erőket belső, a rendszeren kívüli testektől származó erőket külső erőknek nevezzük.

Impulzustétel pontrendszerre

Tekintsünk egy két tömegpontból álló pontrendszert, melyben a pontszerű testeket jelölje (1) és (2). Írjuk fel a két test mozgásegyenletét úgy, hogy a rendszer két pontjának kölcsönhatását megadó $F_{12} = -F_{21}$ erőt (belső erők) mindkét test esetén válasszuk le a többi erő (a külső erők) $F^{(k)}$ összegéről:

$$\mathbf{F}_1^{(k)} + \mathbf{F}_{12} = \frac{\Delta \mathbf{I}_1}{\Delta t}, \quad \mathbf{F}_2^{(k)} + \mathbf{F}_{21} = \frac{\Delta \mathbf{I}_2}{\Delta t}$$

A két egyenletet összeadva az egyik oldalon a rendszerre ható erők vektori összege, a másikon pedig a rendszer összipulzusának változása adódik. Az erőösszegeből a hatás-ellenhatás törvényét felhasználva a belső erők kiesnek. A dinamika alaptörvénye a pontrendszer minden tagjára főlírható, így azt kapjuk, hogy a rendszerre ható külső erők vektori összege megegyezik a rendszer összipulzus-változásának és a közben eltelt időnek a hányadosával:

$$\mathbf{F}_e^{(k)} = \frac{\Delta \mathbf{I}}{\Delta t}$$

Ha a két pontra vizsgált esetet gondolatban további pontokra is megnézzük, akkor az egyes pontokra felírt egyenletek összegzésekor az egyik oldalon most is a pontrendszerre ható külső erők eredője áll elő, a másikon pedig a rendszer $\mathbf{I}$ összipulzusának megváltozása adódik. Így a fenti összefüggés tetszőleges számú pontból álló rendszerre is érvényes:

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \dot{\mathbf{I}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(k)} = \mathbf{F}_e^{(k)}, \quad \Delta \mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_e^{(k)}(\tau) d\tau$$

Ez az impulzustétel pontrendszerre megfogalmazott alakja.

A tételből rögtön következik, hogy ha a pontrendszerre ható külső erők eredője zérus, akkor a rendszer összipulzusa állandó.

Tömegközéppont tétel

Felmerül a kérdés, hogy a pontrendszer mozgása nem jellemezhető-e valamilyen módon egyetlen pont mozgásával. Ez azt jelentené, hogy a rendszer összipulzusát egyetlen ponthoz kéne rendelni, melyre teljesül, hogy itt egyesül a rendszer össztömege, vagyis

$$M = \sum_i m_i$$

Ezt figyelembe véve az összipulzus az

$$\mathbf{I} = M \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i}$$

alakban is felírható, melyből azonnal látható, hogy a

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i}$$

sebesség az

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

helykoordinátájú pont időszerinti deriváltja. Ennek segítségével az impulzustételt felírhatjuk a következő alakban:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(k)} = M \mathbf{a}_0$$

ahol

$$\mathbf{a}_0 = \ddot{\mathbf{r}}_0 = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{\sum_i m_i}$$

Az $I_0 = M \mathbf{v}_0$ jelölés bevezetésével az impulzustétel fent megfogalmazott alakja írható a következőképpen:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(k)} = \frac{\Delta I_0}{\Delta t}$$

Ezzel dinamikailag sikerült a tömegpontokból álló rendszert egyetlen pont mozgásával jellemezni.

Tömegközéppont

Azt a pontot, melynek helyvektora

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

a rendszer tömegközéppontjának nevezzük. A tömegközéppont a mechanika egyik legfontosabb fogalma, így a hangsúlyosság kedvéért az $\mathbf{r}_0$ jelölés helyett gyakran az $\mathbf{r}_{TKP}$ jelölés használatos.

Tömegközéppont-tétel

A tömegközéppont-tétel kimondja, hogy bármely pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha benne volna egyesítve a rendszer össztömege, s rá a külső erők vektori összege hatna:

$$\mathbf{F}_e^{(k)} = M \mathbf{a}_{TKP} = M \ddot{\mathbf{r}}_{TKP}$$

A tétel egyenértékű az impulzustétel pontrendszerre megfogalmazott alakjával.

A fenti tételből következik az is, hogyha a külső erők eredője zérus, akkor

$$\frac{\Delta \mathbf{I}}{\Delta t} = \mathbf{0}, \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_{TKP} = \mathbf{0}$$

Ezekből az következik, hogy $\mathbf{I} = \text{állandó}$, illetve, hogy $\mathbf{v}_{TKP} = \text{állandó}$. Utóbbi következményt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy amennyiben a rendszerre ható külső erők eredője zérus, akkor a tömegközéppont nyugalomban marad vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

Perdülettel pontrendszerre

Az impulzustételhez hasonlóan a perdülettel is felírható a pontrendszer minden tagjára. Tekintsük ismét a két pontból álló rendszer esetét! Alkalmazzuk a rendszer minden pontjára az impulzustételt és szorozzuk meg vektoriálisan minden egyenletet balról annak a tömegpontnak a helyvektorával, amelyre az egyenlet vonatkozik. Így az

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{(k)} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} &= \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{I}}_1 \\ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{(k)} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} &= \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{I}}_2\end{aligned}$$

egyenletrendszerekhez jutunk. Adjuk össze ezeket az egyenleteket és vegyük figyelembe, hogy

$$\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{I}}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{I}_i), \quad (i = 1, 2)$$

Azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{(k)} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{(k)} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{I}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{I}_2)$$

Az egyenlet baloldalán álló első két tag a rendszerre ható külső erők forgatónyomatéka, a második kettő pedig a belső erők. A belső erők forgatónyomatékában erő és ellenerő forgatónyomatéka szerepel, ezért az

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12}$$

alakra hozható. Ez az összeg zérus, hiszen $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \parallel \mathbf{F}_{12}$ és emiatt vektoriális szorzatuk zérus.

Akárcsak a fenti esetben, akárhány tömegpontból állórendszerre igazolható, hogy a forgatónyomatékok összegéből a belső erők forgatónyomatékának összege kiesik, így a perdülettel a következő formában fogalmazható meg:

$$\sum_i \mathbf{M}_i^{(k)} = \frac{\Delta \mathbf{N}}{\Delta t}$$

Azaz, a pontrendszerre ható külső erők forgatónyomatékának vektori összege megegyezik a pontrendszer összimpulzusmomentum-változásának és az eltelt időnek a hányadosával.

A perdülettelből közvetlenül adódik, hogy ha a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékának összege zérus, akkor a rendszer impulzusmomentuma állandó:

$$\mathbf{N} = \text{állandó}$$

Tömegközépponttal megfogalmazva

A tömegközéppont fogalmának segítségével a pontrendszer mozgását globálisan sikerült egyetlen pont mozgásával jellemezni. Bár a Newton-törvények inerciarendszerben érvényesek, gyakran mégis célszerű a tömegközépponthoz rögzített koordináta-rendszer alkalmazása is. Ezért érdemes meghatározni a tömegközépponti koordináta-rendszeren s az inerciarendszerben felírt impulzusmomentum közti kapcsolatot. Az eredmény igen egyszerű, hiszen a teljes impulzusnyomaték két tagra esik szét:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_p + \mathbf{N}_s$$

Az

$$\mathbf{N}_p = \mathbf{r}_0 \times M \mathbf{v}_0$$

pálya-impulzusmomentum a rendszer globális mozgásából (a tömegközéppontban egyesített egyetlen pontként mozgó test impulzusmomentuma) származó perdület, az

$$\mathbf{L}_s = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

saját-impulzusmomentum pedig a tömegközépponthoz képest bekövetkező mozgásból származó járulék, ahol $\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i$ a tömegközépponti rendszerben megadott helyvektor, illetve sebesség. Vegyük észre, hogy az impulzusmomentum-tétel mind a pálya-, mind a saját-impulzusmomentumra vonatkozóan érvényes. Fennáll tehát, hogy

$$\frac{d\mathbf{N}_p}{dt} = \mathbf{r}_0 \times \sum \mathbf{F}^{(k)}$$

vagyis a tömegközéppont pálya-impulzusmomentumának időderiváltja megegyezik a rendszerre ható külső erők eredőjének forgatónyomatékával. Továbbá:

$$\frac{d\mathbf{N}_s}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i^{(k)}$$

vagyis a saját-impulzusmomentum időderiváltja megegyezik a külső erők tömegközéppontra vett forgatónyomatékával.

Az impulzusmomentum-tétel a tömegközépponti koordináta-rendszerben a tehetetlenségi erők figyelembevétele nélkül még akkor is érvényes, ha gyorsuló rendszerről van szó.

Munkatétel pontrendszerre

Az impulzustételhez és perdülettételhez hasonlóan érdemes megvizsgálni a pontrendszerre vonatkozó munkatételt is. A gondolatmenet eredménye ez, hogy a rendszerre ható erők munkáink algebrai összege megegyezik a rendszer mozgási energiájának megváltozásával, azaz

$$W^{(k)} + W^{(b)} = \Delta E_k$$

A mozgási energia megváltozásának meghatározásához tehát a belső erők unkáját is figyelembe kell venni.

A munkatétel egyszerű következménye az anyagi pontra vonatkozó munkatételnek. Nagyon fontos, hogy a rendszerre ható erők munkájának kiszámításakor általában minden erő esetén más és más elmozdulással kell számolni, ezért a munkák összege nem vezethető vissza az eredő erő munkájára. Ez az oka annak is, hogy a belső erők munkája általában nem zérus.

Zárt rendszerre vonatkozó tételek

Zárt rendszer fogalma

Azt a rendszert, amelyre ható külső erők eredője zérus, zárt rendszernek nevezzük.

Az impulzus-, perdület-, és munkatétel zárt rendszerre vonatkozó alakjai

Mivel nem hatnak a külső erők, így az impulzustételből és a perdülettételből azonnal következik, hogy zárt rendszer összimpulzusa és perdülete állandó.

A munkatétel zárt rendszerre vonatkozó alakjában a külső erők munkavégzése zérus, így a zárt rendszerre vonatkozó munkatétel alakja:

$$\Delta E_k = W^{(b)}$$

vagyis a kinetikus energia megváltozása egyenlő a zárt rendszer belső erőinek munkájával.

Ütközések

Ütközésről általában akkor beszélünk, ha két test között rövid ideig tartó olyan erős kölcsönhatás lép fel, hogy az egyéberőhatások elhanyagolhatók. Általában feltételezzük, hogy ütközéskor a testek egyetlen pontban érintkeznek, s e pontban a két testhez közös érintősík húzható. A közös érintősíkra az érintkezési pontban állított merőlegest ütközési normálisnak nevezzük, jele n .

Centrálisnak nevezzük az ütközést, ha az ütközési normális átmegy mindkét test tömegközéppontján.

Egyenes ütközésről akkor beszélünk, ha az ütköző testek mindegyikének sebessége az ütközési normálisba esik.

Centrális, egyenes ütközés során az ütköző testek ütközés előtti és utáni sebességvektorai a két test tömegközéppontját összekötő egyenes irányába mutatnak.

Ütközések leírása megmaradási tételekkel

Jelöljük az ütközésben részt vevő két test tömegét rendre m_1 -el és m_2 -vel, ütközés előtti sebességét v_1 -el és v_2 -vel, az ütközés utáni pedig u_1 -el és u_2 -vel. Ha az ütközés nagyon rövid τ ideig tart, akkor az ütközés során fellépő igen nagy belső erők mellett a külső erők elhanyagolhatók, tehát az ütközés folyamatára minden esetben felírható az impulzus-megmaradás törvénye, amely szerint a két test ütközés előtti összimpulzusa megegyezik az ütközés utáni összimpulzussal:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

Az ütközéseket a mechanikai energia megmaradása szempontjából is osztályozhatjuk. Tökéletesen rugalmasnak nevezzük az ütközést, ha az ütközés előtti és utáni mozgási energiák megegyeznek. Pontszerűnek tekinthető testekre:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Olyan esetben, amikor az ütközés során a belső erők által végzett munka a rendszer kezdeti mozgási energiáját csökkenti, az ütközést rugalmatlan ütközésnek nevezzük. Ha az ütközés során a két test összekapcsolódik, és ütközés után közös lesz a sebességük, akkor az ütközést tökéletesen rugalmatlannak nevezzük.

Tökéletesen rugalmas ütközések

Rugós ütközővel ellátott, súrlódásmentes sínen mozgó kocsik ütközése jó közelítéssel tökéletesen rugalmasnak és centrálisnak tekinthető. Mivel az ütköző testek sebességvektora egy egyenesbe esik, ezért a megmaradási tételek jóval egyszerűbb alakban is írhatók:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \end{aligned}$$

A fenti összefüggéseket átrendezve:

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 - v_2) \\ m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) &= m_2(u_2 - v_2)(u_2 + v_2) \end{aligned}$$

A második egyenlettel az első elosztva azt kapjuk, hogy

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2$$

Az így adódó lineáris egyenletrendszer a következő:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) \\ v_1 + u_1 = u_2 + v_2 \end{cases}$$

Ebből az ütközés utáni sebességekre az alábbi összefüggéseket nyerjük:

$$u_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_2$$

$$u_2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_2 + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_1$$

Rugalmatlan ütközések

Két test tökéletesen rugalmatlan ütközéskor a két test ütközés után közös sebességgel (u) mozog tovább. Ez a sebesség az impulzus-megmaradást kifejező egyenletből:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Az ütközés során fellépő ΔE energiaveszteség:

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$$

Ez utóbbi egyenlethez fölhasználva a közös sebességre adott összefüggést:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{(m_1 m_2)}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

A fenti formulából látszik az is, hogy az energiaveszteség adott sebességek és tömegek mellett akkor a legnagyobb, ha a két sebességvektor egymással szembe mutat. A mozgási energiaveszteség legtöbbször hő-, illetve deformációs energiaként jelenik meg.

Ballisztikus inga

A ballisztikus inga a fegyverlövédék sebességének meghatározására szolgáló igen egyszerű eszköz. Felépítése a következő: l hosszúságú fonállal M tömegű homokzsákot függesztünk fel. A fegyvergolyó sebességének megmérésehez az m tömegű, v sebességgel haladó lövedéket a homokzsákba lőjük, és ekkor a zsák a lövedék haladási irányával megegyező irányba kilendül. A kilendülést jellemezhetjük a függesztő fonalnak függőlegestől φ szöggel való eltéréssel, illetve a homokzsák aljának eredeti helyzetétől való h magasságba emelkedésével.

A golyó becsapódását a homokzsákba tekinthetjük tökéletesen rugalmatlan ütközésnek. Ekkor a pontrendszer ütközés utáni sebessége c lesz. Erre fölírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$mv = (m + M)c$$

$$\frac{1}{2}(m + M)c^2 = (m + M)gh = gl(1 - \cos \varphi)$$

Tehát:

$$\left(\frac{m}{m + M}\right)^2 v^2 = 2gl(1 - \cos \varphi)$$

ahonnan

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gl} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Rakéta mozgása

A rakétamozgás szemléltetésére alkalmas az a kísérlet, melynek során egy M tömegű kiskocsira rögzített rugó elé, – melyet összenyomott állapotban cérnával összekötünk – Δm tömegű golyót helyezünk. A cérna elégetésekor a rugó a golyót leröpíti, és a kocsi az ellenétes irányba indul.

Az M tömegű kiskocsira helyezett Δm tömegű testet a kocsihoz képest c sebességgel kilöve, a kiskocsi Δv sebességre tesz szert. A rendszerre érvényes az impulzus-megmaradás törvénye, vagyis a kezdeti és a szétlökődés utáni impulzusoknak egyezniük kell:

$$0 = M\Delta v + \Delta mc$$

Innen a kiskocsi sebességnövekedése

$$\Delta v = -\frac{\Delta m}{M}c$$

adódik.

A klasszikus rakéták úgy működnek, hogy az üzemanyag elégetésekor a fűvókán nagy sebességgel kiáramló gáz a rendszerből impulzust visz el, és így a rakétatest az impulzus-megmaradás törvényének megfelelően ellentétes irányba mozdul el.

A fenti összefüggés alapján meghatározható a rakéta sebessége az idő függvényében. Határozzuk meg a $v(t)$ sebességgel mozgó, $m(t)$ tömegű rakéta sebességének Δt idő alatt bekövetkező növekedését a vele együtt mozgó inerciarendszerhez képest. Legyen az üzemanyag sebessége a rakétatesthez képest c . Mivel számértékileg az egységnyi idő alatt kilövellt üzemanyag a rakéta tömegével az

$$\dot{m} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

alakban fejezhető ki, a rakétatest sebességének növekedése az impulzus-megmaradás törvénye szerint

$$\Delta v = -\frac{\Delta m}{m(t)}c = -\frac{m(t)\Delta t}{m(t)}c$$

Mivel

$$\frac{d}{dt} [\ln m(t)] = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}$$

a kezdetben m_0 tömegű rakéta sebességének növekedése

$$v(t) - v(0) = -c \ln \frac{m(t)}{m_0} = c \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

Ebből az adódik, hogy a kezdősebesség nélkül induló rakéta által elérhető maximális sebesség:

$$v_{\max} = c \ln \left(\frac{m_h + m_{\bar{u}}}{m_h} \right) = c \ln \kappa$$

ahol m_h a hasznos, $m_{\bar{u}}$ az üzemanyag tömegét jelöli, $\kappa = (m_h + m_{\bar{u}})/m_h$ a rakétára jellemző úgynevezett tömegarány. A rakéták sebességének tehát határt szab az üzemanyag tömegének és a hasznos tömegnek az aránya. Ez az arány bizonyos határon túl csak úgy javítható, hogy ha a rakétáról leválasztják az üres és feleslegessé vált üzemanyagtartályokat. Ezeket a rakétákat, ahol az eredetileg fellőtt rakéta további önálló rakétákat hordoz, többfokozatú rakétáknak nevezzük.

7.) Merev testek mechanikája

Szabadsági fok fogalma

Merev testnek nevezzük azt a testet, amelyre fennáll, hogy bármely két pontjának távolsága állandó.

A merev test helyzetét három, nem egy egyenesbe eső pontjának koordinátaival jellemezhetjük. A merev test egy A pontjának rögzítése után a test többi pontjai a rögzített pont körüli gömbfelületen mozoghatnak. Ha a testnek egy másik B pontját is rögzítjük, akkor a test az A és B ponton átmenő tengely körül még elfordulhat. A tengelynek az egyenesen kívül fekvő, egyébként tetszőleges harmadik, C pontjának rögzítésével már az egész test helyzete meghatározott.

A három pont helyének megadásához kilenc adat (koordináta) szükséges. A merev kötés miatt azonban ezek között három összefüggést írhatunk fel; például azt, hogy a három pont közül bármely kettőnek a távolsága állandó.

Mivel a kilenc adat közül három nem független, a merev test helyzete általában 6 független adattal jellemezhető, más szóval a szabad merev testnek $f = 6$ szabadsági foka van. Speciális mozgások esetén (pl.: síkmozgás, tengely körüli forgás) a merev test mozgásának jellemzésére hatnál kevesebb koordináta is elegendő.

Síkmozgás

Merev test mozgását akkor tekinthetjük ismertnek, ha a test bármelyik pontja esetében tudjuk, hogy hol található adott időpillanatban. Más szóval minden P pont esetén ismert a pont helyzetét időben megadó $r_P = r_P(t)$ függvény. Merev test esetén nem szükséges annyi pályafüggvényt ismerni, ahány pontból a test áll. A merev test bármilyen mozgása két alapvető mozgásra – haladó (transzlációs) és forgó (rotációs) mozgásra – vezethető vissza.

Transzlációs mozgásról akkor beszélünk, amikor a test bármely két, egymással nem párhuzamos szakasza a mozgás során külön-külön önmagával párhuzamos marad. Ebben az esetben a merev test pontjainak pályái egybevágó görbék.

A merev test forgómozgást végez, ha van legalább két pontja, amely a mozgás során helyben marad. A két pontot összekötő egyenes a forgástengely, amely körül a merev test tengelyen kívül fekvő pontjai körmozgást végeznek.

A merev test mozgásának fontos speciális esete a síkmozgás. Síkmozgásról akkor beszélünk, ha a merev test pontjai a térben rögzített síkkal párhuzamos síkokban mozognak. Nyilvánvaló, hogy a merev test mint egész ebben az esetben úgy mozog, mint a rögzített síkkal párhuzamos valamely síkmetszete. A síkmetszet mozgása viszont teljes értékűen helyettesíthető a síkmetszet tetszőleges két pontjának illetve az ezeket összekötő szakasznak a mozgásával.

A síkmozgás kapcsán igazoljuk, hogy tetszőleges síkbeli mozgás megvalósítható egyetlen transzlációval és azt követő rotációval. Síkmozgás esetén mindig található a merev testen vagy a merev testtel együtt mozgó síkon olyan $O = O'$ pont, amely a mozgás kezdő- és vég-helyzetében is ugyanott marad. Belátható, hogy a testnek az adott mozgása ekkor megvalósítható az O körüli egyetlen forgatással. A forgástengely a következőképpen határozható meg. Tegyük fel, hogy a merev test mozgása során az AB szakasz a kezdeti helyzetéből az $A'B'$ helyzetbe kerül. Húzzuk meg az AA' és BB' szakaszok felező merőlegesét és keressük meg O metszéspontjukat. (Ha a két egyenes párhuzamos, akkor a síkmozgás egyetlen transzlációval adható meg.) Az AOB Δ egybevágó az $A'OB'$ Δ -gel, mert a két háromszög megfelelő oldalai

egyenlők. Ezért az $AOA' \angle = BOB' \angle$, ami bizonyítja, hogy ha a testet úgy forgatjuk el O körül, hogy A az A' -be kerüljön, akkor B a B' -be kerül.

A síkmozgást végző test rövid Δt ideig tartó mozgása során az $AOA' \angle = BOB' \angle = \Delta\varphi$ szögelfordulás kicsiny. Az A és B pont elmozdulásvektora az O forgáspontokhoz húzott szakkasokkal ($90^\circ - \Delta\varphi/2$) szöget zár be. $\Delta\varphi \rightarrow 0$ esetén az O pontok sorozata olyan M ponthoz tart, amely az adott pillanatban jellemzi a mozgást. Az M pontot pillanatnyi forgáspontnak (momentán centrumnak) nevezzük. A pillanatnyi forgáspontból nézve a merev test minden pontja körmozgást végez és az adott pillanatban a test bármely pontjának sebességvektora merőleges az M -ből a ponthoz húzott sugárra. A merev test síkmozgása során a pillanatnyi forgáspont helye a síkon változik.

Sztatika

Merev test egyensúlyának feltétele

Hasson a merev testre N számú $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$ külső erő, rendre $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ támadáspontban. Írjuk fel a testre a pontrendszerre vonatkozó tömegközéppont- és impulzusmomentum-tételt tömegközépponti koordinátarendszerben:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \right)$$

Legyen a merev test egyensúlyban, ekkor bármelyik $\mathbf{v}_i$ pontjának sebessége zérus, így az egyensúly szükséges feltétele a

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

egyenletek teljesülése. A feltételek teljesülése szükséges feltétele a nyugalmi helyzetnek, de a feltételek önmagukban nem zárják ki annak a lehetőségét, hogy a test a tömegközéppontján átmenő tengely körül egyenletes sebességgel forogjon, illetve, hogy a tömegközéppont egyenes vonalú egyenletes mozgást végezzen.

Forgatónyomaték transzformációja

Valami lamentálás kéne elé, mert ez így snassz...



$$\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i (\mathbf{r}_O + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_O \times \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_O \times \sum_i \mathbf{F}_i + \mathbf{M}'_O}$$

ábra

A fentiekből következik, hogy

Ha $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O$

Ha egyensúly áll fenn, és $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O = \mathbf{0}$

Állítás: Az erő hatásvonalára mentén eltolható nyomatékának változása nélkül.

$$\mathbf{M}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + [\mathbf{r}' - \mathbf{r}]) \times \mathbf{F} = \underbrace{\mathbf{r} \times \mathbf{F}}_M + \underbrace{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathbf{F}}_O$$

Egyensúlyi feltétel két, három erő esetén (példák)

Az egyensúlyi feltétele két erő esetén az, hogy a két erő **eredőjének forgatónyomatéka zérus legyen. Ezt szemléletesebben is meg lehet fogalmazni, mégpedig azáltal, hogy az erők hatásvonalaira kikötést teszünk...**

Három erő esetén a feltétel az, hogy a harmadik erő hatásvonala át kell menjen a két erő hatásvonalának metszéspontján.

Erőpár

Vegyünk olyan, két erőből álló erőpárt, amelyben az erők vektori összege zérus, de a két erő hatásvonala nem esik egy egyenesbe (**ábra**). Az erőpárnak adott O pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$M = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 = (r_1 - r_2) \times F = d \times F \neq 0$$

és független az O pont választásától. Mivel a két erő vektori összege zérus, az összegvektor nyomatéka is mindig zérus. Az erőpár tehát nem helyettesíthető egyetlen erővel.

Helyettesítő erőrendszerek

Az előzőekben láttuk, hogy nem minden erőrendszer (pl. erőpár) helyettesíthető egyetlen eredő erővel. Igazolható viszont, hogy bármely erőrendszer helyettesíthető egyetlen erővel és egy erőpárral. Vegyük a vizsgált erőrendszert és válasszunk a térben egy r_0 helyvektorú O pontot. Adjuk hozzá az erőrendszer minden tagjához az O vonatkoztatási pontban támadó F_i és $-F_i$ erőket (**ábra**). Ezáltal nem változik sem az eredő erő, sem az O pontra vonatkozó forgatónyomaték. Az r_i helyvektorú F_i és az O -ban támadó $-F_i$ erőkből álló erőpárnak csak forgatónyomatéka van. A megmaradó erők hatása egyetlen, O -ban támadó F erővel helyettesíthető, ahol

$$F = \sum_{i=1}^N F_i$$

Síkbeli erőrendszer eredője

Foglalkozzunk először két erőből álló, síkbeli erőrendszerrel. Az **ábrán** látható módon adjunk az erőrendszerhez nulla erőt és nulla nyomatékot szolgáltató $F_0, -F_0$ erőpárt. Az így előálló erőrendszerben az erők hatásvonala már metszi egymást (kivéve, ha $F_1 = -F_2$). A helyettesítő erő paralelogramma-módszerrel megszerkeszthető. Az eljárás során az eredő erő hatásvonalának egy pontját kapjuk meg. Az **ábra** alapján meghatározzuk a hatásvonal és a két támadási pontot összekötő szakasz $r_{1,2}$ metszéspontját. Az ábrán látható háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{F_0}{F_1} = \frac{l_1}{h}, \quad \frac{F_0}{F_2} = \frac{l_2}{h}$$

és ebből adódik, hogy

$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

Mivel

$$r_{1,2} = r_1 + \frac{l_1}{l_1 + l_2} (r_2 - r_1) = \frac{l_2 r_1 + l_1 r_2}{l_1 + l_2}$$

ezért a fent adódott egyenlet felhasználásával a hatásvonalak és az $(r_2 - r_1)$ vektornak a metszéspontjára az

$$r_{1,2} = \frac{F_1 r_1 + F_2 r_2}{F_1 + F_2}$$

összefüggést nyerjük. Eszerint az eredő erő hatásvonala a két támadáspontot összekötő szakaszt olyan $r_{1,2}$ pontban metszi, amelynek helyvektora az összetevők támadáspontjába húzott helyvektoroknak az erők abszolút értékével „súlyozott” számtani közepe. Ezt a pontot az r_1, r_2 támadáspontú, párhuzamos F_1, F_2 erők centrumának nevezzük.

Párhuzamos erőrendszer

Az eljárás tetszőleges számú, az e egységvektorral párhuzamos erőre általánosítható. Az $(r_1, F_1 e), (r_2, F_2 e), \dots, (r_N, F_N e)$ erőrendszer eredője a következőképpen határozható meg. Válasszuk ki az $(r_1, F_1 e)$ és az $(r_2, F_2 e)$ erőt. Megmutattuk, hogy e két erő eredőjének hatásvonala átmegy az $r_{1,2}$ helyvektorú ponton, azaz a két erő erőcentrumán. Több párhuzamos erő esetén az előző eljárást úgy folytathatjuk, hogy a két párhuzamos erőt a kettejük erőcentrumában ható $F_{1,2} = F_1 + F_2$ eredő erővel helyettesítjük, és az előbbi gondolatmenettel meghatározzuk az $F_{1,2}$ és F_3 erők centrumát. A három erő erőcentruma az $r_{1,2}$ és r_3 közti szakaszon az

$$r_{1,2,3} = \frac{F_{1,2} r_{1,2} + F_3 r_3}{F_{1,2} + F_3}$$

helyen található. Az $r_{1,2}$ -re adott összefüggés és az $F_{1,2} = F_1 + F_2$ felhasználásával

$$r_{1,2,3} = \frac{F_1 r_1 + F_2 r_2 + F_3 r_3}{F_1 + F_2 + F_3}$$

alakban adható meg. Az eljárást ismételve, az N párhuzamos erő centrumára az

$$r_{1,2,3,\dots,N} = r_0 = \frac{F_1 r_1 + F_2 r_2 + F_3 r_3 + \dots + F_N r_N}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_N} = \frac{\sum_{i=1}^N F_i r_i}{\sum_{i=1}^N F_i}$$

eredményt kapjuk. Az ebben a pontban támadó

$$F = \left(\sum_{i=1}^N F_i \right) e$$

erő a párhuzamos erőrendszer eredője. Az r_0 helyvektorral definiált erőcentrum tehát az a pont, amelyben a rögzített támadáspontú párhuzamos erők eredője támad. Az eredő erő iránya megegyezik az összetevő erők irányával, abszolút értéke pedig az összetevők abszolút értékének összegével egyenlő.

Az erőcentrum helye nem változik meg, ha a párhuzamos erőrendszer minden összetevőjét ugyanakkora szöggel elforgatjuk eredeti irányától, mert a merev test pontjait jellemző helyvektorok és az erők abszolút értékei változatlanok maradnak. Az erőcentrum a párhuzamos erők eredőjének a merev testhez rögzíthető támadáspontja.

Súlypont fogalma, kapcsolata a tömegközépponttal

Az előző pontban tárgyalt párhuzamos erőrendszer fontos speciális esete a testek minden pontjára ható nehézségi erőrendszer. A Föld adott pontján a nehézségi erő iránya határozza meg a függőlegest. (A függőön fonala ezt az irányt mutatja.) Gondolatban osszuk fel a merev testet kicsiny m_i tömegű részekre (ábra). Ezek mindegyikére $F_i = m_i g_i$ nehézségi erő hat.

Nem túlságosan nagy méretű test esetén a nehézségi erők párhuzamosaknak tekinthetők ($\mathbf{g}_i = g_i \mathbf{e}$). Ily módon a párhuzamos erőrendszer centruma definíció alapján:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum_i F_i \mathbf{r}_i}{\sum_i F_i} = \frac{\sum_i m_i g_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i g_i}$$

Mivel adott helyen a nehézségi gyorsulás értéke – kis tartományon belül – minden tömegrészre ugyanakkora ($g_i = g$), a nehézségi erők centrumát jellemző helyvektor a test tömegközéppontjának helyvektorával egyezik meg:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_s = \frac{\sum_i m_i g_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i g_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \mathbf{r}_{TKP}, \quad F_{neh} = \left(\sum_i m_i \right) g$$

A nehézségi erők centrumát súlypontnak nevezzük. Fenti megszorítások mellett a súlypont és a tömegközéppont egybeesik. Ha a merev testet meghatározott P pontjában felfüggesztjük vagy alátámasztjuk, akkor a test olyan helyzetet vesz fel, hogy a P pontban ébredő K kényszererő és a testre ható nehézségi erők eredője egyensúlyt tart. Mind a kényszererő, mind a nehézségi erő hatásvonala átmegy a P ponton. Ezért a test S súlypontja rajta van a P ponton átmenő $s(P)$ függőleges egyenesen. Az $s(P)$ egyenest a merev test súlyvonalának nevezzük. A különböző pontokon átmenő súlyvonalak mindig a súlypontban metszik egymást.

A tömegközéppont és a súlypont helye homogén gravitációs térben megegyezik. Fogalmilag azonban természetesen különböznek egymástól. A súlypont a földi nehézségi erőterhez kötött fogalom, a tömegközéppont viszont mindig létezik.

Dinamika

Kinetikus energia tengely körüli forgásnál

A forgómozgás alapegyenletéhez egyszerűen eljuthatunk a rögzített tengely körül forgó merev test mozgási energiájának vizsgálatával is. A test pontjai a tengelyre merőleges síkokban körpályán mozognak. Az i -edik, m_i tömegű rész mozgási energiája:

$$E_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (l_i \omega)^2$$

ahol l_i a tömegpont forgástengelytől mért távolsága, ω a merev test pillanatnyi szögsebessége. A merev test forgási energiája az egyes részek mozgási energiájának összegével egyenlő, tehát

$$E_k = \sum_i E_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i l_i^2$$

Tehetetlenségi nyomaték és tulajdonságai

Az energia-kifejezésben szereplő összeg a merev testnek az adott tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \sum_i m_i l_i^2$$

amelynek segítségével a forgómozgás energiája az

$$E_k = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$$

alakban írható fel. Nagy tehetetlenségi nyomatékú, gyorsan forgó testek (lendkerék, pörgettyű) tetemes mozgási energiával rendelkeznek, ezért a gyakorlatban energiatárolóként is használják őket.

A forgómozgás dinamikai leírása során a tehetetlenségi nyomaték a tehetetlenség mértékének szerepét játssza. Értéke a test tengelyhez viszonyított tömegeloszlásától függ. A tehetetlenségi nyomaték konkrét meghatározása sokszor visszavezethető egyszerűbb, könnyen számolható esetekre az alábbi tételek alapján.

Addíciós tétel

Közös tengelyű testek összes tehetetlenségi nyomatéka az egyes testek tehetetlenségi nyomatékainak összegével egyenlő:

$$\Theta = \sum_i \Theta_i$$

Lapítási tétel

A test tehetetlenségi nyomatéka nem változik meg, ha a test pontjait a tengellyel párhuzamosan eltoljuk (pl. egy hengert gondolatban változatlan sugarú körlappá lapítunk). Eszerint például egyenlő tömegű és sugarú homogén henger, korong és körlap tehetetlenségi nyomatéka egyenlő.

Steiner tétele

A tétel a párhuzamos tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékok között állapít meg összefüggést. Két olyan párhuzamos tengelyre vonatkozik, amelyek közül az egyik a tömegközépponton megy át, a másik egy adott P ponton. Legyen a két tengely távolsága d , a merev test tömege m , a tehetetlenségi nyomatékok Θ_{TKP} és Θ_P . A tétel állítása:

$$\Theta_P = \Theta_{TKP} + md^2$$

A bizonyításhoz tekintsük az **ábrát**. A tömegközépponton és a P ponton átmenő párhuzamos tengelyek irányában vegyük fel a két koordináta-rendszer z és z' tengelyeit. Az x és x' tengelyek pedig essenek a tömegközéppontból a z' tengelyre állított merőleges irányába. A tehetetlenségi nyomaték definíciója szerint a két tengelyre vett nyomatékok:

$$\Theta_{TKP} = \sum_i m_i l_i^2, \quad \Theta_P = \sum_i m_i l'_i{}^2$$

ahol l_i , illetve l'_i a merev test i -edik pontjának a két tengelytől mért távolsága:

$$l_i^2 = x_i^2 + y_i^2, \quad l'_i{}^2 = (x_i - d)^2 + y_i^2$$

Ezek alapján a P ponton átmenő tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték a következőképpen adható meg:

$$\Theta_P = \sum_i m_i [(x_i - d)^2 + y_i^2] = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + d^2 \sum_i m_i - 2d \sum_i m_i x_i$$

Az utolsó tagban szereplő $\sum_i m_i x_i$ összeg zérus, mivel a merev test tömegközéppontjának x koordinátája a K koordináta-rendszerben $0 = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$. (A tömegközéppont a szóban forgó koordináta-rendszer origója.) A fenti összefüggésben a jobb oldal első tagja a tömegközépponton átmenő tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték, a második tag pedig a merev test össztömegének és a tengelyek közötti távolság négyzetének szorzata, tehát

$$\Theta_P = \Theta_{TKP} + md^2$$

A Steiner-tételből következik, hogy az egymással párhuzamos tengelyekre vett tehetetlenségi nyomatékok közül a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték a legkisebb.

Folytonos tömegeloszlású testek tehetetlenségi nyomatékának meghatározásakor a vizsgált testet kicsiny részekre bontjuk és az egyes tömegelemekhez tartozó tehetetlenségi nyomatékokat összegezzük.

A sűrűségeloszlás ismeretében a test teljes térfogatára vett

$$\Theta = \sum_i l_i^2 \Delta m_i = \sum_i l_i^2 \rho_i \Delta V_i$$

összegzés a tehetetlenségi nyomaték közelítő értékét adja meg. $\Delta V_i \rightarrow 0$ és $i \rightarrow \infty$ esetén előálló határérték az adott tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték, amelyet az

$$\int_V \rho(r) l^2(r) dV(r) = \lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_i l_i^2 \rho_i \Delta V_i$$

szimbólummal jelölünk.

A forgó mozgás alapegyenlete

A munkatétel szerint a pontrendszer mozgási energiájának a megváltozása egyenlő a rendszerre ható összes erő munkájának összegével. Tengely körül forgó merev test elemi szögelfordulása során a testre ható erők munkája:

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F \cdot r \Delta \varphi \cos \varphi = Fk \Delta \varphi = M \Delta \varphi$$

Az elemi munka tehát a forgatónyomaték és az elemi szögelfordulás szorzatával egyenlő. (A merev testre ható erőknek csak a tengelyre merőleges síkba eső komponensét vettük figyelembe, mert a tengellyel párhuzamos összetevők munkája a forgás során nulla.)

Alkalmazzuk a munkatételt a forgó merev testre:

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

A tehetetlenségi nyomatékra vonatkozó egyenletek felhasználásával ez a következő alakban írható:

$$\Theta \omega \left(\frac{d\omega}{dt} \right) = M \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = M \omega$$

illetve

$$M = \Theta \beta = \Theta \ddot{\varphi}$$

A rögzített tengely körüli forgás $M = \Theta \beta$ alapegyenlete szerint tehát a merev testre ható erők tengelyre vonatkoztatott forgatónyomatéka egyenlő a test forgástengelyre vett Θ tehetetlenségi nyomatékának és β szöggyorsulásának szorzatával.

Ha a külső erők forgástengelyre vonatkozó eredő forgatónyomatéka nulla, akkor a merev test állandó szögsebességgel forog a tengely körül, miközben a $\Theta \omega$ forgásmennyiség időben állandó. Ez a forgásmennyiség megmaradásának törvénye. A $\Theta \omega$ forgásmennyiség abban az esetben is megmarad, amikor a tengely körül forgó test nem merev. Ha a belső erők hatására a tehetetlenségi nyomaték megváltozik, akkor a szögsebesség is megváltozik úgy, hogy a $\Theta \omega$ szorzat állandó marad.

Impulzusmomentum forgó mozgásnál

Ide tartozik egy nagyon fain kis ábra.

Persze magyarázó szövegelés is van. Olyanokról szól, hogy a perdület vektor az tengelyirányú, ha a test a forgástengelyre szimmetrikus. Ha meg nem az, akkor bonyolultság van, ami elvileg nem tananyag, de szóval precesszió.

Meg pár egyenlet:

$$\begin{aligned} N &= r \times mv \\ |N| &= |r| \cdot m|v| \\ |N_{tengely}| &= |N| \cdot \sin \alpha = \underbrace{|r| \sin \alpha}_l \cdot m\omega \underbrace{|r| \sin \alpha}_l = (ml^2)\omega \\ |N_{tengely}| &= \Theta\omega \end{aligned}$$

Tiszta gördülés

A merev testek síkmozgása gyakran gördülés. Gördüléskor a mozgó test határgörbéje mindig valamilyen előírt görbére esik. Ennek a mozgásnak fontos, speciális esete a tiszta gördülés. Tiszta gördülésről akkor beszélünk, amikor a „lefedett” pályaszakasz hossza egyenlő a test kerületének azon ívdarabjával, amely érintkezésbe került a pályaszakasszal. Ekkor a test kerületi pontjának és a pályának az érintkezési pontja azonos sebességgel mozog. Foglalkozunk a síkon gördülő R sugarú korong mozgásával (ábra)! A korong sebessége a translációs és a forgási sebesség összegeként állítható elő:

$$v_P = v_0 + \omega_0 \times R_P$$

Mivel tiszta gördüléskor a korong talajjal érintkező pontjának nincs a talajhoz képest sebessége: $v_M = v_0 + \omega_0 \times R_M = 0$, ahonnan $v_0 = -\omega_0 \times R_M$ adódik.

Az, hogy a korong talajjal érintkező pontjának a sebessége zérus, egyben azt jelenti, hogy minden időpillanatban ez a pont a pillanatnyi forgáspont.

A tiszta gördülés esetén $v_P = \omega_0 \times (R_P - R_M) = \omega_0 \times r_P$, ahonnan látható, hogy a P pont M körüli ω_0 szögsebességű körmozgást végez.

A merev test mozgásának kinematikai leírása során megállapítottuk, hogy a síkmozgás mindig előállítható egymást követő elemi forgásokból, azaz minden pillanatban tiszta forgásnak is tekinthető. Így elegendő a forgómozgás alapegyenletét felírni. Nem szabad azonban megfedkezünk arról, hogy a pillanatnyi forgástengelyen kijelölt pont – bár sebessége zérus – általában gyorsuló mozgást végez. Ilyen esetekben a forgómozgás alapegyenletének felírásakor figyelembe kell venni a tehetetlenségi erők forgatónyomatékát is.

Torziós rezgések

A vázolt kísérletben, kifeszített acélszálla korongot erősítettünk. A korong peremére gyakorolt erőpár hatására a korong és vele együtt az acéldrót elfordul (ábra). Nem túlságosan nagy elfordulási szögek esetén a torziós szál visszatérítő nyomatéka egyenesen arányos a szöggel. Ha a korongot elcsavarjuk és magára hagyjuk, periodikus mozgást végez a torziós szál mint forgástengely körül. A tapasztalat szerint a visszatérítő nyomaték:

$$M = -D^* \varphi$$

ahol φ az elfordulás szöge, D^* a szálla jellemző együttható (régábbi neve: direkciós forgatónyomaték; SI-szabvány szerinti neve csavarási rugómerevség, jele: c_φ), a negatív előjel pedig a szögkitéréssel ellentétes irányra utal. Ezt az összefüggést lineáris forgatónyomaték-törvénynek nevezzük.

A forgatónyomaték ismeretében írjuk fel a rögzített tengely körüli mozgás alapegyenletét:

$$\Theta \ddot{\varphi} = -D^* \varphi$$

(Θ ebben a kísérleti összeállításban a korong tehetetlenségi nyomatéka a korong síkjára merőleges szimmetriatengelyre vonatkoztatva.) A mostani egyenlet ugyanolyan típusú, mint amilyen a harmonikus rezgőmozgás dinamikai leírásakor már foglalkoztunk. Lineáris forgatónyomaték hatására harmonikus forgási rezgést végez a test, tehát a mozgást leíró függvény a következő alakban adható meg:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\Omega t + \delta)$$

ahol φ_0 a forgási rezgés amplitúdója, δ a kezdőfázis, Ω a dinamikai adatokkal meghatározott körfrekvencia:

$$\Omega = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$$

Az amplitúdó és a kezdőfázis értékét a kezdeti feltételek határozzák meg, a harmonikus rezgőmozgás tárgyalásakor megismert módon. A forgási rezgés periódusideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}$$

A fenti képlet alapján D^* ismeretében, lengésidőméréseivel meghatározhatjuk a torziós szárhoz vagy spirálrugóhoz rögzített test tehetetlenségi nyomatékát, vagy Θ ismeretében a D^* -ot.

Fizikai inga

Fizikai ingának olyan merev testet nevezünk, amely rögzített tengely körül a nehézségi erő hatására lengőmozgást végezhet. Az **ábra** fizikai ingát mutat. Az ábrán T a forgástengely és az ábra síkjának dőléspontját jelöli, S a merev test súlypontja, s a súlypontnak a forgástengelytől mért távolsága, φ a TS egyenes elfordulási szöge.

A testre ható nehézségi erő forgatónyomatéka:

$$M = -mgs \sin \varphi = \Theta \ddot{\varphi}$$

Ha a kitérés szöge $\varphi \ll 1$ rad, akkorsin $\varphi \approx \sin \varphi$, tehát a forgatónyomaték a lineáris forgatónyomaték-törvénynek tesz eleget: $M = -mgs\varphi$ és $D^* = mgs$.

A fizikai inga kis kitérések esetén közelítőleg harmonikus mozgást végez, amelynek lengés-ideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}$$

(Itt Θ a merev testnek a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka, m a test tömege, s a súlypontnak a forgástengelytől mért távolsága.)

8.) Folyadékok és gázok mechanikája

Folyadékok általános tulajdonságai

A folyadékok térfogatartók, vagyis igen nagy erővel is csak kis mértékben nyomhatók össze. Az összenyomhatósággal kapcsolatban tapasztalat, hogy a térfogatcsökkenés egyenesen arányos a test térfogatával és a testre gyakorolt nyomás Δp változásával:

$$\Delta V = -\kappa V \Delta p$$

ahonnan

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\Delta V}{\Delta p} \right)$$

A fenti összefüggésben κ anyagi jellemző, az úgynevezett kompresszibilitási együttható. Számértéke megadja, hogy egységnyi nyomásnövekedés hatására mekkora relatív térfogatcsökkenés lép fel. A kompresszibilitási együttható helyett gyakran a reciprokát, a $K = 1/\kappa$ kompressziós modulust használjuk, amelynek SI-egysége a Pa. Ez az anyagjellemző a test összenyomással szembeni ellenállását jellemzi.

Emellett a folyadékok könnyen önthetők, és mindig fölveszik a tartóedény alakját. Mindezen tulajdonságok értelmezhetők, ha a folyadékreszecskeket egymáson könnyen elgördülő gölyökként fogjuk fel, amelyek között érintőleges, azaz nyíróerők nincsenek, egymásra csak merőleges irányú erőt fejtenek ki.

A nyírási erők hiányával magyarázható a nagyfokú gördülékenység, amelynek többek között az az eredménye, hogy a nyugvó folyadék szabad felszíne a nehézségi erő és a folyadékreszkek között ható erők összhatásaként vízszintes.

Az olyan folyadékot, amelyben a folyadékreszkek egymáshoz viszonyított elmozdulása során sem hat súrlódási erő, ideális folyadéknak nevezzük.

Belső súrlódási együttható

Még a sűrűn folyó, mézszerű folyadékban sem ébrednek nyíróerők, ha a folyadékreszkek egymáshoz viszonyítva nem mozognak el. Amikor azonban relatív sebességük nem nulla, a részek közötti belső súrlódási erő sok esetben már nem elhanyagolható.

Párhuzamos lemezek közötti folyadék áramlása során, ha az egyik lemez rögzített, a másik pedig állandó sebességgel mozog (36.1. ábra), a folyadékreszkek hozzátapadnak az üveglapokhoz, így a felső laphoz tapadó folyadék réteg sebessége a legnagyobb, és az alsó lemez felé haladva a lapokkal párhuzamos folyadék rétegek sebessége csökken. Az alsó lapon levő réteg sebessége nulla. Azt mondjuk, hogy az áramlásra merőleges irányban a sebességnek gradiense van (a sebesség változik a keresztmetszet mentén). Ha az előbbi kísérletben a felső laphoz dinamométert iktatunk, megmérhetjük a belső súrlódási erőt. Praktikusabban megvalósított kísérletek mérési eredményei szerint a belső súrlódási erő egyenesen arányos az egymáson csúszó folyadék rétegek felületének nagyságával és az áramlásra merőleges keresztmetszetben vett egységnyi távolságra eső sebességváltozással:

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

Ezt az összefüggést Newton-féle súrlódási törvénynek nevezzük. Az összefüggésben η a folyadék belső súrlódására, viszkozitására jellemző dinamikai viszkozitás. SI-egysége $\text{Pa} \cdot \text{s}$. A formulában $\Delta v / \Delta y$ a sebesség gradiense, A az egymáson elcsúszva áramló rétegek felszínének nagysága.

Sztatika

Pascal törvénye

Ha tekintjük az **ábrát**, és feltételezzük, hogy a dugattyúk nyugalomban vannak, akkor kiszámíthatjuk a folyadék által közvetített nyomást a dugattyúk belső felületein.

Mivel elmozdulás nem történik, így

$$\Delta W = \Delta E_k = 0$$

Ezt átírva a két dugattyún végbement változásokra:

$$F_1 \Delta s_1 - F_2 \Delta s_2 = 0$$

Annak ismeretében, hogy a dugattyúra ható erő az $F = pA$ képletből számolható, ahol p a dugattyú A nagyságú felületét érő nyomás:

$$p_1 \underbrace{A_1 \Delta s_1}_{\Delta V} + p_2 \underbrace{A_2 \Delta s_2}_{\Delta V} = 0$$

A dugattyú elmozdulása és a dugattyú felületének szorzata a mozgatott folyadék térfogatát adja meg. Mivel azonban a folyadék összenyomhatatlan, ezen ΔV értékeknek mindenütt ugyanakkorának kell lenniük. Emiatt

$$(p_1 - p_2) \Delta V = 0$$

amiből következik, hogy $p_1 = p_2$, vagyis a nyomás a folyadék belsejében mindenhol ugyanakkora. Ezt mondja ki Pascal törvénye:

A nyomás a folyadékokban egyenletesen terjed, azaz a folyadékra gyakorolt külső nyomásból származó nyomás a folyadék belsejében és határfelületén minden irányban ugyanakkora.

Ezen az elven működik például a hidraulikus emelő, a folyadékfék és még számos berendezés. Az **ábra** a hidraulikus emelő működési elvét mutatja. Az A_1 keresztmetszetű dugattyúra kifejtett F_1 erőt az A_2 keresztmetszetű hengerben F_2 erővel egyensúlyozhatjuk ki. Ez az erő az F_1 erőnél A_2/A_1 -szer nagyobb, azaz

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

illetve

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Az utóbbi összefüggés a két dugattyú által kifejtett nyomások egyenlőségét fejezi ki. A gyakorlatban működő hidraulikus berendezéseken nyitó és záró szelepek biztosítják a periodikus működést és azt, hogy a tartalékfolyadék a dugattyúkkal mozgatott folyadék terébe bejusson. Kis keresztmetszetű nyomóhenger és nagy keresztmetszetű munkahenger esetén kis erővel nála több nagyságrenddel nagyobb súlyú terhet tudunk felemelni. Az ehhez szükséges munka azonban természetesen legalább annyi, mint amekkora a teher felemeléséhez a hidraulikus emelő használata nélkül szükséges.

Hidrosztatikai nyomás

Eddig csak a külső nyomás terjedésével foglalkoztunk. Nem vettük figyelembe, hogy a folyadéknak súlya van, s ezért az egyes folyadékrétegek nyomják az alattuk levőket. Ennek következtében a folyadék kissé összenyomódik, aminek eredményeként a folyadékban feszültség, azaz nyomás ébred. Ezt a folyadék súlyából származó nyomást hidrosztatikai nyomásnak nevezzük. Egyszerűen beláthatjuk, hogy a hidrosztatikai nyomás egyenesen arányos a felszíntől mért mélységgel és a folyadék sűrűségével.

Az **ábrán** látható, folyadékkal telt edényben a felszíntől h mélységben A keresztmetszetű felületelemet választottunk ki. A felette levő folyadékoszlop súlya $G = Ah\rho g$, az ebből származó nyomás pedig

$$p = h\rho g$$

A hidrosztatikai nyomásra kapott eredmény a kísérletek tanúsága és elméleti megfontolás szerint is általánosan érvényes, a folyadék súlyából származó nyomás független a folyadékba helyezett felületelem irányításától. Adott mélységben a nyomásmérő állandó nyomást mutat, függetlenül a membrán felületének irányításától (a nyomás izotropiája). Az egymáshoz folyadékkal csatlakozó edényeket közlekedőedényeknek nevezzük. A homogén folyadék a közlekedőedény minden szárában azonos magasságban helyezkedik el.

Hidrosztatikai paradoxon

Érdekes megállapítást tehetünk, ha vizsgáljuk a folyadék súlyából származó, a folyadékot tartalmazó edény aljára ható erők nagyságát különböző kialakítású edények esetén. A folyadék mindegyik edényben azonos magasságú, tehát valamennyi tartály aljára nehezedő nyomás

$$p_t = h\rho g$$

A tartályok alaplappjainak felülete szintén egyenlő, így az ezen túlnyomásból származó, a tartály alaplappjára ható erő nagysága valamennyi esetben

$$F = p_t A = h\rho g A = p(hA)g$$

Miután a folyadék súlyerejét a $G = mg = \rho Vg$ összefüggéssel határozhatjuk meg, és az edény alakjától függően a folyadéktérfogatok értéke más és más, látjuk, hogy a tartály aljára ható erő nem feltétlenül egyenlő a benne lévő folyadék súlyerejével, hanem annál nagyobb is vagy kisebb is lehet. Ezt a jelenséget hidrosztatikai paradoxonnak nevezzük.

A hidrosztatikai paradoxonban rejlő látszólagos ellentmondás természetesen feloldható, hiszen, ha az edény oldalfaláról a folyadékra átadódó erőket is figyelembe vesszük, folyadékra ható erők eredője zérusra adódik. Az edény oldalfalára ható, a folyadéknyomásból származó erők meghatározása azonban még egyszerű formájú edény esetében is összetett feladat, mert a nyomás a felületen nem állandó, hanem a mélységgel lineárisan változik. Az általa kifejtett erő tehát egy olyan, a felületen megoszló erőrendszer, amelynek intenzitása a mélységgel egyenesen arányosan változik. Természetesen az ilyenkor szokásos elvet követve, vagyis a felületet olyan felületelemekre osztva, amelyen belül a nyomás állandónak vehető, az ezen felületelemekre ható erők meghatározhatók, és összegzésükkel az edény oldalfalára ható erő nagysága általában kiszámítható. Az így adódó erő tehát az a koncentrált erő, amellyel a folyadéknyomásból származó erőrendszer helyettesíthető, azaz a megoszló erőrendszer eredője.

Felhajtóerő

Hétköznapi tapasztalat, hogy a folyadékba merített testet kisebb erővel tarthatjuk, mint amikor a test nincsen folyadékban; vagy az, hogy a folyadékba tett test el sem merül.

Először egyszerű alakú testre számítjuk ki a felhajtóerőt. Az **ábra** szerint A keresztmetszetű, h magasságú egyenes henger merül ρ_f sűrűségű folyadékba. A hidrosztatikai nyomás miatt a folyadék erőt fejt ki a henger lapjaira és a palástra. Az oldalirányú erők eredője nulla, az alsó és a felső lapra ható erők különbsége pedig

$$F_f = F_2 - F_1 = h_2 \rho_f g A - h_1 \rho_f g A = (h_2 - h_1) \rho_f g A$$

Mivel $h_2 - h_1 = h$ a henger magassága és $V_t = hA$ a test térfogata, a felfelé ható eredő erő, vagyis a felhajtóerő:

$$F_f = V_t \rho_f g$$

Eredményünk szerint a folyadékba merülő hengerre felhajtóerő hat, ami megegyezik a henger által kiszorított folyadék súlyával. A törvény nemcsak erre az esetre, hanem általánosan is igaz, azaz bármely folyadékba merülő testre a test által kiszorított folyadék súlyával megegyező felhajtóerő hat. Ezt a törvényt, amely a hidrosztatikai nyomás egyenes következménye, Arkhimédész törvényének nevezzük.

Alkalmazások (úszás)

Attól függően, hogy a testre ható nehézségi erő és a felhajtóerő közül melyik a nagyobb, a test lemerül vagy emelkedik a folyadékban. Ha a felhajtóerő nagyobb, mint az mg nehézségi erő, akkor a felemelkedő test úgy kerül egyensúlyba, hogy a folyadékba részben bemerülve úszik. Ha a két erő eredője teljes elmerülés esetén nulla, a test lebeg.

Az **ábra** alapján az erők eredőjére vonatkozóan három esetet különböztethetünk meg. Ha a test sűrűsége $\rho_t > \rho_f$, akkor az eredő erő:

$$F_e = V_t(\rho_t - \rho_f)g > 0$$

a test lemerül. Ha $\rho_t = \rho_f$, akkor $F_e = 0$, a test lebeg, ha pedig $\rho_t < \rho_f$, akkor a test felemelkedik és olyan egyensúlyi helyzet alakul ki, hogy a test a folyadékba részben belemerülve úszik. Az utóbbi két esetben a testre ható nehézségi erő egyenlő a test által kiszorított folyadék súlyával. Az úszás esetén az egyensúly feltétele:

$$V_t \rho_t = V_f \rho_f$$

ahol V_f a test folyadékba merülő részének térfogatát jelenti. A fenti összefüggésből:

$$\frac{V_f}{V_t} = \frac{\rho_t}{\rho_f}$$

azaz folyadékban úszó tömör test térfogatának annyiad része merül a folyadékba, ahányad része a test sűrűsége a folyadék sűrűségének (pl. az úszó jég térfogatának kb. 0,9 része merül a vízbe).

Ahhoz, hogy a test úszása stabil legyen, a testre ható nehézségi erő és felhajtóerő egyenlőségén túl annak is teljesülnie kell, hogy kis kibillenés esetén a két erő visszatérítő forgatónyomatékot fejtsen ki a testre.

Torricelli kísérlet

A levegő súlyából származó nyomás, a légnyomás meghatározása Torricelli olasz fizikus nevéhez fűződik. Torricelli körülbelül 1 méter hosszú, egyik végén zárt üvegcsövet higannyal töltött meg, és a csövet, nyitott végét befogva, higannyal töltött edénybe helyezte. Ezután a cső nyílását szabadná tette. A csőben a higany szintje az edénybeli szinttől mérve körülbelül $h = 76$ cm magasságban állapodott meg, függetlenül a cső dőlésétől (**ábra**). A jelenség azzal

magyarázható, hogy a csőben levő higanyoszlop súlyából származó nyomással – a közlekedő edények elve szerint – a levegő nyomása tart egyensúlyt. A cső higany feletti zárt terét Torricelli-ürnek nevezik.

A légnyomásra és a Torricelli-kísérletre alapozva többféle nyomásegységet is bevezettek. Így pl. 1 fizikai atmoszférának (1 atm) nevezzük a 76 cm magas, 0 °C -os higanyoszlop hidrosztatikai nyomását a tengerszint magasságában, a 45. szélességi fokon ($g = 9,806\,65\text{ ms}^{-2}$). A $p = h\rho g$ alapján 1 atm (normális légköri nyomás) = 101 325 Pa.

A légnyomás függése a magasságtól

Mérési eredmények szerint a légnyomás a Föld felszínétől mért magassággal csökken. A légnyomás és a magasság közötti összefüggés meghatározására két egyszerűsítő feltételezéssel élünk, nevezetesen, hogy sem a levegő hőmérséklete, sem a nehézségi gyorsulás nem változik.

Legyen a Föld felszínén mért nyomás, illetve sűrűség p_0 , illetve ρ_0 , h magasságban p , illetve ρ . Ha h magasságban Δh -val feljebb megyünk, akkor a nyomás változása

$$\Delta p = -g\rho\Delta h$$

(A negatív előjel azt fejezi ki, hogy növekvő magassághoz kisebb nyomás tartozik.) Feltevésünk szerint a hőmérséklet állandó, tehát a Boyle-Mariotte-törvény szerint

$$pV = p_0V_0$$

illetve az m tömeggel való osztás után, és figyelembe véve, hogy $m/V = \rho$ és $m/V_0 = \rho_0$,

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$$

A fenti formulából fejezzük ki p -t, és helyettesítsük be a Δp -re adott összefüggésbe:

$$\Delta p = -p \frac{\rho_0}{p_0} g \Delta h$$

Barometrikus magasságformula és következményei

Az előző formula átalakítás után:

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = -\frac{\rho_0}{p_0} gp$$

ami határesetben

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{\rho_0}{p_0} gp$$

differenciálegyenletbe megy át. A differenciálegyenlet megoldása:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gh}$$

Ezt az összefüggést barometrikus magasságképletnek nevezzük. Hasonló alakú a sűrűség-magasság függvény is:

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gh}$$

Eredményünk szerint a légnyomás és a levegő sűrűsége a magassággal exponenciálisan csökken. A légnyomás változását érzékeljük a hegyről lefelé haladó járműben, süllyedő repülőgépen stb.

A képletből leolvasható, hogy a nagyobb sűrűségű gáz nyomása erőbben csökken a magassággal, mint a kisebb sűrűségűé. Ezzel magyarázható a kéményekben létrejövő huzat. A kéményben levő melegebb levegő sűrűsége kisebb, mint a külső hidegké, ezért a kémény magasságához kívül nagyobb nyomáscsökkenés tartozik, mint belül. Hasonlóképpen, amikor a hálózati gáz nyomása csökken, akkor a gázkészülékek működésében azért okoz először a földszinten zavart, s csak később a magasabb emeleteken, mert a gáz sűrűsége kisebb, mint a külső levegőé.

Molekuláris erők folyadékokban, felületi feszültség

A szakítási kísérletek azt bizonyítják, hogy térfogatnöveléskor a folyadékrészek között vonzóerő hat. Ha tiszta üveglapot szakítottunk el víz felszínéről, ahhoz erőt kell kifejteni. Az ehhez szükséges erőt érzékeny dinamométerrel mérhetjük. Elszakítás után a lapon vízcseppek maradnak, vagyis folyadékrészek szakadnak el egymástól. A dinamométer az egynemű részek között fellépő összetartó erőt, az ún. kohéziós erőt méri. Az ilyen, különböző minőségű anyagok közötti vonzóerőt adhéziós erőnek nevezzük.

Alumíniumérme, borotvapenge, varrótű úszik a vízen, ha óvatosan tesszük a felszínre. Az úszó fémtestek alatt és környékén a felszín rugalmas hártaként behorpad. Ez a jelenség, hogy a víz megtartja a nála többszörösen nagyobb sűrűségű testeket, nem magyarázható az úzás feltételéről tanult ismereteinkkel. Ha a fémdarabokat élükkel tesszük a vízre, elmerülnek. Azt mondhatjuk, hogy mintegy átszakították a felszíni, rugalmas hártát. Ennek a hártának a folyadék belsejétől eltérő tulajdonságait a molekulák közötti erőkkel magyarázhatjuk.

A folyadék belsejében kiválasztott folyadékrészre a szomszédos molekulák gömb-szimmetrikusan hatnak, a felszín közelében levő molekulák körül viszont a hatásgömbön belül levő szomszédos molekulák eloszlása nem egyenletes.

A folyadékhártákban ható erőket legkönnyebben az ún. „szappanhártás” kísérletekkel tanulmányozhatjuk. Folyékony mosószerből drótkeretben nagyméretű, tartós hárták feszíthetők ki. Ezek a hárták sokkal vastagabbak a felületi rétegnél, így mindegyiküknek két felületi rétege van. Mégis, az ilyen drótkeretekre feszített hárták esetén, a felületi réteg viselkedése meghatározó a tömbfolyadékhoz képest.

Az **ábrán** mozgatható oldalú, téglalap alakú drótkeret látható. Ha a keretet szappanoldatba mártjuk és hártát feszítünk rá, akkor a folyadékhártya a mozgatható oldalt felrántva összehúzódik. Finom mérőkísérletek bizonyítják, hogy a mozgatható drótot a hártá területétől függetlenül, adott erővel tarthatjuk egyensúlyban. Különböző hosszúságú huzaldarabokra ható erők mérése alapján kiderült, hogy a folyadékhártya által kifejtett erő egyenesen arányos a vonaldarab hosszával. A drótkeret l hosszúságú darabjára ható erő:

$$F = \alpha 2l$$

(A 2-es szorzó azért szerepel, mert ebben a kísérletben a hártának két felszíne van.) A folyadékfelszínnek ezt a tulajdonságát az α arányossági együtthatóval, az ún. felületi feszültséggel jellemezzük. Dimenziója az erő dimenziójának (ML/T^2) és a hosszúság dimenziójának (L) a hányadosa, vagyis M/T^2 . SI-egysége: N/m . A felületi feszültség mindig a határfelület mentén érintkező két anyagra jellemző érték.

Amikor a hártá felszínét megnöveljük, munkát végzünk. Az l hosszúságú vonaldarab Δx elmozdulásakor végzett elemi munka

$$\Delta W = F \Delta x = \alpha 2l \Delta x = \alpha \Delta A$$

Eredményünk szerint a munka egyenesen arányos a felület növekedésével, ΔA -val. Ezzel a munkával a felület potenciális energiáját növeltük. A fenti összefüggés alapján az α felületi feszültségnek energetikai értelmezést adhatunk:

$$\alpha = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{\Delta E_p}{\Delta A}$$

Eszerint a felületi feszültség számértéke egyenlő a határfelület egységnyi területtel történő megnöveléséhez szükséges munkával, pontosan ennyivel növekedik a felület potenciális energiája.

Görbületi nyomás (Laplace-törvény)

A gömb alakú folyadékhártya görbületi nyomása pl. a munkatétellel határozható meg. Jelöljük az R sugarú gömb belsejében uralkodó többletnyomást p_g -vel. Növeljük meg a hártyagömb sugarát ΔR -rel! Ehhez

$$\Delta W = p_g \Delta A R$$

munkát kell végeznünk, ahol A a gömb felszíne. Ez a munka a hártya potenciális energiáját növeli, amelynek növekedése egyenesen arányos a felületnövekedéssel:

$$\Delta E_p = \alpha \Delta A$$

A gömb $4R^2\pi$ felületének felhasználásával és figyelembe véve, hogy a hártyának most is két felszíne van, a munka és energianövekmény egyenlőségét így írhatjuk:

$$p_g = 4R^2\pi\Delta R \alpha = \alpha \cdot 2 \cdot 4\pi[(R + \Delta R)^2 - R^2]$$

A műveletek elvégzése után és a ΔR -ben másodrendűen kicsiny tagok elhanyagolásával a gömbhártya görbületi nyomására az alábbi eredményt kapjuk:

$$p_g = \frac{4\alpha}{R}$$

Egyszeres felszínű hártya esetén – ilyen pl. a vízcsepp felszíne – a görbületi nyomás:

$$p_g = \frac{2\alpha}{R}$$

A görbületi nyomás tehát fordítottan arányos a gömb sugarával.

A Laplace-törvény füzetbe leírt alakja

$$p_g = \frac{\Delta F_c}{\Delta A} = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Kapillaritás jelensége, értelmezése

A tiszta üveglapra cseppentett víz szétterül, az üvegen levő higanycsepp viszont majdnem gömb alakú. Vékony csőben, kapillárisban a folyadék felszíne szemmel láthatóan görbült a cső fala mentén.

Az ábrán jelölt ϑ szöget illeszkedési szögnek nevezzük. A ϑ szög az üvegfelület és a csepp-felszín, illetve a kapilláris alkotójának és a folyadékfelszín érintőjének a szöge. $\vartheta < 90^\circ$ esetén nedvesítő, $\vartheta > 90^\circ$ esetén nem nedvesítő folyadékról beszélünk.

A vékony csövekben megfigyelhető kapilláris jelenségeket is a felületi feszültségre vezethetjük vissza. A kapillárisban a folyadék szintje magasabb, ill. alacsonyabb attól függően, hogy a felszín homorú, vagy domború. Kapilláris csőben a felületi feszültség görbült felszínt hoz

létre, s az ezzel járó görbületi nyomás miatt a folyadékszint addig emelkedik, illetve süllyed az edénybeli szinthez képest, amíg a szintkülönbségnek megfelelő hidrosztatikai nyomás a görbületi többletnyomással egyenlő nem lesz.

Az **ábra** alapján az egyensúlyra a következő feltételt írhatjuk fel: az r sugarú kapillárisban R sugarú gömbfelülettel helyettesíthető folyadékfelszín alakul ki, így a görbületi nyomás:

$$p_g = \frac{2\alpha}{R} = \frac{2\alpha \cos \vartheta}{r}$$

A többletnyomásból származó erő nedvesítő folyadék esetén felfelé, nem nedvesítő folyadék esetén lefelé mutat. A többletnyomással a h magasságú folyadékoszlop hidrosztatikai nyomása tart egyensúlyt:

$$h\rho g = \frac{2\alpha \cos \vartheta}{r}$$

Ebből a kapilláris emelkedésre (süllyedésre)

$$h = \frac{2\alpha \cos \vartheta}{r\rho g}$$

adódik. Az összefüggésből látszik, hogy a kapilláris emelkedés, illetve süllyedés fordítottan arányos a kapilláris cső sugarával.

A kapilláris jelenségekre sok természetbeni és gyakorlati példát sorolhatunk fel: ilyen pl. a hajszálcsővesség, amely a talaj nedvességtartalmában játszik fontos szerepet; a folyadékok felszívódása szivacsos anyagokban stb.

A kapilláris emelkedés és az illeszkedési szög mérésével a felületi feszültség az előbbi összefüggésből adódó

$$\alpha = \frac{hr\rho g}{2 \cos \vartheta}$$

képlettel határozható meg. A mérést az illeszkedési szög méréséből adódó bizonytalanság miatt általában vizes oldat és víz relatív felületi feszültségének meghatározására szokás alkalmazni. Ez ugyanis megegyezik a két folyadék emelkedési magasságának hányadosával. Ebben az esetben nincsen szükség az illeszkedési szög meghatározására.

Dinamika

Áramlások jellemzése, osztályozása

A folyadékok és gázok mozgásának, áramlásának leírásakor az anyagot a szilárd testekhez hasonlóan folytonosnak, kontinuumnak tekintjük. A mozgás dinamikai leírásáramost is a Newton-törvényeket, ill. a belőlük levezethető további tételeket, az energiatételt és a munkatételt használjuk.

A megszokott törvények alkalmazása azonban nem egyszerű, mert a folyadék részecskéinek egymáshoz viszonyított helyzetére vonatkozóan nem léteznek olyan szigorú összefüggések, mint például a merev test esetén, ezért a folyadék egészére nem adható olyan egységes leírás, mint a szilárd testekre.

A gázok és a folyadékok közötti további különbséget jelent az, hogy a folyadékok lényegében összenyomhatatlanok, a gázok viszont nagymértékben összenyomhatóak. Ezért a kétféle anyag mozgása csak addig tárgyalható együtt, amíg az áramlás során a gáz jelentős össze-

nyomódást nem szenved. Ez addig teljesül, amíg az áramlási sebesség sokkal kisebb a hang közegbeli terjedési sebességénél.

Az áramlás szemléltetésére bevezették az áramvonal fogalmát. Az áramvonal olyan görbe, amelynek bármely pontjában húzott érintő az illető pontbeli sebességvektor egyenese. Áramvonalrendszert demonstrál a Pohl-féle áramlási készülékkel végzett kísérlet (ábra). Két, egymástól fallal elválasztott tartályból tiszta víz és színes folyadék áramlik fésűfogszerű lyukson át két, egymáshoz közeli párhuzamos üveglappal határolt áramlási térbe. A kétféle folyadék nem keveredik össze, hanem áramfonalakban (vékony „folyadékcsövekben”) áramlik a párhuzamos lemezek között. Az áramfonal vastagság nélküli, geometriai vonalnak megfelelő határesetje az áramvonal.

Ha az áramlási térben gondolatban felvett zárt görbe pontjain átmenő áramvonalak összességét vesszük, úgynevezett áramlási- vagy áramcsövet kapunk (ábra). Az áramcső falának „alkotói” áramvonalak; emiatt a falon át nem folyik folyadék a csőbe és a csőből sem léphet ki, mert a falban áramló részek sebessége érintőirányú.

Az áramlásokat többféle szempont szerint osztályozhatjuk.

Súrlódásmentes, illetve súrlódásos áramlásról beszélünk attól függően, hogy elhanyagolható-e a folyadékrészek mozgása során fellépő nyíróerők vagy nem. Súrlódásmentes áramláson belül örvénymentes és örvényes áramlási különböztetünk meg.

Örvényes áramlásban a folyadékrészek forgómozgást is végeznek. Súrlódó folyadékok mozgása során lamináris (réteges) és turbulens (kavargó) áramlás valósulhat meg. Az előzőektől függetlenül az áramlás lehet stacionárius vagy nem-stacionárius.

Stacionárius az áramlás, ha a sebességtér független az időtől, azaz ha adott helyen a sebesség állandó. Másként fogalmazva: ha a $v(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$ függvények csak a helytől függenek, vagyis ha a független változók között nem szerepel az idő. Ilyen áramlás esetén a pályavonalak megegyeznek az áramvonalakkal.

A következőkben csak az összenyomhatatlan folyadék stacionárius és örvénymentes áramlásával foglalkozunk.

Kontinuitási egyenlet

Stacionárius áramlásban bármely áramlási cső tetszőleges keresztmetszetén adott idő alatt egyenlő tömegű és az összenyomhatatlanság miatt egyben egyenlő térfogatú folyadék áramlik át. Ahhoz, hogy ezt a megállapítást mennyiségileg is leírassuk, válasszunk ki az áramlási cső két tetszőleges helyén az áramlási sebességre merőleges A_1 és A_2 keresztmetszetet. A választott helyeken legyen a sebesség v_1 illetve v_2 . A megfigyelés időtartama legyen Δt . Az előbb mondottak szerint

$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$$

illetve

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

ahonnan

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Eredményünk szerint tehát az áramlási cső különböző keresztmetszeteiben az áramlási sebességek fordítottan arányosak a keresztmetszetekkel. A fenti összefüggés a folytonossági vagy

kontinuitási egyenlet, amelyből kiolvasható az összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlására vonatkozóan, hogy szűkületben a sebesség nagyobb. Nagyobb sebességű helyekhez a kísérletek tanúsága szerint sűrűbb áramvonalrendszer tartozik.

Az áramlásokat az áramerősséggel (áramintenzitással) jellemezzük. Megállapodás szerint az áramlási cső keresztmetszetén átfolyó ΔV folyadéktérfogat és a Δt áthaladási idő

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

hányadosát áramerősségnek nevezzük. Mivel Δt idő alatt az áramlási cső kiszemelt keresztmetszetén Δs hosszúságú, ill. $\Delta V = A\Delta s = Av\Delta t$ térfogatú folyadék áramlik át, így

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{Av\Delta t}{\Delta t} = Av$$

E legutóbbi képlet alapján az áramerősség SI-egysége: m^3/s .

Bernoulli-törvény

Manométerekkel (légnyomásmérőkkel) ellátott üvegcsőben áramló víz (ábra), szélcsatornában áramló levegő nyomása a kisebb keresztmetszetű helyeken kisebb, amint ez a manométereken leolvasható.

Az előző pontban láttuk, hogy szűkületben a közeg nagyobb sebességgel áramlik, mint a nagyobb keresztmetszetű helyeken. Kísérleti tapasztalatunk szerint tehát az áramlási csőben nagyobb sebességű helyen a nyomás kisebb. Az adott helyen mérhető nyomás és sebesség közötti mennyiségi kapcsolat meghatározására válasszunk ki az áramcsőben egy $ABCD$ folyadékrészt (ábra), amely Δt idő múlva az $A'B'C'D'$ térfogatot foglalja el. Mivel az áramlás stacionárius, az ábrán fehérén hagyott térben semmilyen változás nincs az áramlásban, annak ellenére, hogy ebbe a tartományba más folyadék érkezett. Az egész folyadékrész elmozdulását úgy tárgyalhatjuk, mintha az $ABA'B'$ folyadék, melynek tömege $\Delta m = \rho A_1 v_1 \Delta t$, a $CDC'D'$ térfogatba jutott volna. A munkatétel szerint e folyadékrész mozgási energiájának megváltozása egyenlő a rá ható erők munkájának összegével. Mivel az áramlás súrlódásmentes, a belső erők munkája nulla, ezért csak a nehézségi erő és a p_1, p_2 nyomásokból származó nyomóerők munkáját kell figyelembe vennünk. A nehézségi erő munkája az ábra jelöléseivel:

$$W_1 = \Delta m g (h_1 - h_2) = \rho A_1 v_1 \Delta t g (h_1 - h_2)$$

a nyomóerőé pedig

$$W_2 = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t$$

Figyelembe véve a kontinuitási egyenletet, amely szerint az (1) és (2) térfogat egyenlő, azaz $\Delta V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$, a munkatétel alapján

$$\frac{1}{2} \Delta V \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta V \rho v_1^2 = \Delta V \rho g (h_1 - h_2) + \Delta V (p_1 - p_2)$$

Egyszerűsítés és rendezés után

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

alakban írható fel. Ezt az összefüggést Bernoulli-egyenletnek nevezzük. Eszerint összenyomhatatlan folyadék súrlódásmentes, stacionárius áramlása közben bármely áramfonal (vékony áramcső) mentén a

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{állandó}$$

Alkalmazások

Két, egymáshoz közel helyezett könnyű lemez közé befújva a lemezek összezsapódnak. E jelenség a Bernoulli-törvénnyel magyarázható. Az áramló közegben történő különböző nyomásváltozások jelenségei számos gyakorlati alkalmazásra adnak lehetőségek.

Pitot-Prandtl-cső

Áramló gáz sebességét vagy a benne mozgó test sebességét például a Pitot-Prandtl-csővel mérhetjük meg (ábra). Az áramlási térbe helyezett cső ábrán jelzett 1. helyén a sebesség $v_1 = 0$, a torlódás miatt, a nyomás p_1 ; a 2. helyen v az áramlási sebesség, p_2 az ehhez a sebességhez tartozó nyomás. A manométer bal oldali szára a „cső” üreges részébe nyílik, az üreg pedig a falon levő nyílások miatt kapcsolatban van az áramlási térrel. Bernoulli egyenlete alapján

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

ahonnan a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

Itt ρ a gáz sűrűsége, $p_1 - p_2 = \Delta p$ a nyomáskülönbség, ami a csőhöz csatlakozó manométeren olvasható le. (A csövet csepp alakúra készítik, hogy a mérőtest az áramlási viszonyokat lehetőleg ne változtassa meg.)

Illatszerszóró, vízlégszivattyú

Sokféle eszköz működik a gyors áramlások környezetében fellépő „szívóhatás” kihasználásával. Az áramló folyadékban (gázban) a nyomás kisebb, mint a környező kisebb sebességű vagy nyugvó közegben, ezért az a kisebb nyomású hely felé áramlik. Ez a hatás érvényesül az illatszerszóróban (ábra) és a vízlégszivattyúban (ábra). Az illatszerszóróban a szívóhatás miatt felemelkedő folyadékot a befűjt légáram magával ragadja és porlasztja is. A vízlégszivattyúban az áramló folyadék a környező gázt „szívja” be, s viszi magával, így evakuálva a ritkítandó teret.

Súrlódó folyadékok lamináris áramlása

A belső súrlódás miatt a hengeres csőben áramló folyadék rétegei is különböző sebességgel mozognak. A csőfallal érintkező réteg sebessége nulla, a cső közepén mozgóké pedig maximális. Egyszerű kísérlettel megmutatható az is, hogy a vízcsaphoz kötött, manométerekkel ellátott, egyenletes keresztmetszetű üvegcsőben áramló víz nyomása a cső mentén lineárisan csökken a távolsággal (ábra). Ez a jelenség nem magyarázható Bernoulli törvényével, amely szerint az áramlási cső kisebb nyomású helyén a sebesség nagyobb. A nyomáscsökkenés oka a belső súrlódási erő. A cső l hossza menti $p_1 - p_2$ nyomáscsökkenésből származó erő egyensúlyt tart a Newton-féle belső súrlódási erővel. Az eredő erő tehát nulla, a folyadék stacionárius, lamináris áramlást végez. Ezt az erőtan megfontolást felhasználhatjuk arra, hogy meghatározzuk az R sugarú csőben áramló, η dinamikai viszkozitású folyadék sebességeloszlását. A részletes számítások azt adják, hogy a cső szimmetriatengelyétől r távolságban az áramlási sebesség:

$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

Az eredmény mutatja, hogy a stacionárius, lamináris áramlás sebessége a cső középpontjától mért távolsággal négyzetesen csökken a cső fala felé, azaz a sebességprofil parabolikus.

Hagen-Poiseuille törvény

A sebességeloszlás felhasználásával meghatározhatjuk az áramlás erősségét. Az R sugarú csőben a középvonaltól r távolságban jelöljük ki Δr szélességű csőgyűrűt (ábra). Ezen a gyűrűszerű keresztmetszeten az átfolyó folyadékáram erőssége:

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = v(r)\Delta A$$

A sebességeloszlást felhasználva ez az áramerősség az

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) 2\pi r \Delta r$$

alakot ölti. A cső teljes keresztmetszetén átáramló folyadék áramerősségét úgy kapjuk meg, hogy az elemi térfogatok összegét vesszük a teljes keresztmetszetre, tehát

$$I = \frac{V}{t} = \frac{(p_1 - p_2)}{\eta l} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr$$

Az integrálást elvégezve

$$I = \frac{V}{t} = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4$$

A fenti összefüggést Hagen-Poiseuille-törvénynek nevezzük. Eszerint stacionárius, lamináris áramlás során a cső keresztmetszetén áthaladó folyadékáram (pl. véráram) erőssége egyenesen arányos a cső végei közötti nyomáskülönbséggel, a cső sugarának negyedik hatványával és fordítottan arányos a cső hosszával, valamint a folyadék dinamikai viszkozitásával.

Stokes-törvény

Áramlási térbe helyezett golyó közelében réteges áramlás alakulhat ki. A belső súrlódás miatt a közeg a golyóra erőt fejt ki, ami a számítások szerint egyenesen arányos a közeg és a golyó relatív sebességével, a golyó sugarával és a közeg dinamikai viszkozitásával:

$$F = 6\pi\eta r v$$

Ez a Stokes-féle súrlódási törvény. A Stokes-törvény sokféle kísérlet kiértékelésében játszik fontos szerepet. A kisméretű golyók esése súrlódó folyadékban gyorsan egyenletessé válik. A golyó sebességét megmérve következtethetünk a folyadék, vagy a golyóra ható erők tulajdonságaira.

9.) Elektrosztatika I.

Elektrosztatikai alapjelenségek

Thalész görög filozófus, matematikus és csillagász Kr. e. 600 körül tett említést először arról, hogy a gyapjúval megdörzsölt borostyánkő apró testeket magához vonz, majd eltaszít. Ezt követően számos megfigyelő észlelte, hogy dörzsöléskor nagyon sok anyag a borostyánkőhöz hasonló tulajdonságot vesz fel. A megdörzsölt anyagoknak azt a tulajdonságát, hogy könnyű testeket képesek magukhoz vonzani, borostyánkőerőnek nevezték el. A borostyánkő görög neve *ηλεκτρον*, s innen származik az elektromos elnevezés. Azt az állapotot pedig, amelybe a borostyánkő, a különböző üvegek és műanyagok dörzsöléskor kerülnek, elektromos állapotnak, a megdörzsölt testek között ható erőt pedig elektromos erőnek nevezzük.

A megdörzsölt testek között ható erőt a testeken levő elektromos töltésnek tulajdonítjuk, más szóval: elektromos erő kifejtésére az elektromos töltés képesíti a testeket.

Az elektromos erő vonzó és taszító is lehet, ezért kétféle elektromos töltésnek kell lennie. Ezeket pozitív és negatív töltésnek nevezzük. Megállapodás szerint negatívnak mondjuk a test elektromos töltését akkor, ha a semleges állapothoz képest elektrontöbblete van, pozitívnak pedig akkor, ha elektronhiányos. A tapasztalat szerint az azonos előjelű elektromos töltések taszítják, a különböző előjelűek pedig vonzzák egymást. Az elektromosan semleges testek között elektromos erő nem lép fel.

Coulomb-törvény, a töltés egysége

Coulomb az elektromos erők mérésére torziós mérleget használt, amely függőleges torziós szárra erősített vízszintes rúd, végein egyenlő méretű, pontszerűnek tekinthető fémgömbökkel. Ha a rúd végén levő Q_1 töltésű fémgömb közelébe vele egyenmű (vagy ellentétes előjelű) Q_2 töltésű fémgömböt vitt, a torziós szál elcsavarodott, mert a töltések között taszítóerő (ill. vonzóerő) hat.

A mérések szerint vákuumban (légüres térben) – gyakorlatilag levegőben is – a pontszerű töltések (ponttöltések) között ható erő nagysága (F_0) egyenesen arányos a Q_1 és a Q_2 töltések szorzatával, és fordítva arányos r távolságuk négyzetével:

$$F_0 = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

ahol k_0 arányossági együttható (mértékegységes szám). Megállapodás szerint k_0 számértéke a $c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ vákuumbeli fénysebesség négyzetet számértékének 10^{-7} -szerese:

$$\{k_0\} = 10^{-7} \{c^2\} \approx 9 \cdot 10^9$$

Az elektromos töltés skalár fizikai mennyiség (röviden: skalár); SI-egysége Coulomb tiszteletére a coulomb, jele: C. Meghatározása: az egyenletek alapján 1 C az a töltés, amely a tőle 1 m távolságra levő és vele azonos nagyságú töltésre $9 \cdot 10^9 \text{ N}$ erőt fejt ki. Az 1 C mint sztatikus töltés igen nagy, a valóságban többnyire csak törtrészei fordulnak elő.

A Coulomb-törvényből következik, hogy a Q_1 ponttöltéstől r távolságra végtelen sok pont található, amelyekben az oda helyezett Q_2 ponttöltésre ugyanakkora nagyságú erő hat. Ezek a pontok r sugarú, $4r^2\pi$ nagyságú gömbfelületen találhatók. Ebből következik, hogy a ponttöltések közötti erőhatás gömbszimmetrikus jellegű. Ezt hangsúlyozva a k_0 együtthatót vákuumban (gyakorlatilag levegőben is)

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

alakban szokás írni, ahol ϵ_0 a vákuum permittivitása (régábbi neve: vákuum dielektromos állandója) és értéke:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_0} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

A vákuum permittivitásának bevezetésével a vákuumbeli Coulomb-törvény:

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Ha a Q_1, Q_2 ponttöltések végtelen kiterjedésű, mindenütt homogén (egynemű) szigetelő közegben, ún. homogén dielektrikumban vannak, akkor a köztük ható F erő kisebb, mint az F_0 vákuumbeli erő. Ennek alapján célszerű definiálni egy, a közegre jellemző állandó számot, az ún. relatív permittivitást (jele: ϵ_r ; régábbi neve: relatív dielektromos állandó), amely megmutatja, hogy a ponttöltések között ható erő hányszor nagyobb vákuumban, mint homogén szigetelő közegben:

$$\epsilon_r = \frac{F_0}{F}$$

A relatív permittivitás értelmezéséből következik, hogy a vákuum relatív permittivitása 1. A tapasztalat azt mutatja, hogy a levegő relatív permittivitása alig nagyobb 1-nél, de egyes dielektrikumok permittivitása jelentős eltérést mutat.

A relatív permittivitás és a vákuumbeli Coulomb-törvény alapján adódik a homogén szigetelőben nyugvó ponttöltések között ható Coulomb-erő:

$$F = \frac{F_0}{\epsilon_r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

ahol $\epsilon_0\epsilon_r = \epsilon$ a permittivitás (régábbi neve: dielektromos állandó).

A két pontszerű töltés közötti elektromos kölcsönhatás további fontos tulajdonsága, hogy a ponttöltések között ható erő iránya az összekötő egyenesbe esik. Ennek megfelelően a fellépő elektromos erő vektor fizikai mennyiség (röviden: vektor). Értékét a Coulomb-törvény vektori alakja fejezi ki: a Q_1 ponttöltés a tőle $|\mathbf{r}| = r$ távolságra levő Q_2 ponttöltésre

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

erőt fejt ki, ahol $\mathbf{r}/r$ a Q_1 ponttöltéstől a Q_2 felé mutató egységvektor. Hasonlóan adódik a Q_2 ponttöltés által a Q_1 ponttöltésre ható $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ erő is. A két erő tehát – összhangban Newton III. törvényével – azonos nagyságú, de ellentétes irányú.

Dipólus

Az elektromos dipólus két azonos nagyságú, de ellentétes előjelű, egymástól l távolságra levő $\pm Q$ pontszerű töltés. Jellemzésére a

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{l}$$

elektromos dipólusmomentum szolgál, ahol $\mathbf{l}$ megállapodás szerint a negatív töltésközépponttól a pozitív töltésközéppont felé mutat. Nagysága: $|\mathbf{p}| = Q|\mathbf{l}|$, ill. $p = Ql$. SI -egysége a coulomb·méter, jele: C · m.

Szuperpozíció

A Coulomb-törvény szigorúan csak két pontszerű és nyugvó töltés közötti erőhatás leírására alkalmas. Ha viszont valamely q ponttöltésre egyidejűleg több q_i ponttöltés fejt ki erőt, akkor az erőhatások függetlenségének elve (szuperpozíció elve) szerint ezek együttes hatása egyenértékű vektori eredőjük hatásával:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_i k \cdot \frac{qq_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

Elektromos térerősség és potenciál kapcsolata

Elektromos térerősség

Fizikai mezőnek (fizikai térnek) nevezünk minden olyan fizikai mennyiséget, amely a háromdimenziós geometriai tér különböző pontjaiban meghatározott értéket vesz fel.

A tapasztalat szerint az elektromos töltésű testek közvetlen érintkezés nélkül is egymásra erőt fejtenek ki. Ezt a jelenséget úgy magyarázhatjuk, hogy az elektromos töltésű test maga körül fizikai tulajdonságokkal rendelkező, ún. elektromos mezőt (elektromos erőteret) kelt, amely a benne levő elektromos töltésű testekre erőt fejt ki. Eszerint a töltések közötti erőhatást az elektromos mező közvetíti. Ennek megfelelően az elektromos mező által a Q pontszerű töltésre ható erő

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$$

alakban írható, ahol a Q töltés csak a test elektromos állapotára, $\mathbf{E}$ pedig csak az elektromos mezőre jellemző fizikai mennyiség, neve elektromos térerősség. Ezt a tapasztalati törvényt elektromos erőtvénynak nevezzük.

Az elektromos erőtvény alapján az elektromos mező egy adott pontját jellemző elektromos térerősség:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q}$$

Az elektromos térerősség megmutatja az egységnyi pozitív töltésre ható erőt; vektor fizikai mennyiség, nagysága: $|\mathbf{E}| = |\mathbf{F}|/Q$, illetve $\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q$, iránya pozitív Q töltés esetén az $\mathbf{F}$ erőével azonos, negatív töltés esetén ellentétes; SI-egysége a newton per coulomb, jele: N/C. Meghatározása: 1 N/C a térerősség az elektromos mező azon pontjában, ahol az 1 C pontszerű töltésre 1 N erő hat.

Potenciál

A potenciál fogalmának meghatározásához előbb meg kell határozni az elektromos mező által végzett munkát.

Homogén elektromos mező munkája

Ha a q ponttöltés a homogén elektromos mező által kifejtett $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ erő hatására egyenes vonalú pályán mozog az A kezdőpontból a B végpontba, miközben $\mathbf{s}$ elmozdulást szenved, ill. $|\mathbf{s}| = s$ utat tesz meg, akkor a homogén elektromos mező munkája:

$$W_{AB} = |\mathbf{F}||\mathbf{s}| \cos \alpha = q|\mathbf{E}||\mathbf{s}| \cos \alpha = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}$$

Inhomogén elektromos mező munkája

A csak helykoordinátáktól függő, de időben állandó inhomogén elektromos mező munkája is kiszámítható. Evégből a pályagörbét – amelyen a q ponttöltés mozog gondolatban felbontjuk olyan kicsiny, A -tól B felé mutató $\Delta\mathbf{s}$ elemi elmozdulásokra, amelyek mentén az elektromos

mező $\mathbf{E}$ térerőssége, s így az általa kifejtett $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ elektromos erő is állandónak tekinthető. Ezután skaláris szorzással az előző képlet alapján meghatározzuk mindegyik $\Delta\mathbf{s}$ elemi elmozdulás során végzett $\Delta W = q\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{s}$ elemi munkát, majd az így nyert elemi munkákat összeadjuk A -tól B -ig:

$$W_{AB} = q \sum_A^B \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{s}$$

Az elektromos mező munkája pontosan is megadható. Ha ugyanis a $\Delta\mathbf{s}$ elemi elmozdulás minden határon túl tart nullához ($\Delta\mathbf{s} \rightarrow 0$), akkor

$$W_{AB} = \lim_{\Delta\mathbf{s} \rightarrow 0} q \sum_A^B \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{s} = q \int \mathbf{E} d\mathbf{s}$$

A feszültség

Megállapodás szerint az elektromos mező A és B pontja közötti U_{AB} feszültségen értjük a mező Q ponttöltésén végzett W_{AB} munkájának és a Q töltésnek a hányadosát:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q}$$

SI-egysége a volt, jele V , meghatározása: $1 V = 1 J/C$ az elektromos mező két pontja között a feszültség akkor, ha az $1 C$ töltés $1 J$ munka árán jut el egyik pontból a másikba.

Elektromos térerősség és potenciál kapcsolata

Homogén elektromos mezőben

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q} = \frac{Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}}{Q} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = Es \cos \alpha$$

Ebből

$$E = \frac{U_{AB}}{s \cos \alpha}$$

illetve $\alpha = 0^\circ$ esetén

$$E = \frac{U_{AB}}{s}$$

Inhomogén elektromos mezőben

A feszültség definíciója és az elektromos mező munkája alapján:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q} = \frac{Q \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{s}}{Q} = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{s}$$

amennyiben $\Delta\mathbf{s} \rightarrow 0$.

Az elektrosztatikus tér konzervatív

Vegyünk egy Γ zárt görbét, melynek legyen P_1, P_2, P_3 pontja, az ezekbe mutató helyvektorok pedig $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Ha kiszámoljuk, hogy mekkora az elektrosztatikus tér munkavégzése, mialatt a q töltést e Γ görbe mentén $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_1$ útvonalon át körbemozgatja, az alábbi összefüggést kapjuk. Az elektromos mező munkáját megadó képletbe helyettesítve:

$$W_{1 \rightarrow 2} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

$$W_{2 \rightarrow 3} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)$$

$$W_{3 \rightarrow 1} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)$$

A fenti egyenleteket összeadva megkapjuk a teljes munkát:

$$W = \mathbf{E}q[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)] = \mathbf{E}q \cdot \mathbf{0} = 0$$

Vagyis bármely zárt görbe mentén az elektrosztatikus tér munkavégzése zérus, azaz az elektrosztatikus tér konzervatív. Ez egyben azt is jelenti, hogy

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$$

minden zárt görbe mentén.

Kiterjedt testek elektromos tere (alkalmazások)

Térfogati töltéseloszlás

Ha Q elektromos töltés a V térfogatban egyenletes eloszlású, akkor térfogati (térbeli) töltéssűrűségen értjük a

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

hányadost, amely megmutatja az egységnyi térfogatban található elektromos töltést. SI-egysége a coulomb per köbméter, jele: C/m^3 .

Ha a test ΔV térfogatelemeiben ΔQ töltés van, akkor nem egyenletes térbeli töltéseloszlás esetén a térbeli töltéssűrűség helyről helyre változik:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$

Felületi töltéseloszlás

Ha Q elektromos töltés A felületen (pl. gömbfelületen) egyenletesen oszlik el, akkor a

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

hányadost felületi töltéssűrűségnek nevezzük, amely megmutatja az egységnyi felület töltését.

SI-egysége a coulomb per négyzetméter, jele: C/m^2 .

Ha a test ΔA felületelemeiben ΔQ töltés található, akkor nem egyenletes felületi töltéseloszlás esetén a felületi töltéssűrűség helyről helyre változik:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}$$

Alkalmazások

Síkmező elektromos tere

Egy adott sík által keltett elektromos mező ereje a síkra felhalmozott töltések mennyiségétől, vagyis a felületi töltéssűrűségtől függ. A végtelen kiterjedésű sík által keltett elektromos mező

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

tehát a térerősség nem függ a siktól való távolságtól.

Üreges gömb elektromos tere

Üreges gömb esetén a térerősség meghatározását úgy végezhetjük el, hogy a gömböt övenként kiintegráljuk. Ekkor azt kapjuk, hogy a gömb belsejében a térerősség zérus, a gömb palástjára

tól kifelé haladva pedig olyan, mintha a gömbön fölhalmozott töltés pontszerűen, a középpontban összpontosult volna. Így a gömb térerőssége

$$E(r) = \begin{cases} k \frac{Q}{r^2}, & \text{ha } R < r < \infty \\ 0, & \text{ha } 0 \leq r \leq R \end{cases}$$

Tömör gömb elektromos tere

Tömör gömb belsejében csak abban az esetben halmozható fel töltés, ha a gömb anyaga szigetelő. Ekkor a tömör gömb belül feltölthető, töltéssűrűségét a $\rho = \Delta V / \Delta q$ térfogati töltéssűrűség jellemzi. A térerősség a tömör gömb belsejében lineárisan növekszik,

$$E(r) = k \frac{\left(\frac{4}{3}r^3\pi\right)\rho}{r^2}$$

a gömbön kívül pedig a már fent látott módon csökken. Így tehát

$$E(r) = \begin{cases} k \left(\frac{Q}{R^2}\right) \left(\frac{r}{R}\right), & \text{ha } 0 \leq r \leq R \\ k \frac{Q}{r^2}, & \text{ha } R < r < \infty \end{cases}$$

Fluxus fogalma, meghatározása

A fluxus szemléletes jelentése a felületen átáramló „anyag” mennyisége.

Homogén elektromos mező fluxusa nyitott felület esetén

Ismeretes, hogy a homogén elektromos mező $\mathbf{E}$ térerősségére merőleges egységnyi felületen annyi elektromos erővonalat rajzolunk át, mint amekkora a térerősség $\{\mathbf{E}\}$ számértéke. Ennek megfelelően merőleges viszonyok esetén az A síkfelületen $\{\mathbf{E}\mathbf{A}\}$ erővonal halad át. Megállapodás szerint: ha az $\mathbf{E} =$ állandó térerősségvektorra az $|\mathbf{A}| = A$ felület merőleges, vagyis ha $\mathbf{E}$ és $\mathbf{n}$ azonos irányú (ábra), akkor a homogén elektromos mező fluxusán értjük a

$$\Phi = EA$$

szorzatot. Az így definiált elektromos fluxus szemléletesen az $\mathbf{E}$ térerősségvektorra merőleges A síkfelületen áthaladó elektromos erővonalak számát mutatja meg. SI-egysége: $\frac{N}{C} m^2$.

Ha az A síkfelület nem merőleges a térerősségre, hanem $\mathbf{E}$ és $\mathbf{A}$ (ill. $\mathbf{n}$) egymással α szöget zár be (ábra), akkor az elektromos mező fluxusát az $\mathbf{E}$ térerősségvektornak az $\mathbf{A}$ felületre merőleges $|\mathbf{E}_n| = E_n = E \cos \alpha$ összetevőjével kell számítani:

$$\Phi = E_n A = EA \cos \alpha = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$$

Nyitott sík felületesetén tehát a homogén elektromos mező fluxusa az $\mathbf{E}$ térerősségvektor és az $\mathbf{A}$ felületvektor skaláris szorzata.

Inhomogén elektromos mező fluxusa nyitott felület esetén

Inhomogén elektromos mező és görbült nyitott felületesetén az elektromos mező fluxusát úgy számítjuk ki, hogy a felületet gondolatban felosztjuk olyan kicsiny, már síknak tekinthető $\Delta \mathbf{A}$ felületelem-vektorokra, amelyeknek minden pontjában az elektromos mező homogénnek ($\mathbf{E} =$ állandó) tekinthető. Ezután a szöget bezáró felület esetére adott képlettel skaláris szorzással meghatározzuk mindegyik $\Delta \mathbf{A}$ felületelemen átmenő $\Delta \Phi = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{A}$ elemi elektromos fluxust, majd ezeket összegezzük a teljes nyitott felületre:

$$\Phi = \sum_{\text{felület}}^{\text{nyitott}} \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{A}$$

A fenti összefüggés szigorúan csak akkor érvényes, ha a $\Delta \mathbf{A}$ felületelemet minden határon túl csökkentjük ($\Delta \mathbf{A} \rightarrow 0$).

Ekkor nyitott felületesetén az inhomogén elektromos mező fluxusa:

$$\Phi = \lim_{\Delta \mathbf{A} \rightarrow 0} \sum_{\text{felület}}^{\text{nyitott}} \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{A} = \int_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

vagyis az elektromos mező fluxusa az $\mathbf{E}$ térerősségvektor felületi integrálja.

Az elektromos mező fluxusa zárt felület esetén

Az elektromos fluxus fogalmának ismeretében könnyen kiszámítható a nyugvó Q ponttöltés elektromos mezőjének fluxusa. Evégből gondolatban vegyük körül az

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

térerősségű elektromos mezőt keltő Q ponttöltést egy r sugarú, $A' = 4r^2\pi$ felületű koncentrikus gömbbel (ábra). Ezen a gömbfelületen az elektromos erővonalak merőlegesen haladnak át, és a térerősség nagysága állandó, s így a Q ponttöltés elektromos mezőjének fluxusa:

$$\Phi = EA' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2} 4r^2\pi = \frac{Q}{\epsilon_0\epsilon_r}$$

Pozitív töltés esetén $\Phi > 0$, negatív töltés esetén $\Phi < 0$.

Az ábra alapján szemléletesen is belátható, hogy ha a Q ponttöltést A' koncentrikus gömbfelület helyett tetszőleges alakú, de véges térrészt határoló A zárt felülettel vesszük körül, akkor a rajta átmenő elektromos fluxus változatlan marad. Ha viszont a zárt felületen belül nincs töltés, akkor $\Phi = 0$.

Gauss-törvény

Tekintsük az elektromos fluxust zárt felület esetén. Ennek kiszámolásához a már fentebb megadott felületi integrált használjuk:

$$\Phi = \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i$$

ahol $\sum Q_i$ a zárt felületen belüli töltésmennyiség. Így arra jutottunk, hogy a fluxus a zárt felületen belüli töltéssel arányos.

Ha bevezetjük a $\mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}$ mennyiséget, akkor ez a fenti összefüggés a következő alakban írható:

$$\underbrace{\oint_F \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}}_{\text{zárt felületi integrál}} = \sum Q_i = \underbrace{\int_V \rho(r) \cdot dV}_{\text{térfogati integrál}}$$

ahol $\rho(r)$ a térfogati töltéssűrűség-függvény.

Elektrosztatikai alapelveken működő eszközök

Kondenzátor

Ha egy síklemezre töltéseket halmozunk fel, akkor (a már említett számítások alapján) a lemez környezetében uralkodó térerősség

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

ahol $\sigma = Q/A$ a felületi töltéssűrűség. Ha ugyanezt az összeállítást két, egymással szembe fordított síkfelülettel végezzük, melyekre ugyanakkora mennyiségben ellentétes előjelű töltéseket halmozunk fel, akkor a két lemez közti térerősség

$$E = 2 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Ez az így létrehozott eszköz, melynek neve kondenzátor, képes nagymennyiségű töltés tárolására, így az elektronikában előszeretettel alkalmazzák.

Elektroszkóp, elektrométer

Az elektroszkóp a testek elektromos állapotának kimutatására használható eszköz. Lelke a szigetelővel felfüggesztett vezetőből készült rúd, és az annak végén (általában zárt edényben elhelyezett) könnyen mozgó fémrúdból vagy kettéhajtott fémfóliából áll. Ha az elektrométer kivezetéséhez elektromos állapotban lévő testet érintünk, akkor a töltések az eszköz vezetőjében szertevándorolnak, és (azonos neműségükből fakadó taszító hatásuk révén) a mutatót kilendítik illetve a fémfólia szárai széjjelhajlanak, eltávolodnak egymástól.

Töltött részecske mozgása homogén elektromos térben (katódsugárcső)

A homogén elektrosztatikai mező E térerősségének irányára merőlegesen, v_0 sebességgel haladó pontszerű töltésre (pl. elektronra) $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ erő hat. Ennek az erőnek a v_0 irányú komponense nulla, ezért a ponttöltés x irányú mozgása egyenletes mozgás és t idő alatt

$$x = v_0 t$$

utat tesz meg. Ugyanekkor a negatív ponttöltés az y tengellyel ellentétes irányban

$$a = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m}$$

gyorsulással mozog, és mivel y irányú sebessége az origóban zérus, ezért az y tengely mentén a megtett út:

$$y = \frac{a}{2} t^2 = \frac{QE}{2m} t^2$$

Katódsugárcső

Az elektrosztatikai eltérítésű elektronsugárcső (katódsugárcső) elektromos áram hőhatására elektronokat kibocsátó katódból, nyílással ellátott anódból, E_1 – E_2 eltérítő lemezpárokból és az elektronok észlelésére szolgáló fénykibocsátó rétegből (ernyőből) áll (ábra). Az elektronnyalábot az eltérítő lemezpárokra vitt, a megjelenítendő információt hordozó elektromos jel függőleges, ill. vízszintes irányban téríti ki. Az így működő elektronsugárcső kiválóan alkalmas változó áramok, például bioáramok (szív- és agyi áramok) vizsgálatára és elektromos jelek kijelzésére.

10.) Elektrosztatika II.

Kapacitás fogalma

Ha az egymás közelében levő két vezető egyik tagjára $+Q$, a másikra pedig $-Q$ töltést viszünk, akkor közöttük U feszültségű elektromos mező alakul ki. A tapasztalat azt mutatja, hogy a vezetőrendszerre vitt Q töltésnek és a rajta kialakuló U feszültségnek a hányadosa egy adott vezetőrendszer esetén állandó. Ezt a vezetőrendszer geometriai viszonyaitól (a vezetők alakjától és térbeli helyzetétől), valamint a vezetők közötti közegtől függő

$$C = \frac{Q}{U}$$

pozitív hányadost a vezetőrendszer kapacitásának nevezzük.

Kondenzátorok

Az egymás közelébe helyezett két vezetőből álló rendszert kondenzátornak nevezzük, és kapacitása sokkal nagyobb, mint a különálló egyetlen vezetőnek. A szemben álló fémtestek a kondenzátor fegyverzetei. Fontos jellemzőjük, hogy kis térfogatban is nagy mennyiségű töltést képesek tárolni. Geometriai alakjuk szerint sík-, gömb- és hengerkondenzátorokat különböztetünk meg.

A kondenzátor fegyverzetei közé került Δq töltésnek a fegyverzeteken felhalmozott $+q$ és $-q$ töltések által keltett U feszültséggel jellemezhető elektromos tér ellenében történő mozgathoz munkát kell végezni. E munkavégzés

$$\Delta W = U \cdot \Delta q = \frac{1}{C} q \Delta q$$

Innen a munkákat összegezve

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q q \, dq = \frac{1}{2} C U^2$$

Síkkondenzátor

Az A lapfelületű és d laptávolságú kétlemezes síkkondenzátor kapacitása

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{Q}{A} d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A \sigma}{\sigma d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

Hengerkondenzátor

A hengerkondenzátor fegyverzetei közti térerősség:

Az l hosszúsághoz képest kicsin R_1 és $R_2 > R_1$ sugarú koaxiális hengereken lévő $+Q$ és $-Q$ töltések által létrehozott elektrosztatikai mező térerőssége $R_1 < r < R_2$ távolságban a Gauss-törvénytől szerint

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{lr}$$

A fegyverzetei közti feszültség a feszültség és térerősség képlete alapján

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E \, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{lr} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Így ebből a kapacitás

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l} \ln \frac{R_2}{R_1}} = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Kondenzátorok soros és párhuzamos kapcsolása

Ha a $C_1, C_2, \dots, C_n$ kapacitású kondenzátorokat az **ábrának** megfelelően kapcsoljuk egymáshoz, akkor kondenzátorok párhuzamos kapcsolásáról beszélünk. A párhuzamos kapcsolás folytán a $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ töltésű kondenzátorok mindegyikére ugyanakkora U feszültség jut, sebből kifolyólag a C_p eredő kapacitás, illetve a párhuzamosan kapcsolt kondenzátorokat helyettesítő egyetlen kondenzátor kapacitása:

$$C_p = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{U} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

A $C_1, C_2, \dots, C_n$ kapacitású kondenzátorok az **ábrán** látható ódon sorosan vannak kapcsolva. A soros kapcsolás fontos jellemzője, hogy mindegyik fegyverzetten azonos Q abszolút értékű töltés van, és ennél fogva a sorba kapcsolt kondenzátorokra jutó $U = Q/U$ feszültség az egyes kondenzátorok $U_1 = Q/C_1, U_2 = Q/C_2, \dots, U_n = Q/C_n$ részfeszültségeinek összege:

$$\frac{Q}{C_s} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n}$$

Ebből C_s eredő kapacitás reciproka, illetve a sorosan kapcsolt kondenzátorokat helyettesítő egyetlen kondenzátor kapacitásának a reciproka:

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Energiasűrűség elektrosztatikus térben

Az elektromos mező a töltésre erőt fejt ki, képes elmozdítani, rajta munkát végezni. Vagyis az elektromos mezőnek munkavégző képessége, más szóval energiája van.

Az elektromos mező energiája a síkkondenzátor példáján keresztül könnyen kiszámítható. Ugyanis, ha a $+Q$ töltésű fémlemez

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A}$$

térerősségű elektromos mezőjében a $-Q$ töltésű fémlemezt végtelen kicsiny távolságról d távolságra távolítjuk el, akkor az általunk végzett munkának az energia-megmaradás szerint meg kell egyeznie a

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

kapacitású síkkondenzátor energiájával:

$$E_c = Fd = QEd = Q \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} d = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 \frac{A}{d}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Ha figyelembe vesszük, hogy $C = Q/U$, akkor a kondenzátor energiája

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} UQ = \frac{1}{2} CU^2 = E_c$$

Homogén elektromos mező energiasűrűsége

Az energiasűrűség az elektromos mező és az általa kitöltött térrész térfogatának hányadosa:

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2}CU^2}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{A}{d}E^2d^2}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

E fenti összefüggés továbbvitelből adódik hogy

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

Elektromos tér vezetők és szigetelők jelenlétében

Vezetők esetében

A vezetőre vitt egynemű töltések között fellépő taszítóerő hatására a töltések a lehető legtávolabbi helyet, a vezető külső felületét foglalják el, a vezető belseje pedig egyensúlyban töltésmentes.

Mivel a vezető belsejében nincs elektromos töltés, ezért itt- összhangban a Gauss-törvénnyel az $\mathbf{E}$ térerősség zérus. A vezető külső felületén található töltés elektrosztatikai mezőjének $\mathbf{E}$ térerőssége a vezető külső felületére mindig merőleges. Ha ugyanis a térerősségnek lenne a felülettel párhuzamos összetevője, akkor a felületen levő töltésekre a felülettel párhuzamos erő hatna, a töltések elmozdulnának, nem állhatna fenn elektrosztatikai egyensúlyi állapot.

Csúcs hatás

A nem gömbszimmetrikus vezető külső felületén a töltéeloszlás nem egyenletes: a vezető élein és csúcsain, vagyis a nagy görbületű helyeken nagyobb a felületi töltéssűrűség és a vele arányos térerősség, mint a kisebb görbületűeken. Műszaki szempontból fontos ennek ismerte, mert pl. a csúcsok közelében a nagy térerősségű mezők hatására, a kritikus térerősség (átütési szilárdság) fölött a fém elveszíti töltését, kisülések jönnek létre.

A csúcsokon kialakuló nagy térerősséggel kapcsolatos a csúcs hatás. Ez abban nyilvánul meg, hogy a csúcsonál fellépő nagy térerősségű elektromos mező hatására a környező gáz (többnyire levegő) egyes molekulái elektromos megosztás révén dipólusokká válnak, a csúcsához mennek és a csúcscsal ellentétes előjelű töltésük semlegesítődik. Így a csúcs elektromos mezője a most már vele azonos előjelű gázionokat eltaszítja, légáram, ún. „elektromos szél” keletkezik.

Szigetelők esetében

~~Az $\varepsilon_r > 1$ relatív permittivitású szigetelőket (dielektrikumokat) belső szerkezetük alapján három csoportra oszthatjuk.~~

~~Vannak szigetelők, amelyeknek molekuláiban a protonok és az elektronok elektromos töltésközéppontja egybeesik. Külső elektromos mező hatására azonban a töltésközéppontok különválnak, a molekulák ún. indukált (keltett) dipólusokká alakulnak át, és a hőmozgás által korlátozott mértékben beállnak az elektromos térerősség irányába. Így viselkednek általában a szimmetrikus felépítésű molekulák, mint amilyen pl. a hidrogén, az oxigén, a benzol stb.~~

~~Ismereteseek olyan szigetelők is, amelyeknek molekulái külső elektromos mező nélkül is permanens (állandó) dipólusok. Ezek a hőmozgás következtében rendezetlenül helyezkednek el, elektromos mező hatására azonban többé-kevésbé szintén beállnak a térerősség irányába. Az ebbe a csoportba tartozó szigetelők molekulái általában aszimmetrikus felépítésűek, mint pl. a víz, a sósav stb.~~

Végül vannak olyan szigetelők is, amelyeknek egyes tartományait (doménjeit) külső elektromos mező nélkül is egyirányú dipólusok alkotják. Ezeket a tartományokat a külső elektromos mező kisebb-nagyobb mértékben a térerősség irányába fordítja. Az ilyen tulajdonságú anyagokat ferroelektromos anyagoknak nevezzük. Ferroelektromos tulajdonságot mutat a kálium-dihidrogén-foszfát és a bátium(II)titanát. Mindegyiknek igen nagy az ϵ_r relatív permittivitása, a 10^3 értéket is meghaladhatja, ezért előnyösen alkalmazhatók a kondenzátorokban szigetelőanyagként.

Polarizáció

~~A szigetelők elektromos mezőmódosító hatásának mélyebb megértése céljából tekintsünk egy vákuum-szigetelésű kétlemezes síkkondenzátort! Ennek fegyverzeteire vitt $+Q$ és $-Q$, ún. valódi (szabad) töltések E_0 térerősségű elektromos mezőt hoznak létre. Ha ezután a kondenzátor fegyverzetei közötti térrészt szigetelővel töltjük ki, akkor a szigetelő dipólusai a valódi töltések elektromos mezőjének hatására rendeződnek, és ennek következtében a dielektrikum felületén $+Q_p$ és $-Q_p$ ún. polarizációs töltések jelennek meg. Mivel a polarizációs töltés mindegyik fegyverzetnél az ott levő valódi töltéssel ellentétes előjelű, ezért a közegbeli E térerősségű elektromos mezőt a~~

$$Q' = Q + Q_p$$

~~ún. látszólagos töltés kelti, amelynek abszolút értéke $|Q'| = |Q| - |Q_p|$, vagyis kisebb, mint a $|Q|$ valódi töltés. A $|Q'| < |Q|$ folytán a közegbeli E térerősség kisebb a vákuumbeli E_0 térerősségnél. A térerősségnek ezt a csökkenését vesszük figyelembe az ϵ_r relatív permittivitással. Ez az oka annak is, hogy dielektrikumban a ponttöltések között ható Coulomb-erő a vákuumbeli Coulomb-erő ϵ_r -ed része.~~

11.) Egyenáramok

Szabad töltéshordozók

Vannak olyan berendezések (pl. akkumulátorok), amelyeknek $\mathbf{E}$ térerősségű elektromos mezője a fémek könnyen mozgó (szabad-, vegyérték-, valencia-, vezetési, delokalizált) elektronjait, az elektrolitok pozitív és negatív ionjait $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ erővel haladó (transzlációs) mozgásra kényszeríti. Ezeknek a töltéshordozóknak (elektronoknak, ionoknak) elektromos mező hatására kialakuló rendezett mozgását elektromos áramnak (pontosabban: vezetési elektromos áramnak) nevezzük.

Áramerősség, áramsűrűség fogalma, egysége

Áramerősség

Az elektromos áram hatásai a tapasztalat szerint intenzívebben jelentkeznek, ha a vezető bármely keresztmetszetén egységnyi idő alatt több töltés halad át. Ezt úgy fejezzük ki, hogy az intenzívebb hatásoknak nagyobb áramerősség (áramintenzitás) felel meg.

Megállapodás szerint a vezető teljes keresztmetszetén áthaladó Q töltés és a t áthaladási idő

$$I = \frac{Q}{t}$$

hányadosát áramerősségnek nevezzük. Ha értéke időben állandó, akkor az áramot egyenáramnak mondjuk.

Az áramerősség megmutatja a vezető teljes keresztmetszetén egységnyi idő alatt átáramló töltést; skalár fizikai mennyiség, iránya nincs, csak mérőiránya; egyenáramok esetén állandó, változó áramok esetén időben változik; SI-egysége az amper, jele: A . Meghatározása: $1 A = 1 C/s$ az elektromos áram erőssége, ha a vezető teljes keresztmetszetén $1 s$ alatt $1 C$ töltés halad át.

A változó erősségű áramot a pillanatnyi áramerősséggel (jele: i) jellemezzük. Megállapodás szerint i pillanatnyi áramerősségen értjük a vezető teljes keresztmetszetén Δt nagyon kicsi idő alatt áthaladó ΔQ töltés és a Δt idő hányadosát:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

A pillanatnyi áramerősség pontosan is megadható. Ha ugyanis Δt minden határon túl tart nullához ($\Delta t \rightarrow 0$), akkor

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

vagyis a pillanatnyi áramerősség a töltés idő szerinti differenciáhányadosa.

Áramsűrűség

Ha a töltésáramlás egyenletesen oszlik el a vezetőnek az áramlás irányára merőleges A keresztmetszetén, akkor áramsűrűségen (jele: J) értjük a

$$J = \frac{I}{A}$$

hányadost. Az áramsűrűség megmutatja az áramlás irányára merőlegesen felvett egységnyi keresztmetszeten átfolyó áram erősségét; vektor fizikai mennyiség, iránya minden pontban megegyezik a pozitív töltések valóságos vagy elképzelt mozgásirányával; SI-egysége az am-

per per négyzetméter, jele: A/m^2 . Meghatározása: 1 A/m^2 az elektromos áramsűrűség, ha az áramlás irányára merőleges 1 m^2 keresztmetszeten 1 A erősségű áram folyik át.

Differenciális Ohm-törvény, Ohm-törvény

Georg Ohm német fizikus állapította meg, hogy elektromos mező hatására a homogén vezetőben kialakuló áram erőssége egyenesen arányos a vezetőre jutó feszültséggel:

$$R = \frac{U}{I}$$

ahol R a vezető anyagi minőségétől és geometriai méreteitől (hosszától, keresztmetszetétől) függő fizikai mennyiség, a vezető elektromos ellenállása.

Mérésekkel megállapítható, hogy az l hosszához képest kis átmérőjű, A állandó keresztmetszetű homogén vezető (vezeték, huzal, vezetősál, lineáris vezető) R ellenállása:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

ahol a ρ arányossági együttható csak a vezeték anyagi minőségétől függő fajlagos (specifikus) ellenállás (rezisztivitás).

diffERENCIÁIs

Bos merda!

Vékony vonalas vezető esetén a vezető keresztmetszetét jellemző méret elhanyagolható a vezető hosszához képest, vagyis úgy tekintjük, hogy az áramsűrűség (j) egy adott keresztmetszet (A) minden pontjában ugyanakkora és a vezető hossz tengelyének irányába mutat. A vezető két sarka között a feszültség $U = Es$. Ha a vezetőt kisebb vezetődarabokkal közelítjük, akkor e darabokra igazak az alábbi összefüggések:

$$\sigma(s)E(s)A(s) = I$$

A vezetőn átfolyó áramerősséget az áramsűrűség-vektorból kapjuk:

$$I = \int_A \mathbf{j} dA = jA$$

Mindezekből

$$\boxed{j = \sigma E}$$

melyből következik, hogy

$$E(s) = \frac{I}{\sigma(s)A(s)}$$

A teljes vezetőre teljesül, hogy

$$\int_{(1)}^{(2)} E(s) ds = \Delta U = U$$

E két egyenletet fölhasználva

$$U = \int_{(1)}^{(2)} \frac{I}{\sigma(s)A(s)} ds = I \cdot \int_{(1)}^{(2)} \frac{1}{\sigma(s)A(s)} ds$$

Joule-hő

Az elektromos áram munkája a fogyasztó jellege szerint különféle energiaformákra alakulhat, pl. az elektromos motorokban mechanikai munkává és hővé, a fénycsővekben főleg sugárzási energiává.

a) Az R ellenállású homogén fém fogyasztóban elektromos mező hatására a töltéshordozók (szabadelektronok) rendezett mozgást végeznek, az elektromos mezőből energiát vesznek fel, de a rációnokkal való gyakori ütközés során folyamatosan le is adják, aminek következtében a fém vezető melegszik, vagyis nő a belső energiája. A belső energia növekedése azonban nem korlátlan, mert a felmelegedett vezető a környezetének adja át a felvett energiát. Termikus egyensúlyban – amikor a vezető hőmérséklete már nem változik – a fogyasztó éppen annyi hőmennyiséget, ún. Joule-hőt ad le környezetének, mint amennyi munkát az elektromos mező végez.

A munkavégzés egyenlő az U feszültség hatására bekövetkező ΔQ töltés áramlásával, azaz

$$\Delta W = U \Delta Q = UI \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t$$

Ellenállások soros és párhuzamos kapcsolása

Feszültségforrások a gyakorlatban

Feszültségforrásoknak nevezzük azokat a berendezéseket, amelyekben valamilyen energia, pl. elektromos generátorokban mechanikai energia, termoelemekben hő, galvánelemekben és akkumulátorokban kémiai energia, fénylemekben fényenergia – alakul át elektromos energiává. Velük mint töltésszivattyúkkal tartós elektromos áramlást tudunk létrehozni, és az általuk termelt elektromos energia a fogyasztóban alakul át másfajta energiává.

Elektromotoros erő, belső ellenállás fogalma

Az elektromotoros erő egy áramforrás üresjáratú feszültsége, a két elektróda közötti maximális feszültség (potenciálkülönbség), amit akkor mérhetünk, ha az áramforráson keresztül nem folyik áram. Jelölésére $\mathcal{E}$ szolgál, mértékegysége a volt.

Az elektromotoros erő formálisan az az erő, amelyet a két nyitott elektróda között keletkező potenciálkülönbség hoz létre. A potenciálkülönbséget a szétválasztott pozitív és negatív töltések okozzák, és ezáltal elektromos teret generálnak. Ha az áramforrásra egy áramkört kapcsolunk, akkor a két elektróda között áram fog folyni, többé nem mérhető az üresjáratú feszültség, hanem egy kisebb feszültség, amely azért csökken le, mert a záródó áramkörön keresztül áram folyik, mely átfolyva a telep belső ellenállásán feszültségesést okoz.

A belső ellenállás a telep szerkezeti kialakítása miatt jelenlévő ellenállás, mely úgy modellezhető, mintha a telep kivezetése között egy állandó üresjáratú feszültséget biztosító feszültség-generátor és egy vele sorosan kapcsolt R_b ellenállás lenne.

And things...

Random fact:

$$\mathcal{E} = IR_k + IR_b$$

A teljesítmény maximuma ott van, amikor $R_k = R_b$

Kirchhoff törvények

Összetett áramkörben (hálózatban) általában egynél több feszültségforrás és fogyasztó található. A hálózat jellemzői a kettőnél több vezeték találkozási pontjában kialakuló áram elágazási csomópontok, a csomópontokat összekötő ágaknak nevezett szakaszok és az ágakból felépült körök, az ún. hurkok.

A hálózatokban többnyire ismerjük a feszültségforrások elektromotoros feszültségét, a belső ellenállásokat és a fogyasztói ellenállásokat. Ismeretlenek azonban az ágakban folyó áramok erősségei és az egyes ellenállásokra jutó feszültségek. Ezek meghatározása szolgál a Kirchhoff törvények.

Kirchhoff I. törvénye (csomóponti törvény)

A törvény a töltésmegmaradás törvényének egyenes következménye. Stacionárius áramlás esetén ugyanis a hálózatban sehol sem halmozódhat fel elektromos töltés. A csomópontokra vonatkozóan ez azt jelenti, hogy a csomópontba t idő alatt beáramló $\sum_i Q_i^{(be)} = \sum_i I_i^{(be)} t$ töltésnek meg kell egyeznie az ugyanezen idő alatt a csomópontból kiáramló $\sum_i Q_i^{(ki)} = \sum_i I_i^{(ki)} t$ töltéssel, vagyis a fentieket összeadva t -vel való osztás után

$$\sum_i I_i^{(be)} = \sum_i I_i^{(ki)}$$

A csomópontba befolyó áramok erősségeinek összege tehát egyenlő a csomópontból kifolyó áramok erősségeinek összegével.

Ha a csomópontba befolyó áramok erősségét negatív, a kifelé folyókéét pedig pozitív előjellel látjuk el, akkor egy adott csomópontban az áramerősségek algebrai összege zérus:

$$\sum_i I_i = 0$$

Kirchhoff II. törvénye (huroktörvény)

E törvény tulajdonképpen az egyszerű áramkörre vonatkozó $\mathcal{E} = IR_k + IR_b$ Ohm-törvény általánosítása tetszőleges számú feszültségforrást és fogyasztót tartalmazó összetett áramkörre.

A huroktörvény szerint bármely egyenáramú körben az R_k fogyasztói ellenállásokra jutó IR_k feszültségek és az R_b belső ellenállásokra jutó IR_b feszültségek összege egyenlő a körben levő feszültségforrások $\mathcal{E}$ elektromotoros feszültségeinek összegével:

$$\sum IR_k + \sum IR_b = \sum \mathcal{E}$$

12.) Időben állandó és változó mágneses erőtterek

Mágneses alapjelenségek

Könyörgöm, ide most tényleg azt kell írni, hogy Magnesia városának pásztorai utálták azokat a köveket, amik hozzáragadtak a pásztorbothoz?

Oersted-kísérlete

Az elektromos és a mágneses jelenségek között először Hans Oersted dán fizikusnak és kémikusnak sikerült kapcsolatot teremtenie 1820-ban. Kimutatta, hogy az elektromos áramot szállító vezető közelébe vitt mágnesűre ugyanúgy, mint a permanens mágnes mágneses mezőjében erőnyomaték hat és ennek következtében eredeti észak-déli irányából kitér. E kísérleti tapasztalatból arra következtethetünk, hogy az elektromos áramnak mint mozgó töltésnek mágneses mezője van. Ez a mágneses mező nemcsak a mágnesűre, hanem az áramtekercsre is képes erőnyomatékot gyakorolni, az áramvezetőre és a mozgó töltésre erőt kifejteni.

Erőhatás mágneses térben (Lorentz-erő)

Az $\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ mágneses erő megnyilvánulásának négy speciális, de gyakorlatilag fontos esetét vizsgáljuk.

- Ha a ponttöltés a mágneses mezőben nyugszik, vagyis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, akkor mágneses erő nem hat rá.
- Ugyancsak zérus a Lorentz-erő akkor, ha a ponttöltés $\mathbf{v}$ sebessége a $\mathbf{B}$ vektorral párhuzamos.
- Ha a Q ponttöltés $\mathbf{v}$ sebessége a $\mathbf{B}$ indukcióra merőleges, akkor a ponttöltésre ható $\mathbf{F}$ mágneses erő nagysága QvB , iránya pedig merőleges $\mathbf{v}$ -re is, meg $\mathbf{B}$ -re is. Mivel a $\mathbf{v}$ -re merőleges $\mathbf{F}$ -nek $\mathbf{v}$ irányába eső komponense zérus, ezért a mágneses erő a ponttöltés sebességének csak az irányát tudja megváltoztatni. Ennek következtében a ponttöltés r sugarú pályán egyenletes körmozgást végez. A körmozgáshoz szükséges mv^2/r centripetális erőt a QvB mágneses erő szolgáltatja.

$$m \frac{v^2}{r} = QvB$$

Innen a ponttöltés pályájának sugara:

$$r = \frac{mv}{QB}$$

- Ha homogén mágneses mezőben a ponttöltés $\mathbf{v}$ sebessége a $\mathbf{B}$ -vektorral tetszőleges α szöget zár be, akkor a mozgás leírására célszerű a $\mathbf{v}$ sebességet felbontani egy $\mathbf{B}$ -re merőleges $\mathbf{v}_1$ és egy vele párhuzamos $\mathbf{v}_2$ komponensre.

A $\mathbf{B}$ -re merőleges $\mathbf{v}_1$ komponens folytán a ponttöltés (pl. proton, elektron) pályájának xz síkba eső vetülete

$$r = \frac{mv_1}{QB}$$

sugarú körpálya, amelyet

$$T = \frac{2\pi r}{v_1} = 2\pi \frac{m}{QB}$$

idő alatt fut be, és ez az idő független a ponttöltés sebességétől. A $\mathbf{B}$ -vel azonos (vagy ellentétes) irányú $\mathbf{v}_2$ sebességkomponenst viszont a mágneses mező megváltoztatni nem tudja, ezért a ponttöltés pályájának y irányú vetülete $\mathbf{B}$ -vel megegyező (vagy ellentétes) irányú egyenletes mozgást végez. A két mozgás eredője csavarvonalon történő mozgás lesz, amelynek menetemelkedése:

$$s = v_2 T = v_2 2\pi \frac{m}{QB}$$

Töltött részecskék mozgása mágneses térben

Mágneses eltérítés, ciklotron

Ez mind ott van fönt, kivéve a ciklotront, ami a füzetemben van, de majd ide lesz írva valamilyenkor (SOHA!)

~~Áramvezetőre ható erő~~

~~Egyenes áramvezetőre ható erő mágneses mezőben~~

$$\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} I \sum \Delta \mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$$

~~Mágneses dipólusra ható forgatónyomaték~~

Gerjesztési törvény és alkalmazásai

13.) Maxwell egyenletek

