Számosságok

Elmélet

Egy A és egy B halmazról akkor mondjuk, hogy egyenlő a számosságuk, ha létezik egy f: A→B függvény, amely a két halmaz elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít. $|A| = |B|$
Akkor mondjuk, hogy A számossága legalább akkora, mint B számossága, ha van A-nak olyan részhalmaza, amely B-vel egyenlő számoságú. $|A| \geq |B|$

Egy A halmaz véges számoságú, ha van olyan véges k szám, amelyre az {1, 2, 3, … , k} halmaz és az A halmaz egyenlő számoságú.

<u>Megszámlálhatóan végtelen számosság:</u>
Egy halmaz megszámlálhatóan végtelen számoságú (rövidebben megszámlálható), ha a természetes számok halmazával egyenlő számoságú. Ez azt jelenti, hogy elemei sorba rendezhetőek, hiszen a sorba rendezés egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a halmaz és a természetes számok halmaza között, minden elemhez a sorszámát rendeljük.

Állítás: ha A megszámlálható és a tőle diszjunkt B véges, akkor AUB megszámlálható

Állítás: ha véges sok (legyen k db) diszjunkt A_i halmazunk van, amelyek mindegyike megszámlálható, akkor $\bigcup_{i=1}^{k} Ai$ megszámlálható.

Állítás: ha megszámlálhatóan sok, diszjunkt A_i halmazunk van, amelyek mindegyike megszámlálható, akkor az uniójuk megszámlálható.

Állítás: A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számoságú.

<u>Kontinuum számoságú halamazok:</u>
A valós számok **R** halmazát kontinuum számoságúnak nevezzük.

Állítás: legyen A véges vagy megszámlálhatóan végtelen számoságú halmaz, B pedig tőle diszjunkt kontinuum számoságú halmaz. Ekkor: $|A|\cup|B| = |B|$

Állítás: kontinuum számoságú
- bármely egynél több számot tartalmazó intervallum ([a,b])
- bármely véges n számra az n dimenziós tér pontjainak halmaza (pl. a sík pontjainak halmaza, a tér pontjainak halmaza)

Feladatok

1. Adjunk bijekciót a következő halmazok között:

a) **Q**, [0,1] - be eső racionális számok halmaza (jelöljük A-val)

***Q**-nak a [0,1] - be eső racionális számok halmaza egy részhalmazát adja, így nem lehet nagyobb a számosság **Q**-nál A-nak, azaz A elemei felsorolhatók: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ A bijekciót úgy tudjuk megadni, hogy ha tekintjük A és **Q** felsorolását, akkor az azonos indexű elemeiket rendeljük egymáshoz:*

$$f: A \to \mathbf{Q} \qquad f(a_i) = q_i \quad \text{ahol } q_i \ \mathbf{Q} \text{ felsorolásában az i-edik elem}$$

b) [0,1] és (0,1]

A 0-t bele kell képeznünk a (0,1] intervallum egy x_0 pontjába, az x_0 pontot egy x_1-be… Ügyelnünk kell arra, hogy így végtelen sorozatot kapjunk, ezáltal biztosított, hogy bijekciót létesítünk.

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-1}, x = 0 \\ 2^{-1-k}, x = 2^{-k} \\ x, különben \end{cases}$$

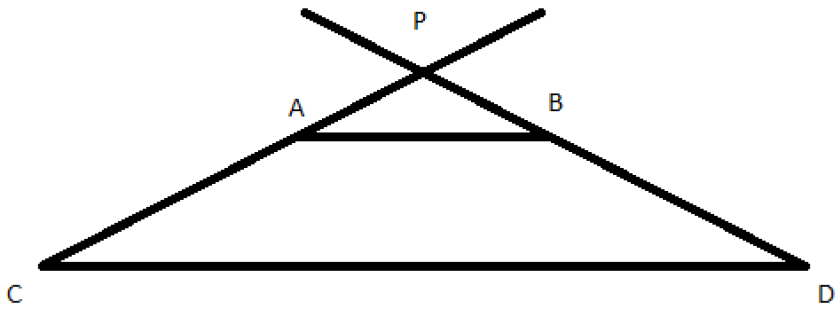
c) [0,1], (0,1)

Ebben az esetben az 1-et is bele kell képeznünk a (0,1) intervallumba:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-1}, x = 0 \\ 2^{-1-k}, x = 2\text{^}(-k) \\ 1 - 2^{-2}, x = 1 \\ 1 - 2^{-k-2}, x = 1 - 2^{-k-1} \\ x, különben \end{cases}$$

d) [0,1], [a,b]

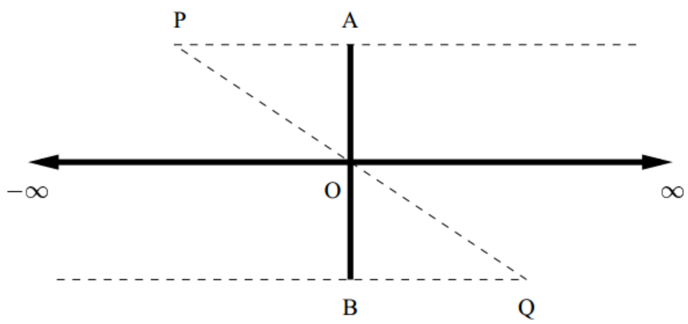
Rajzoljuk fel a [0,1] intervallumot, mint egy AB szakaszt és vele párhuzamosan az [a,b] intervallumot, mint egy CD szakaszt. Kössük össze Az A és a C pontot, a B és a D pontot. Az így kapott két szakaszt hosszabbítsuk meg, úgy hogy a két szakasz metssze egymást. A metszéspontot jelöljük P - vel. (Persze lehetséges, hogy nem kapunk metszéspontot, de akkor a feladat triviális.)



A P pontból való vetítés lesz a bijekció.

e) (0,1), $(-\infty, \infty)$

Tekintsük a síkon az y = 0 egyenest, mint a $(-\infty, \infty)$ intervallumot és az AB szakaszt, mint a (0,1) intervallumot, ahol A = (0,1/2), B = (0,-1/2). Készítsük el így a következő ábrát:



A P pontból az AO szakaszt a nemnegatív félegyenesre, a Q pontból az OB szakaszt a negatív félegyenesre vetítjük, ezen két vetítés adja meg a bijekciót.

2. Határozzuk meg az alábbi halmazok számosságát. (Az egyszerűség kedvéért a vizsgálandó halmazra mindig A-val fogunk hivatkozni.)

a) A páratlan természetes számok halmaza.

Keressünk egy olyan függvényt, amely az A halmaz és a természetes számok halmaza között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít.
*Legyen f: A → **N** , f(n) =* $\frac{n-1}{2}$

b) A 3-mal osztható természetes számok halmaza.

$$f(n) = \frac{n}{3}$$

c) Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet pontjainak halmaza.

Egyrészt A tartalmazza a [0,1] intervallumot, amelyről már korábban beláttuk, hogy kontinuum számoságú, azaz |A| ≥ c.
Tekintsük az alábbi hozzárendelést:

$$(x,y) \to 0,x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots, \quad \text{ahol } x = 0,x_1x_2x_3\ldots, \quad y = 0,y_1y_2y_3\ldots$$

A leképzéssel kapott számok elemei a [0,1] intervallumnak. Így A minden pontjához hozzárendelünk egy a többitől különböző számot a [0,1] intervallumból, azaz |A| ≤ c

A két egyenlőtlenségből pedig következik, hogy |A| = c.

d) A sík pontjainak halmaza.

*Rögzített y-ra ugyanannyi {(x,y), x Є **R**} alakú számpár van, mint amennyi {(x,y), x Є [0,1]} alakú létezik. Rögzített x-re szintén ugyanannyi {(x,y), y Є **R**} alakú számpár van, mint amennyi {(x,y), y Є [0,1]}. Ebből adódik, hogy {(x,y), x,y Є **R**} számossága megegyezik {(x,y), x,y Є [0,1]} számosságával, amiről már beláttuk, hogy kontinuum.*

d) A három-dimenziós tér pontjainak halmaza.

*Rögzített y, z - re ugyanannyi {(x,y,z), x Є **R**} alakú hármas van, mint amennyi {(x,y,z), x Є [0,1]} alakú. Rögzített x, z - re ugyanannyi {(x,y,z), y Є **R**} alakú hármas van, mint amennyi {(x,y,z), y Є [0,1]} alakú. Rögzített x, y - ra ugyanannyi {(x,y,z), z Є **R**} alakú hármas van, mint amennyi {(x,y,z), z Є [0,1]} alakú számhármas.*
Elegendő tehát az egységkocka számosságát belátni:
Egy rögzített z - re az egységkockának egy N(z) metszete tartozik, amely egy egységnégyzetet ad. Az egységnégyzet pontjai és a [0,1] intervallum pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető az előző feladat szerint, azaz bármely (x,y) - nak megfeleltethető egy a Є [0,1]. Az egységkocka pontjai így kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetőek az egységnégyzet pontjainak: minden (x,y,z) ponthoz egy (a,z) pont tartozik. Tehát az egységkocka számossága megegyezik az egységnégyzet számosságával, amely éppen kontinuum. |A| = c.

e) A sík azon pontjai, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám.

Tudjuk, hogy az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú, hiszen elemeiket fel tudjuk sorolni az alábbi módon: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, … Tekintsünk egy rögzített y - t. Ezen rögzített y - t nézve megszámlálható sok (x, y) alakú számpár van, hiszen y rögzített, x pedig végigfut az egész számok halmazán, amely megszámlálható. y - t tetszőleges egész szám mellett rögzíthetjük, azaz megszámlálhatóan sok módon rögzíthető y. A megszámlálhatóan sok rögzített y mindegyikéhet tartozik egy megszámlálható számosságú halmaz. Megszámlálhatóan sok A_i *halmazunk van, amelyek mindegyike megszámlálható, ezek uniója pedig megszámlálható.*

f) Hány egyenes szükséges ahhoz, hogy lefedjük a síkot?

Tekintsük az origón átmenő egyeneseket, amelyek az x - tengellyel $\alpha \in [-\pi, \pi)$ *szöget zárnak be. Minden α - hoz egy egyenes tartozik, és α - ból kontinuum sok van, tehát kontinuum sok egyenesünk van, amelyek lefedik a síkot.*

Források:
http://digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/dmat/szamossag_pl.pdf
(Itt további hasznos gyakorló feladatok is találhatóak.)