

Számosságok

Az órai anyag a legjobb alap amire ennél a résznél építkezhetsz, először azt tanuld meg!!

Állapítsuk meg a következő halmazok számosságát!

(„Alef null” = megszámlálhatóan végtelen, „c”= kontinuum)

1. A páratlan természetes számok halmaza, $A = \{1,3,5,7,\dots\}$.

Az alábbi hozzárendelés bijekció N és A között: $f : A \rightarrow N; m \mapsto f(m) = \frac{m-1}{2}$.

2. $A = \{\text{hárommal nem osztható egész számok}\}$.

Rendezzük sorba A elemeit így: 1,-1,2,-2,4,-4,5,-5,... . Ez egy bijekciót definiál A és N között, tehát A számossága megszámlálhatóan végtelen.

3. $A = \{\text{A 256 karakterből készíthető, 100 karakter hosszúságú sorozatok}\}$.

A véges halmaz, $|A| = 256^{100}$.

4. A valós számok halmaza

Vegyük fel a (0,1) intervallumot egy $\frac{1}{\pi}$ sugarú félkörön a valós számegetesen fölött, majd vetítsük a félkör pontjait a számegetesre a kör középpontjából. Ez egy bijekció (0,1) és R között, ezért az R kontinuum számosságú.

5. A [0,1) valós intervallum.

Egy f(x) bijekció [0,1) és (0,1) között: $f(x)=0.5$, ha $x=0$; $f(x)=2^{-k-1}$, ha $x=2^{-k}$ ($k \geq 1$ és egész); $f(x)=x$ egyébként. Tehát ez is kontinuum számosságú.

6. A [0,a) valós intervallum.

Bijekció: az előző intervallum elemeit szorozzuk meg a-val.

Előadásról: Egységnyi oldalhosszúságú, $(0,1) \times (0,1)$ négyzet pontjainak halmaza (legyen ez A). Sejthető, hogy a halmaz kontinuum számosságú. $(0,1) \subset A$, ezért $|A| \geq c$. Megfordítva, adott (x,y) koordinátájú ponthoz (ahol $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ és $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$) rendeljük a $z = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \dots$ számot. Ezek mind különbözők, ezért $|A| \leq c$. (A véges tizedes törteket is végtelenként kell kezelni az egyértelműséghez, pl. $0,724 = 0,7239999999\dots$). A kettőt együtt véve $A=c$.

7. Egységnyi oldalhosszúságú kocka, $A=(0,1) \times (0,1) \times (0,1)$ pontjainak halmaza milyen számosságú?

Visszavezethetjük az előző feladatra. Bármelyik adott z koordinátához a kockának egy négyzet alakú N(z) metszete tartozik, amelyikről az előző feladatból tudjuk, hogy kontinuum számosságú, ezért minden (x,y) koordinátájú pontja megfeleltethető egy v számnak a szintén kontinuum számosságú (0,1) intervallumból. Vagyis egy adott (x,y,z) koordinátájú ponthoz egyértelműen rendelhetünk egy (v,z) számpárt a $(0,1) \times (0,1)$ halmazból, amelyről viszont már tudjuk, hogy kontinuum számosságú, ezért A is az.

HF: Lássuk be (teljes indukcióval), hogy minden $n \geq 1$ egész számra a $(0,1)^n$ kontinuum számosságú halmaz!

8. A kétdimenziós sík pontjainak halmaza.

Ennek részhalmaza a 7. feladat négyzete, emiatt a sík **legalább** kontinuum számosságú. A sík pontjai ugyanakkor egy a sík fölött elhelyezkedő egységsugarú félgömb segítségével a gömb középpontjába vetíthetők, azaz minden gömbfelületi ponthoz bijektíven rendelhető a síknak egy pontja. A félgömb így paramétrezhető: (ϑ, ϕ) , ahol $\vartheta \in (0, \pi)$ és $\phi \in [0, 2\pi)$. Mivel mindkét halmaz kontinuum számosságú, ezért a 7. feladathoz hasonló indoklással kapható, hogy Descartes-szorzatok is ilyen, azaz a félgömb pontjainak számossága kontinuum. A definiált bijekció ebbe a halmazba képez, ezért a sík pontjainak számossága is kontinuum.

HF: Háromdimenziós tér pontjainak halmaza.

HF: Lássuk be, hogy az R^n (n pozitív egész) halmaz számossága is kontinuum.

9. Irracionális számok halmaza.

Tekintsük azt az $f(x): R \rightarrow R - Q$ leképezést, amelyre $f(x) = \frac{p}{q} \pi^{k+1}$, ha $x = \frac{p}{q} \pi^k$, ahol p és q egész,

k pedig természetes szám; $f(x) = x$ egyébként. Könnyen látható, hogy ez bijekció a valós és irracionális számok között.

10.a) Természetes számokból álló rendezett párok halmaza.

$(0,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (1,0) \rightarrow (2,0) \rightarrow (1,1) \rightarrow (0,2) \rightarrow (0,3) \rightarrow (1,2) \rightarrow (2,1) \rightarrow (3,0) \rightarrow (4,0) \rightarrow \dots$

sorba rendezés definiál egy bijekciót a halmaz és a természetes számok halmaza között. Ezért megszámlálhatóan végtelen számosságú. (cikk-cakk módszer)

10.b) A természetes számokból álló rendezett n-esek számossága.

Az előző feladat azt is igazolta, hogy általában két tetszőleges megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz Descartes-szorzata is megszámlálhatóan végtelen számosságú. (cikk-cakk módszer alapján) Ilyen módon teljes indukcióval könnyen látható, hogy n darab megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz, jelen esetben N , Descartes-szorzata is megszámlálhatóan végtelen számosságú.

11. Hány egyenessel fedhető le a sík?

A sík lefedhető az origó körüli egységsugarú körre fektetett, origón átmenő egyenesekkel, amelyeknek x tengellyel bezárt szöge $\alpha \in [0, \pi)$, ez utóbbi pedig kontinuum számosságú halmaz, ezért ugyanennyi egyenesre van szükség. (Vagy: a valós számegyenesre merőleges egyenesekkel is lefedhető a sík, s ezek számossága megint csak megegyezik a számegyenes pontjainak számosságával.)

12. Hány olyan pont van a síkon, amelynek mindkét koordinátája egész szám? ($Z \times Z = Z^2$)

Kicsit hasonló a 10. feladathoz. Induljunk ki az origóból:

$(0,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (1,1) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,-1) \rightarrow (0,-1) \rightarrow (-1,-1) \rightarrow (-1,0) \rightarrow (-1,1) \rightarrow (-1,2) \rightarrow (0,2) \rightarrow \dots$

Ez a sorozat egy „szögletes spirált” definiál az origó körül, amely így egy bijekciót határoz meg N és a vizsgált egész koordinátájú ponthalmaz között, vagyis a halmaz megszámlálhatóan végtelen számosságú.

HF: Hány olyan pont van a síkon, amelynek mindkét koordinátája racionális szám

(Táblázatba rendezve az órán tanult módon a $Q \times Q$ racionális számpárokat cikk-cakk módszerrel rendezhetjük, ezzel megadható bijekció N és e halmaz között, így belátható, hogy számosságuk megszámlálhatóan végtelen.

13. Legfeljebb hány 8-as helyezhető el a síkon úgy, hogy ne messék egymást?

Megszámlálhatóan végtelen számosságú biztosan elhelyezhető, ehhez elég a koordinátahálózat négyzetrácsába beírni a 8-asokat. De ennél több nem is helyezhető el, mert bármekkora 8-asokról is legyen szó, minden 8-as mindkét lyukában van olyan pont, amelynek mindkét koordinátája racionális szám, vagyis az ilyen pontok száma (amely megszámlálhatóan végtelen, lásd előző HF) biztosan \geq a nyolcasok számánál, azaz a 8-asok számossága csak megszámlálhatóan végtelen lehet.

14. Hány olyan háromszög rajzolható a síkra, amelynek területe egész szám?

Legyen a háromszögek ezen halmaza H . Ekkor biztos, hogy $|H| > c$, hiszen adott egész T területű háromszög önmagával párhuzamosan eltolható a síkon egy tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ -nek megfelelő távolsággal mondjuk az x tengely irányában. Ugyanakkor $|H| < c$, mert adott háromszöghöz hozzárendelhetjük a három csúcs összesen 6 koordinátáját, ezzel definiálva egy valós számhatost. Ez az \mathbb{R}^6 -nak eleme, amely kontinuum számosságú. Ezért $|H|=c$.

15. Mennyi egy háromszög belső pontjainak száma?

Legfeljebb kontinuum, hiszen a háromszög része a kontinuum sok pontot tartalmazó síknak, és legfeljebb kontinuum sok, hiszen minden háromszögben van olyan szakasz, amely maga is kontinuum sok pontból áll. A két korlát együtt azt eredményezi, hogy a belső pontok száma is kontinuum.

16.

a, Hány olyan egység sugarú kör rajzolható a síkra, aminek a középpontjának koordinátái egész számok? (metszhetik egymást a körök)

b, Hány olyan kör rajzolható a síkra, aminek a középpontjának koordinátái, és a sugara is egész szám? (metszhetik egymást a körök)

c, Mennyi az origó középpontú egység sugarú kör belső pontjainak számossága? A bizonyításhoz add meg a megfelelő bijektív függvényt!

d, Hány origó középpontú körvonallal fedhető le a sík? A bizonyításhoz itt is add meg a megfelelő bijektív függvényt!

M.o.:

a, A kérdés valójában annyi, hogy hány olyan pont van a síkon amelynek mindkét koordinátája egész szám! Ez ilyen pontok számossága megszámlálhatóan végtelen, egy lehetséges felsorolás: első helyen az origó áll, aztán csigavonalban sorban a többi!

b, A sík egész koordinátájú pontjait az 1,a, feladat szerint felsorolhatjuk, és minden egyes ponthoz tartozik a 0,1,2,3,... sugarú körök megszámlálhatóan végtelen halmaza! Megszámlálhatóan végtelenszer megszámlálhatóan végtelen is megszámlálható, például a táblázatba rendezős módszerrel!

c, A kört felvetíthetjük egy félgömbre, a félgömböt a gömb középpontjából rávetíthetjük a síkra, a sík pedig kontinuum számosságú! Más lehetőség: polár koordinátákkal!

d, Az összes origó középpontú körvonalra szükség van! Mindenkörhöz a sugarát hozzárendelve, megadtunk egy bijektív függvényt a körök és a $[0, \infty)$ intervallum között, a $(0, \infty)$ tartalmazza a $(0,1)$ -et vagyis legalább kontinuum és benne van a $(-\infty, \infty)$ -ben, tehát legfeljebb kontinuum. Így kontinuum sok körre van szükség.

17. Igazolja a megfelelő bijekció megadásával (rajzzal és vetítéssel), hogy az alábbi halmazok számossága megegyezik! (Ebből kis meggondolással arra is tudunk következtetni, hogy mindegyik kontinuum számosságú)

a, $(0,1)$ intervallum és az \mathbb{R} valós számok halmaza

b, (a,b) intervallum és az \mathbb{R} valós számok halmaza

- c, (0,1) és (a,b) intervallumok
- d, Egyetlen pontban kilyukasztott körvonal és a valós számok halmaza
- e, Körvonal és négyzet-vonal
- f, Egyetlen pontban kilyukasztott gömbfelszín és az \mathbb{R}^2 sík pontjai (sztereografikus projekció)
- g, Két különböző sugarú körfelület
- h, Két tetszőleges különböző oldalhosszúságú szabályos háromszög (mint felület)
- i, Félgömb felszín és sík

18. Adja meg az alábbi halmazok számosságát:

- a, Komplex számok
- b, Azon komplex számok melyeknek valós és képzetes része is egész szám
- c, Azon komplex számok melyeknek valós és képzetes része is racionális szám
- d, Azon komplex számok halmaza melyeknek képzetes része $3i$.
- e, Azon komplex számok melyeknek valós és képzetes részének abszolút értéke is kisebb mint 2

M.o.:

a, $a+bi$ komplex szám \rightarrow (a,b) valós számpár

Ez egy bijektív hozzárendelés \mathbb{C} és \mathbb{R}^2 között, \mathbb{R}^2 -ről pedig tudjuk, hogy kontinuum.

b, $a+bi \rightarrow (a,b)$ bijekció azon komplex számok melyeknek valós és képzetes része is egész szám és az egész számpárok (\mathbb{Z}^2) között., \mathbb{Z}^2 pedig tudjuk, hogy megszámlálhatóan végtelen.

c, $a+bi \rightarrow (a,b)$ bijekció azon komplex számok melyeknek valós és képzetes része is racionális szám és a racionális számpárok (\mathbb{Q}^2) között., \mathbb{Q}^2 pedig tudjuk, hogy megszámlálhatóan végtelen.

d, $a + 3i \rightarrow a$

Ez bijekció a $3i$ képzetes részű komplex számok és a valós számok között, \mathbb{R} pedig kontinuum.

e, Véges halmaz, a valós és képzetes rész is $-1,0,1$ értékeket vehet fel (3 lehetőség), az összes lehetőségek száma és így a halmaz számossága: $3^2 = 9$

Nagyságrendek

1, $2^n = O(n!)$

Biz.: $2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 \leq 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) = 2 \cdot n!$ minden $1 \leq n$ természetes szám esetén

\rightarrow Létezik $n_0 = 1$ küszöbindex és $C = 2$ konstans melyre teljesül, hogy $2^n \leq C \cdot n!$ minden $n_0 \leq n$ természetes szám esetén.

(Máshogy: $2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 \leq 1 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n) = 1 \cdot n!$ ha az $n \geq 4$

\rightarrow Tehát $n_0 = 4$ küszöbindex és $C = 1$ konstans esetén is teljesül, hogy $2^n \leq C \cdot n!$ minden a küszöbindexnél nagyobb $n_0 \leq n$ természetes számra.)

2, Az alábbi állításokról döntse el, és igazolja, hogy igazak-e vagy sem!

a, $5n^3 + 7 = O(n^3)$

b, $5n^3 + 7 = \Omega(n^3)$

c, $5n^3 + 7 = \Theta(n^3)$

d, $5n^3 + 7 = O(n^2)$

e, $5n^3 + 7 = \Omega(n^2)$

f, $5n^3 + 7 = \Theta(n^2)$

g, $n^2 + 7n + 3 = O(n^4)$

h, $n^2 + 7n + 3 = \Omega(n^4)$

i, $n^2 + 7n + 3 = \Theta(n^4)$

j, $n^2 + 7n + 3 = O(n^2)$

k, $n^2 + 7n + 3 = \Omega(n^2)$

l, $n^2 + 7n + 3 = \Theta(n^2)$

m, $n^4 = O(3n^7)$

n, $n^4 = \Omega(3n^7)$

o, $n^4 = \Theta(3n^7)$

p, $n^2 = O(n^2 + 4n + 1)$

q, $n^2 = \Omega(n^2 + 4n + 1)$

r, $n^2 = \Theta(n^2 + 4n + 1)$