Bevezetés a számításelméletbe I.

Számosságok

Megoldások

írta: Salamon Gábor <gsala@cs.bme.hu>

1. Adjunk bijekciót (oda-vissza egyértelmű leképezést) az alábbi halmazok között.

(a) $\mathbb{Q}$ és az $[a, b]$ intervallumba eső racionális számok

Megoldás. Az $[a, b]$ intervallumba eső racionális számok A halmaza a $\mathbb{Q}$ egy részhalmazát adja, így nem lehet nagyobb számosságú, mint $\mathbb{Q}$, azaz a racionális számok halmaza. Ebből következően A elemei felsorolhatók, akárcsak $\mathbb{Q}$ elemei.

Soroljuk fel tehát mind A, mind $\mathbb{Q}$ elemeit, és a két felsorolás azonos indexű elemeit rendeljük egymáshoz a bijekcióval.

(b) $[0, 1]$ és $[0, 1)$

Megoldás. A megoldás lényege ugyanaz, mint amikor még egy vendéget kellett elszállásolni a teli végtelen szállodába. A 0-t beleképezzük a $(0, 1]$ intervallum egy x_0 pontjába, x_0-t egy x_1-be és így tovább, ügyelve arra, hogy x_i-k végtelen sorozatot alkossanak, ez utóbbi biztosítja a leképezés bijekció voltát azáltal, hogy minden elem ősképe egyértelműen meghatározható.

Ennek megfelelően az $f(x) : [0, 1] \mapsto (0, 1]$ bijekció például a következő lehet:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-1}, & \text{ha } x = 0 \\ 2^{-k-1}, & \text{ha } x = 2^{-k} \\ x, & \text{különben} \end{cases}$$

Könnyű látni, hogy ez valóban kölcsönösen egyértelmű leképezést definiál, hiszen $f(x)$ definíciója alapján bármely elem ősképe könnyen meghatározható.

(c) $[0, 1]$ és $(0, 1)$

Megoldás. Az 1b. feladat megoldásának gondolatmenetét követjük itt is, azzal a különbséggel, hogy itt az 1-et is bele kell képezni a nyílt intervallumba. Egy lehetséges $f(x) : [0, 1] \mapsto (0, 1]$ leképezés (amiről ráadásul könnyen látszik, hogy bijekció) a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-1}, & \text{ha } x = 0 \\ 2^{-k-1}, & \text{ha } x = 2^{-k} \\ 1 - 2^{-2}, & \text{ha } x = 1 \\ 1 - 2^{-k-2}, & \text{ha } x = 1 - 2^{-k-1} \\ x, & \text{különben} \end{cases}$$

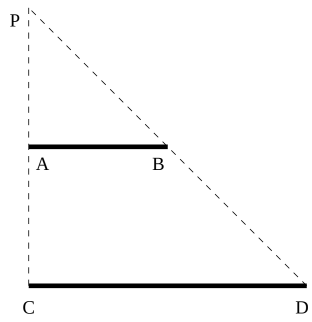
(d) $[0, 1]$ és $[a, b]$

Megoldás. Rajzoljuk le a síkra a $[0, 1]$ intervallumot, mint AB szakaszt és vele párhuzamosan, (de nem egy egyenesbe esően) az $[a, b]$ intervallumot, mint CD szakaszt. Legyen P az AC és BD szakaszok egyeneseinek metszéspontja. (Ilyen mindig van, ha $b - a \neq 1$, különben pedig a feladat triviális.) Az AB szakasz pontjait a CD szakasz pontjaival kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozza egy P-ből való vetítés. Ez a vetítés adja a bijekciót a megfelelő intervallumok pontjai közt is. (Lásd az 1. ábrát.)

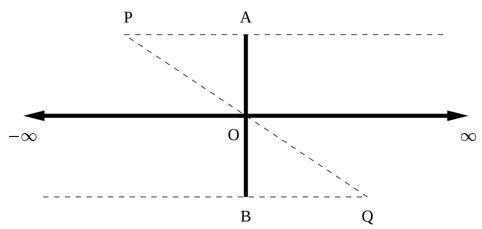
(e) $(0, 1)$ és $(-\infty, \infty)$

Megoldás. Egy lehetséges bijekcióhoz tekintsük a sík $y = 0$ egyenesét, mint $(-\infty, \infty)$ intervallumot, és az AB szakaszt, mint $(0, 1)$ intervallumot, ahol $A = (0, \frac{1}{2})$ és $B = (0, -\frac{1}{2})$. O jelölje az origót. A bijekciót úgy kapjuk, hogy az AO szakaszt a $P = (-1, \frac{1}{2})$ pontból a nemnegatív félegyenesre, a BO szakaszt pedig a $Q = (1, -\frac{1}{2})$ pontból a negatív félegyenesre vetítjük. (Lásd a 2. ábrát.)

(f) $(0, \infty)$ és $(-\infty, \infty)$



1. ábra.



2. ábra.

Megoldás. Keresünk egy $f(x) : (0, \infty) \mapsto (-\infty, \infty)$ bijekciót. Céljainknak pont megfelel az $f(x) = lnx$ függvény.

(g) *{valós számok}* és *{irracionális számok}* (azaz $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Megoldás. Tekintsük a következő $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ leképezést:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p}{q}\pi^{k+1}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}\pi^k, \text{ ahol } p, q \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \\ x, & \text{különben} \end{cases}$$

Ez minden $\frac{p}{q}$ alakú racionális számhoz annak π-szeresét rendeli, ezzel beleképezve őket az irracionális számok halmazába. Az ezek képeként előálló számokat is más számokba viszi át, és így tovább a fentiek szerint.
Látszik, hogy minden irracionális szám ősképe egyértelműen meghatározható. Ráadásul mivel π transzcendens szám, azaz nem áll elő egész együtthatós polinom gyökeként, ezért minden $\frac{p}{q}\pi^{k+1}$ alakú szám valóban irracionális.

2. Határozzuk meg a következő A halmazok $|A|$ számosságát!

(a) a páratlan természetes számok halmaza

Megoldás. Tekintsük azt a leképezést, ami minden n páratlan természetes számhoz az $m = \frac{n-1}{2}$ természetes számot rendeli. Ez a leképezés a két halmaz között kölcsönösen egyértelmű (bijekció), tehát a két halmaz számossága megegyezik, azaz A-nak megszámlálhatóan végtelen sok eleme van. Vagyis $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

(b) a 3-mal osztható természetes számok halmaza

Megoldás. Tekintsük azt a leképezést, ami minden 3-mal osztható n természetes számhoz az $m = \frac{n}{3}$ természetes számot rendeli. Ez a leképezés a két halmaz között kölcsönösen egyértelmű (bijekció), tehát a két halmaz számossága megegyezik, azaz A-nak megszámlálhatóan végtelen sok eleme van. Vagyis $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

(c) a 3-mal nem osztható egész számok halmaza

Megoldás. Rendezzük sorba A elemeit a következő módon: $1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, \ldots$. Ez a sorbarendezés tulajdonképpen egy leképezése A halmaz elemeinek a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ természetes számokra, ahol minden elemnek a sorozatban elfoglalt pozicióját, mint természetes számot feleltetjük meg. Látható, hogy az A halmaz minden eleme sorra kerül pontosan egyszer, tehát a leképezés bijekció. Azaz a két halmaz számossága megegyezik, így A-nak megszámlálhatóan végtelen sok eleme van. Vagyis $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

(d) a 256 karakterből készíthető 100 hosszúságú karaktersorozatok halmaza

Megoldás. A karaktersorozat i-edik karaktere 256 féle értéket vehet fel bármely i esetén attól függetlenül, hogy mi a többi karakter értéke. Összesen tehát $|A| = 256^{100}$, azaz A véges halmaz.

(e) az egységnyi oldalhosszúságú négyzet pontjainak halmaza

Megoldás. Egyrészt a kétdimenziós síkban a $(0,0)$; $(0,1)$; $(1,1)$; $(1,0)$ csúcsokkal adott egységnégyzet tartalmazza az $y = 0$-nak megfelelő számegyenes $[0,1]$ intervallumát, azaz A-nak legalább kontiuum sok eleme van, tehát $|A| \geq \mathfrak{c}$.

Másrészt tekintsük a következő leképezést, amely az egységnégyzet egy (x, y) koordinátájú pontjának megfelelteti a $0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots$ valós számot, ahol $x = 0, x_1x_2x_3\ldots$ és $y = 0, y_1y_2y_3\ldots$ (vagyis x_i az x szám, y_i pedig az y szám i. tizedesjegye). Ezáltal a négyzet minden pontjának, azaz A minden elemének megfeleltettük a $[0,1]$ intervallum egy a többitől különböző elemét, tehát a négyzetnek nem lehet több pontja, mint a $[0,1]$ intervallumnak, azaz $|A| \leq \mathfrak{c}$.

A két korlát összevetésével az adódik, hogy az egységnégyzetnek is kontinuum sok pontja van, azaz $|A| = \mathfrak{c}$.

Megjegyzés: Kicsit pontosítanunk kell a véges tizedestörttel leírható racionális számok kétféle lehetséges írásmódja (például $0,72100000\dots = 0,72099999\ldots$) miatt. Előfordulhat ugyanis, hogy a fenti leképezés a $[0,1]$ intervallum egy racionális pontját két különböző (x, y) párhoz is hozzárendeli, ezáltal a képként előálló pontok nem lesznek különbözőek. Ez a probléma azonban nem áll fenn, ha az ilyen véges tizedestörttel megadható racionális számoknak már eleve a végtelen alakját tekintjük.

Gondoljuk meg, hogy ha a fenti megfontolásokat nem a kétdimenziós, hanem a k-dimenziós térben lévő hiperkockára alkalmazzuk, akkor is ugyanezt az eredményt kapjuk, nevezetesen a k-dimenziós hiperkocka pontjainak számossága is kontinuum.

(f) a kétdimenziós sík pontjainak halmaza

Megoldás. Az 1. feladat állítása szerint bármely rögzített y-ra ugyanannyi $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}\}$ alakú, mint ahány $\{(x, y) : x \in [0,1]\}$ alakú számpár van, illetve bármely rögzített x-re ugyanannyi $\{(x, y) : y \in \mathbb{R}\}$ alakú, mint ahány $\{(x, y) : y \in [0,1]\}$ alakú számpár van.

Ezeket felhasználva a kétdimenziós tér ($\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ alakú) pontjainak száma éppen annyi, mint az egységoldalú négyzet ($\{(x, y) : x, y \in [0,1]\}$ alakú) pontjainak száma, ami viszont a 2e. feladat szerint megegyezik az egy dimenzióban vett $[0,1]$ szakasz pontjainak számával, azaz kontinuum. Vagyis $|A| = \mathfrak{c}$.

(g) a háromdimenziós tér pontjainak halmaza

Megoldás. A 2f. feladat megoldásában látottakhoz hasonlóan az alábbiak szerint 3 dimenzióban is azt kapjuk, hogy a teljes 3 dimenziós tér pontjainak száma megegyezik az egységoldalú kocka pontjainak számával.

Nevezetesen bármely rögzített y, z-re ugyanannyi $\{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}\}$ alakú, mint ahány $\{(x, y, z) : x \in [0,1]\}$ alakú számhármas van. Bármely rögzített x, z-re ugyanannyi $\{(x, y, z) : y \in \mathbb{R}\}$ alakú, mint ahány $\{(x, y, z) : y \in [0,1]\}$ alakú számhármas van. Illetve bármely rögzített x, y-ra ugyanannyi $\{(x, y, z) : z \in \mathbb{R}\}$ alakú, mint ahány számhármas $\{(x, y, z) : z \in [0,1]\}$ alakú.

Elég tehát az egységoldalú kocka pontjainak számosságát megállapítani.

Bármely rögzített z-hez az egységkockának egy olyan metszete tartozik amely egy $N(z)$ egységnégyzetet ad. $N(z)$ pontjainak kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők az egységszakasz pontjai a 2e. feladatban ismertetett módon, azaz $N(z)$ minden x, y pontjának megfelel egy $v \in [0,1]$ szám.

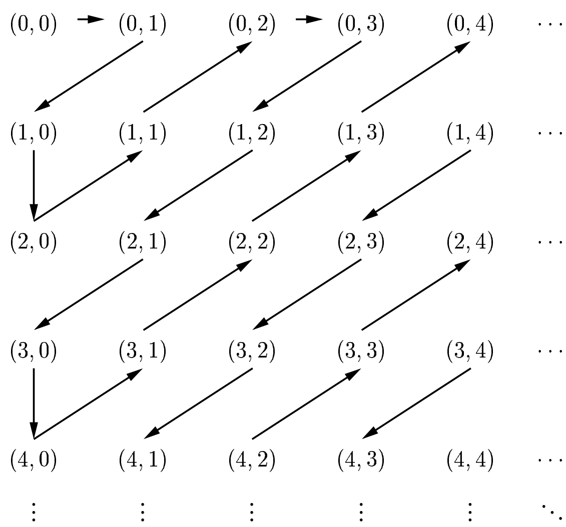
Az eredeti egységkocka egy (x, y, z) pontjához ezzel kölcsönösen egyértelműen hozzárendeltük a (v, z) pontját az egységnégyzetnek, vagyis az egységkockának ugyanannyi pontja van, mint az egységnégyzetnek, amiről tudjuk, hogy kontinuum.

Ezzel beláttuk, hogy $|A| = \mathfrak{c}$.

(h) az irracionális számok halmaza

Megoldás. Felhasználva az 1g. feladatban definiált bijekciót, azonnal adódik, hogy $|A| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, azaz A-nak kontinuum sok eleme van.

(i) a természetes számokból álló rendezett párok halmaza



3. ábra.

Megoldás. Készítsük el a 3. ábra szerinti táblázatot. A táblázat k. sorában lévő elemek alakja (k, j), ahol $j \in \mathbb{N}$. Az l. oszlop elemei pedig (i, l) alakúak, ahol $i \in \mathbb{N}$. Ennek megfelelően a táblázatban minden természetes számokból alkotott számpár pontosan egyszer szerepel.

Ugyanakkor a táblázat elemei a 3. ábrán látható vonal mentén haladva egyszeresen és hiánytalanul felsorolhatóak. Ez a felsorolás egy bijekciót definiál az $\{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}\}$ alakú számpárok és a természetes számok között, amiből következik, hogy az előbbiek halmazának megszámlálhatóan végtelen sok eleme van. Azaz $|A| = \aleph_0$.

(j) a természetes számokból alkotott rendezett k-asok halmaza

1. megoldás. A 2i. feladat alapján $\aleph_0$ darab $\aleph_0$ elemű halmaz uniója is $\aleph_0$ számosságú. A feladat megoldásakor egy kétdimenziós mátrixba rendeztük, majd felsoroltuk az $\{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}\}$ alakú számpárokat.

Ezt a módszert teljes indukcióval kiterjeszthetjük k dimenzióra is, amivel igazolható az állítás. Nézzük tehát az $A = \{(n_1, n_2, \ldots, n_k) : n_i \in \mathbb{N}\}$ alakú k-asokat. A definíciójából adódóan $k = 1$ esetén $|A| = \aleph_0$. Tegyük fel, hogy ez teljesül $k = 1, \ldots, l$-re is, azaz $\{(n_1, n_2, \ldots, n_l) : n_i \in \mathbb{N}\}$ alakú l-esekből $\aleph_0$ darab van. Ekkor az $\{(n_1, n_2, \ldots, n_l, n_{l+1}) : n_i \in \mathbb{N}\}$ alakú $l + 1$-esek első l eleme együtt $\aleph_0$ féle lehet, míg az $l + 1$. elem is $\aleph_0$ féle módon választható. Azaz az $\{(n_1, n_2, \ldots, n_l, n_{l+1}) : n_i \in \mathbb{N}\}$ alakú $l + 1$-esek a 2i. feladat alapján felsorolhatóak, vagyis belőlük $\aleph_0$ darab van. Az indukciós lépéseket k-ig folytatva ez igazolja, hogy $|A| = \aleph_0$, azaz A-nak megszámlálhatóan végtelen sok eleme van.

2. megoldás. Soroljuk fel az A halmaz elemeit a következők szerint. Tekintsük először azon k-ast, amelyben a legnagyobb szám 0. Következzenek ezután azon k-asok, amelyekben a legnagyobb szám az 1. Haladjunk így tovább, azaz miután felsoroltuk A azon elemeit, amelyekben a legnagyobb szám j, következzenek azok, amelyekben a legnagyobb szám $j + 1$. Vegyük észre, hogy adott j-re ilyen k-asból csak véges sok van, nevezetesen $(j + 1)^k$, azaz ez a felsorolás valóban elkészíthető. Az ugyanazon j-hez tartozó k-asok sorrendje most számunkra nem fontos, hiszen egy véges halmaz elemei mindig felsorolhatóak.

Ugyanakkor minden k-as pontosan egyszer szerepel a felsorolásban, mégpedig a benne lévő legnagyobb szám által meghatározott helyen.

Megadtunk tehát egy bijekciót az A halmaz elemei és a természetes számok (mint a felsorolásnál kapott sorszámok) között, azaz A-nak megszámlálhatóan végtelen sok eleme van, vagyis $|A| = \aleph_0$.

(k) a természetes számok k elemű részhalmazainak halmaza

Megoldás. Belátjuk, hogy $|A| \geq |\mathbb{N}| = \aleph_0$, illetve, hogy $|A| \leq |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Ezekből $|A| = \aleph_0$ már következik.

Egyrészt lerögzítve a $0, 1, 2, \ldots, k - 2$ számokat egy $k - 1$ elemű B részhalmazt kapunk. Egyszerű meggondolni, hogy a $k - 2$-nél nagyobb természetes számok is $\aleph_0$ sokan vannak, és közülük bármelyiket kiválasztva és B-hez adva egy k elemű, a többitől különböző részhalmazt kapunk. Mivel ilymódon megkonstruáltuk az A halmaz $\aleph_0$ darab elemét, ezért ennél A-nak nem lehet kevesebb eleme, tehát $|A| \geq \aleph_0$.

Másrészt nyilván a természetes számok minden pontosan k elemű részhalmaza felírható egy rendezett k-asként. Ez a felírás pedig egyértelművé tehető például a részhalmaz elemeinek növekvő sorrendjében véve a részhalmazbeli számokat. Azaz a természetes számokon vett rendezett k-asok száma nem lehet kisebb, mint ahány k elemű részhalmaza van $\mathbb{N}$-nek. Ebből a 2j. feladat alapján $|A| \leq \aleph_0$ következik.

A két korlátot összevetve kapjuk, hogy A megszámlálhatóan végtelen halmaz, vagyis $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

(l) a természetes számok véges részhalmazainak halmaza

Megoldás. Tekintsük csak az 1 elemű részhalmazokat. Ezekből éppen $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ darab van, ennél tehát A számossága nem lehet kisebb, azaz $|A| \geq \aleph_0$.

Használjuk most fel a 2k. feladat eredményét, miszerint a pontosan k elemű részhalmazok felsorolhatók, mert belőlük $\aleph_0$ darab van. Megcsinálva ezeket a felsorolásokat összesen $\aleph_0$ darab sorozatot kapunk, melyek egyenként $\aleph_0$ elemet tartalmaznak. Ezeket a 2i. feladat szerint felsorolhatjuk egy sorozat elemeiként, tehát $|A| \leq \aleph_0$. Azaz A megszámlálhatóan végtelen halmaz, vagyis $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

(m) azon $a_0 = 1, a_1, a_2, \ldots$ sorozatok halmaza, melyekben a szomszédos elemek hányadosa $\frac{1}{2}$ vagy 2

Megoldás. Mutatunk egy bijekciót az A halmaz elemei és a $[0, 1)$ intervallum valósai között. Ebből az 1. feladat eredményeinek felhasználásával már következik, hogy $|A| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

Először is A minden elemét reprezentálhatjuk kölcsönösen egyértelműen egy 0-kból és 1-kből álló $\{b_n\}$ sorozattal úgy, hogy

$$b_i = \begin{cases} 0, & \text{ha } \frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{1}{2} \\ 1, & \text{ha } \frac{a_i}{a_{i-1}} = 2 \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy így minden lehetséges 0,1 sorozat előáll.

Az összes 0,1 sorozatok száma pedig kontinuum a következők miatt.

Egyrészt egy 0,1 sorozat tekinthető egy binárisan felírt $0 \leq x < 1$ szám törtjegyeinek, azaz $x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. Különböző x valós számokhoz különböző 0,1 sorozat tartozik (minden esetben a végtelen kettedestört alakot véve). Ez a különbözőség visszafelé azonban sajnos nem igaz a racionális számok kétféle (véges, illetve végtelen kettedestört) írásmódja miatt. Gondoljuk meg ugyanis, hogy például az $10000\ldots$ és a $01111\ldots$ sorozatokhoz is ugyanazt a valós számot rendeltük. Ebből tehát csak $|A| \geq \mathfrak{c}$ következik.

A felső korlát bizonyításához meg kell még adjunk egy leképezést, ami minden 0,1 sorozathoz különböző valós számot rendel. Ez lehet például a következő. Ha a sorozat végtelen sok egyest tartalmaz, feleljen meg neki az eddigiekkel egyezően az $x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ szám. Ha véges sok egyes van benne, feleljen meg neki az $x = 1, b_1 b_2 b_3 \ldots$ szám. Ezzel megoldottuk az alakok kettősségéből adódó problémát, ugyanis egyazon racionális szám két alakja nem áll elő különböző sorozatok képeként, mivel a végtelen alakokhoz 0, a végesekhez pedig 1 egészrészt rendeltünk. Ebből tehát $|A| \leq \mathfrak{c}$ következik.

A két korlát összevetésével beláttuk, hogy A megszámlálhatatlanul végtelen halmaz, azaz $|A| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

(n) azon 0-ból és 1-ből álló sorozatok halmaza, melyekben csak véges sok 1 fordul elő

1. megoldás. Belátjuk, hogy $|A| \geq |\mathbb{N}| = \aleph_0$, illetve, hogy $|A| \leq |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Ezekből $|A| = \aleph_0$ már következik.

Az, hogy $\aleph_0$ alsó korlát következik abból, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-hez hozzárendelhető egy A-beli sorozat, nevezetesen például a 10^{-k} szám tizes számrendszerbeli alakja, amely pontosan 1 darab 1-est tartalmaz.

A felső korlát bizonyításához tekintsük a 0,1 sorozatokat úgy, mint egy $0 \leq x < 1$ szám kettes számrendszerbeli felírásának kettedesjegyeit. Mivel csak véges sok 1-es van a sorozatban, ezért van egy utolsó, mondjuk a k-adik. Rendeljük ekkor x-hez a $2^k x$ számot, amely egész szám lesz, hiszen éppen a kettes számrendszerbeli alakjának utolsó 1-esét toltuk el a kettedesvessző elé.

Másrészt különböző x-ekhez ez a leképezés különböző egészeket rendel, tehát a megfelelő x-eket leírtuk egy-egy természetes számmal, tehát az összes ilyen x-ek számossága (ami egyben A mérete is) legfeljebb megszámlálhatóan végtelen.

2. megoldás. Rendeljük hozzá kölcsönösen egyértelműen minden egyes $0, 1$ sorozathoz a természetes számoknak egy B részhalmazát oly módon, hogy ha a sorozatban az i. tag 1, akkor $i \in B$ ha pedig az i. tag 0, akkor $i \notin B$. Egyszerűbben szólva a $0, 1$ sorozatokat a természetes számok egy részhalmazának karakterisztikus vektoraiként tekintjük.

A fenti hozzárendelés definíciója miatt pontosan azon sorozatokban lesz csak véges sok egyes, amelyekhez a természetes számok véges részhalmazát rendeltük.

Megadtunk tehát egy bijekciót a természetes számok véges részhalmazai és az A halmaz elemei között. A 2l. feladat alapján ez azt jelenti, hogy A-nak megszámlálhatóan végtelen sok eleme van, azaz $|A| = \aleph_0$.

(o) a sík azon pontjainak halmaza, melynek mindkét koordinátája egész szám

Megoldás. Egész számból $\aleph_0$ darab van, hiszen az egészek felsorolhatók például a $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$ sorrendben. Ha tehát az x egész szám értékét lerögzítjük, akkor a sík (x, y) egész koordinátájú pontjainak száma $\aleph_0$. Mivel viszont x értékét $\aleph_0$ féle egész számnak rögzíthetjük, ezért alkalmazható az a tény, hogy $\aleph_0$ darab $\aleph_0$ elemű halmaz uniója is $\aleph_0$ elemű, amiből $|A| = \aleph_0$ adódik.

(p) az egész számokból álló (véges) mátrixok (vagyis $n \times n$-es táblázatok) halmaza

Megoldás. Egyrészt a 2o. feladat megoldásában láttuk, hogy egész számból $\aleph_0$ darab van. Másrészt a 2j. feladatban látottak szerint tetszőleges olyan k-asból, amelynek minden eleme egy-egy $\aleph_0$ elemű halmazból kerül ki is $\aleph_0$ sok van. Itt most $k = n^2$ dimenzióban vagyunk, ami véges, így a fenti két feladat megoldása alapján $|A| = \aleph_0$.

(q) a 0, 1 számokból álló (véges) mátrixok (vagyis $n \times n$-es táblázatok) halmaza

Megoldás. A mátrix minden elemét egymástól függetlenül 2 féle módon rögzíthetjük, azaz összesen 2^{n^2} féle ilyen mátrix létezik. A tehát véges, és $|A| = 2^{n^2}$.

(r) azon síkbeli háromszögek halmaza, melyeknek minden koordinátája egész szám

Megoldás. Belátjuk, hogy $|A| \geq |\mathbb{N}| = \aleph_0$, illetve, hogy $|A| \leq |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Ezekből $|A| = \aleph_0$ már következik.

Az, hogy $\aleph_0$ alsó korlát következik abból, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-hez hozzárendelhető egy $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(1, k)$ csúcsokkal rendelkező háromszög, amely A-beli.

A felső korlát következik abból, hogy egy háromszög három csúcsának két-két koordinátája tulajdonképpen egy egész számokból álló $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ számhatos. Az összes ilyen hatos számossága a 2j. feladatból adódóan éppen legfeljebb $\aleph_0$. (Ráadásul nem is az összes számhatos lesz jó, hiszen vannak például egy egyenesre eső ponthármasok is.)

(s) azon síkbeli háromszögek halmaza, melyeknek a területe egész szám

Megoldás. Belátjuk, hogy $|A| \geq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, illetve, hogy $|A| \leq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Ezekből $|A| = \mathfrak{c}$ már következik.

A felső korlát a következőképpen adódik. Tekintsük a háromszög csúcsainak összesen 6 koordinátáját a 6 dimenziós tér egy pontjaként, azaz rendeljük hozzá egyértelműen az $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ számhatost az (x_1, y_1); (x_2, y_2); (y_3, y_3) háromszöghöz. Ekkor a 2g. feladat bizonyításában látottakhoz hasonlóan eljárva (mindig az egységnégyzet–egységszakasz megfeleltetést használva a dimenziószám csökkentésére) beláthatjuk, hogy a 6 dimenziós térnek is kontinuum sok pontja van, tehát a feltételnek eleget tevő háromszögből is legfeljebb kontinuum sok lehet.

Az alsó korlát annak következménye, hogy tetszőleges valós x-re a $(0, 0)$; $(0, x)$; $(\frac{2}{x}, 0)$ csúcsokkal rendelkező háromszögek különbözőek, és mivel területük 1, A-beliek.

Ezzel beláttuk, hogy $|A| = \mathfrak{c}$.

(t) a síkon egy háromszög belső pontjainak halmaza

Megoldás. Belátjuk, hogy $|A| \geq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, illetve, hogy $|A| \leq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Ezekből $|A| = \mathfrak{c}$ már következik.

Egy síkbaágyazott háromszögnek legfeljebb annyi pontja lehet, mint magának a síknak, azaz kontinuum sok. Ebből adódik a felső korlát.

Ugyanakkor minden háromszög tartalmaz a belsejében egy zárt szakaszt, ami felfogható egy $[a, b]$ intervallumként is. Már csupán ennek a szakasznak is kontinuum sok pontja van az 1d. feladat alapján. Mivel a szakasz pontjai a háromszög pontjainak egy részhalmazát adják, ezért az alsó korlát is teljesül.

(u) a racionális számokból álló összes végtelen sorozatok halmaza

Megoldás. Belátjuk, hogy $|A| \geq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, illetve, hogy $|A| \leq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Ezekből $|A| = \mathfrak{c}$ már következik.

Itt az alsó korláttal van könnyebb dolgunk. $0 \leq x < 1$ valós szám felfogható úgy, mint számjegyeinek sorozata. Mivel a számjegyek racionálisak, ezért máris mutattunk kontinuum sok különböző ilyen sorozatot.

A felső korlát bizonyításához minden ilyen racionális számokból álló végtelen sorozathoz hozzá kell rendelnünk egy valós számot úgy, hogy különböző sorozatok képe különböző valós szám legyen. (Ez olyan, mintha minden sorozatot szeretnénk egy valós számmal kódolva reprezentálni úgy, hogy a kódolás később visszafejthető legyen.)

Íjuk tehát fel a sorozat a_i elemének abszolút értékét $\frac{p_i}{q_i}$ alakban, ahol ráadásul p_i és q_i binárisan leírt számok, és relatív prímek. Legyen továbbá $r_i = 2$, ha a_i negatív és $r_i = 3$, ha a_i nemnegatív. Ez a felírás minden racionális számhoz egyértelműen létezik.

Feleltessük meg a_i-nek az $S_i = r_i\{p_i\text{binárisan}\}4\{q_i\text{binárisan}\}5$ karaktersorozatot, amiből még mindig egyértelműen visszakapható a_i, hiszen p_i és q_i jegyeit egy bennük nem szereplő négyes választja el.

Ugyanakkor a $0, S_1S_2 \ldots S_k \ldots$ egyértelműen leírja a teljes eredeti sorozatot, hiszen az egyes a_i elemek sehol máshol nem szereplő 5-ösökkel vannak elválasztva. Ez a sorozat viszont éppen egy valós szám.

Mivel tehát minden sorozathoz hozzárendeltünk egy valós számot úgy, hogy különböző sorozatokhoz különböző valósak tartozzanak, az A-ban lévő sorozatok száma legfeljebb annyi, mint a valósok száma, azaz legfeljebb kontinuum. Ez adja a felső korlátot.

(v) a természetes számok összes permutációjának halmaza

Megoldás. Belátjuk, hogy $|A| \geq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, illetve, hogy $|A| \leq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Ezekből $|A| = \mathfrak{c}$ már következik.

Itt a felső korláttal van könnyebb dolgunk. A természetes számok minden permutációja felfogható úgy, mint egész számok egy sorozata, ezért a 2u szerint ilyen permutációból legfeljebb kontinuum sok van.

Az alsó korlát bizonyításához minden $0 \leq x < 1$ valós számhoz hozzá kell rendelnünk egy ilyen permutációt, hogy különböző x valósak képe különböző permutáció legyen. (Ez olyan, mintha minden $0 \leq x < 1$ valós számot szeretnénk egy permutációval kódolva reprezentálni úgy, hogy a kódolás később visszafejthető legyen.)

Íjuk fel x-et 9-es számrendszerben, és adjunk hozzá minden jegyéhez 1-et. Az így kapott (tizes számrendszerben értelmezett szám) legyen y. Nyilván y tizedesjegyei közt nem szerepel 0, tehát $y = 0, y_1y_2y_3 \ldots$ alakú, ahol y_i nemnulla számjegy.

A permutáció, amit az eredeti x-hez rendelünk nézzen úgy ki, hogy először tartalmazza az összes 1-jegyű számot, aztán az összes 2-jegyűt és így tovább.

Az első 1-jegyű szám legyen y_1, ezt kövesse a többi 1-jegyű egész növekvő sorrendben. Az első 2-jegyű szám legyen y_2y_3 (egy számként tekintve), ezt kövesse a többi 2-jegyű egész növekvő sorrendben. így haladjunk tovább mindig eggyel több jegyet felhasználva az y_i jegyek közül. Azaz a permutációban az első k-jegyű szám az $y_{\binom{k}{2}+1} \cdots y_{\binom{k+1}{2}}$ jegyekből áll össze, és ezt követi a többi k-jegyű növekvő sorrendben, majd a $k+1$-jegyűek ugyanezen szabály szerint.

Ha az így felépített permutációt rendeljük x-hez, akkor minden x képe különböző lesz, ami bizonyítja, hogy a permutációk száma nem lehet kisebb, mint a valósak száma.

3. Tekintsük az összes olyan, origóból induló és véges sok lépés után ugyanott végetérő sétát, amelynek minden lépése az x vagy az y tengellyel párhuzamos (pozitív vagy negatív irányú) egységszakasz. Mi a számossága ezen séták halmazának?

Megoldás. Jelölje a feladat feltételeinek megfelelő séták halmazát A. Belátjuk, hogy $|A| \geq |\mathbb{N}| = \aleph_0$, illetve, hogy $|A| \leq |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Ezekből $|A| = \aleph_0$ már következik.

Az alsó korlát adódik abból, hogy tetszőleges természetes k szám esetén k darab jobbra lépés, majd k darab balra lépés jó (A-beli) sétát ad és ezek mind különböznek, tehát a jó séták száma legalább akkora, mint a természetes számok számossága.

A felső korlátot megkaphatjuk a következő gondolatmenettel. Ha nem kötjük ki, hogy a sétáknak az origóban kell végetérniük, séták egy A-nál bővebb B halmazát kapjuk. Ha erről a B halmazról belátjuk, hogy legfeljebb $\aleph_0$ eleme van, akkor ez nyilván A-ra is igaz.

Egy séta egy lépését reprezentálhatjuk az 1, 2, 3, 4 számjegyek valamelyikével aszerint, hogy fel, le, jobbra vagy balra léptünk. Ennek megfelelően egy tetszőleges $B - beli$ séta leírható egy ezen négy számjegyből álló véges egész számmal, mégpedig úgy, hogy különböző sétákhoz különböző számok tartoznak.

Ebből következően: $|\mathbb{N}| \geq |B| \geq |A|$, azaz a felső korlát is bizonyítást nyert.

4. Hány olyan (x,y) pontpár van a síkon, melyre

(a) x és y is racionális,

Megoldás. A 2o. feladat megoldásával teljesen egyező gondolatmenettel kapjuk, hogy a szóban forgó pontokból megszámlálhatóan végtelen sok van. Nyilván legalább $\aleph_0$ ilyen pont van, másrészt mivel a racionális számok $\aleph_0$ sokan vannak, az ilyen pontpárok az ismert módszerrel felsorolhatók.

(b) x és $x + y$ is racionális,

Megoldás. Két racionális szám összege és különbsége is racionális, ezért $x, x + y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{Q}$, tehát a feladat feltételének pontosan azok az (x, y) párok tesznek eleget, mint a 4a. feladaténak, vagyis ilyen pontpárból is megszámlálhatóan végtelen sok van.

(c) x és xy is racionális,

Megoldás. Ilyen pontpárból kontinuum sok van, hiszen az $x = 0$ egyenes tetszőleges pontja eleget tesz a feltételnek. Ezért a feladat feltételeinek eleget tevő pontpárból sem lehet kevesebb, mint kontinuum. Ugyanakkor több sem lehet, mert a sík összes pontjának számossága kontinuum, és a megfelelő tulajdonságú pontok a sík pontjainka részhalmazát alkotják.

(d) $x + y$ és xy is racionális?

Megoldás. Legyen $x + y = \frac{p}{q}$, és $xy = \frac{r}{s}$, ahol $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Ezekből $y = \frac{p}{q} - x$, majd behelyettesítéssel $xy = \frac{r}{s} = \frac{p}{q}x - x^2$ adódik. Ebből: $x^2 - \frac{p}{q}x + \frac{r}{s} = 0$, azaz $qsx^2 - psx + rq = 0$, tehát x egy egészegyütthatós polinom gyöke, vagyis algebrai szám. Szimmetrikusan adódik, hogy y is algebrai. Algebrai számból pedig megszámlálhatóan végtelen sok van, így a feltételnek eleget tevő párok száma is megszámlálhatóan végtelen.

5. Legfeljebb hány 8-as helyezhető el a síkon úgy, hogy ne messék egymást?

Megoldás. Tetszőlegesen kis pozitív racionális szám létezik, tehát egy racionális számtól tetszőlegesen kis távolságra van másik racionális szám. Azaz a számegyenesen bármilyen kis intervallum tartalmaz racionális pontot. Ebből következően tetszőlegesen kicsiny négyzet a síkon tartalmaz olyan pontot, melynek mindkét koordinátája racionális. Azaz minden 8-asnak mindkét „hurkában” van olyan pont, melynek mindkét koordinátája racionális. Ugyanakkor egy ilyen pontpár csak egy nyolcashoz tartozhat, ha a 8-asok nem metszik egymást.

Éppen ezért a 8-asok száma nem lehet több, mint a csupa racionális koordinátákkal rendelkező pontpárok száma, ami $\aleph_0$.

Másrészt $\aleph_0$ 8-as pedig elhelyezhető a síkon, például egy négyzetrács minden négyzetébe egy 8-ast helyezve.

Azaz éppen $\aleph_0$ darab 8-as helyezhető el a síkon úgy, hogy azok ne messék egymást.

6. Egy tengeralattjáró egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, és percenként egyszer felbukkan egész koordinátájú pontokban. Írható-e előre (a kiindulási pont és a mozgási irány ismerete nélkül) program a tengeralattjáró megsemmisítésére, ha minden percben egyetlen pontra lőhetünk, amikor felbukkan?

Megoldás. Induljon a tengeralattjáró a $t = 0$ időpillanatban a (p_0, q_0) pontból, és lépjen minden percben egy (p, q) vektorral odébb. t perc után tehát a $(p_0 + tp, q_0 + tq)$ koordinátájú pontban van, ide kellene lőni ahhoz, hogy elkapjuk.

Sajnos a fenti p_0, q_0, p, q értékeket nem ismerjük a program írásakor, azonban ilyen pontnégyesből csak $\aleph_0$ sok lehet, tehát mégis van esélyünk, hogy minden pontnégyest végigpróbáljunk.

Sorrendezzük ugyanis a lehetséges pontnégyeseket a rendezett k-asok felsorolására használatos módszerrel (lásd a 2j. feladat megoldását). Ha az i. pontnégyes (p_0, q_0, p, q), akkor a $t = i$ időpillanatban lőjjünk egyet a $(p_0 + ip, q_0 + iq)$ pontba. Ha valóban ez a pontnégyes írta le a tengeralattjáró mozgását, akkor éppen itt tartózkodott, tehát sikerült eltalálnunk.

Ugyanakkor mivel minden pontnégyest végigpróbálunk, így véges, de nem korlátos idő alatt egészen biztosan eltaláljuk a tengeralattjárót. Nevezetesen ha a tengeralattjáró kiindulási pontját, illetve mozgásának irányát éppen az l.-ként felsorolt pontnégyes tartalmazza, akkor éppen az l. lépésben fogjuk eltalálni. Megjegyezzük, hogy ez azt jelenti, hogy semmilyen előre megadott véges k számról nem mondható, hogy a tengeralattjárót legkésőbb a k. pillanatban eltaláljuk.

7. Hány egyenessel lehet lefedni a síkot?

Megoldás. Egyrészt az origón átmenő az x tengellyel $\alpha \in [-\pi, \pi)$ szöget bezáró kontinuum sok egyenes lefedi a síkot. Másrészt az egységsugarú kör kontinuum sok lefedendő pontja közül egy tetszőleges egyenes legfeljebb 2 pontot fed le, amiből következik, hogy kontinuum sok egyenes szükséges is a teljes sík lefedéséhez.

8. Hány „T” betű helyezhető el a $[0, 1]$ szakaszra úgy, hogy semmelyik kettő ne messe egymást?

Megoldás. Egyrészt $\aleph_0$ darab T betű elhelyezhető. Tegyünk le ugyanis minden pozitív egész k érték esetén az $x_k = 2^{-k}$ pontba egy 2^{-k} magasságú T betűt, amelynek teljes vízszintes része 2^{-k} széles. Ilyenből $\aleph_0$ darab van, és ezek nem metszik egymást.

Másrészt vegyük észre, hogy egy T betű vízszintes része alatt van racionális pontja a $[0, 1]$ szakasznak a T szárának mind a jobb, mind a bal oldalán. Egy ilyen racionális pontpárhoz azonban legfeljebb egy T betű tartozhat úgy, hogy a T betűk ne messék egymást. Ebből következően a T-k száma legfeljebb akkora, mint a racionális pontpárok száma, azaz $\aleph_0$.

Összesen tehát $\aleph_0$ T betű helyezhető el a $[0, 1]$ szakaszon metszés nélkül.