

Elsőrendű rezolúció

Normálformára alakítás

Prenex konjunktív normálformára alakítás. Minden elsőrendű mondatra elvégezhető. Lépései:

1. implikációk átalakítása: $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$
2. negációk zárójeleken belülre vitele: De Morgan-azonosságok segítségével
3. standardizálás: a kvantorok megszüntetése előtt az azonos nevű változókat átnevezzük
4. ezután minden kvantor kiírható a mondat elejére
5. Skolemizáció: az egzisztenciális kvantor kiküszöbölése konstans- vagy függvénybevezetéssel
6. disztributív szabályok alkalmazása a zárójelek felbontására
7. fölösleges zárójelek elhagyása

Például:

- 1: $\neg(\forall x \exists y P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge (\exists x \forall y S(x, y) \Rightarrow T(x, y))$
- 2: $\neg(\forall x \exists y P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge (\exists x \forall y \neg S(x, y) \vee T(x, y))$
- 3: $(\exists x \forall y \neg(P(x, y) \vee Q(x, y))) \wedge (\exists x \forall y \neg S(x, y) \vee T(x, y))$
- 4: $(\exists x \forall y \neg P(x, y) \wedge \neg Q(x, y)) \wedge (\exists x \forall y \neg S(x, y) \vee T(x, y))$
- 5: $(\exists x \forall y \neg P(x, y) \wedge \neg Q(x, y)) \wedge (\exists v \forall w \neg S(v, w) \vee T(v, w))$
- 6: $\exists x \forall y \exists v \forall w \neg P(x, y) \wedge \neg Q(x, y) \wedge (\neg S(v, w) \vee T(v, w))$
- 7: $\forall y \forall w \neg P(a, y) \wedge \neg Q(a, y) \wedge (\neg S(b, w) \vee T(b, w))$
- 8: $\neg P(a, y) \wedge \neg Q(a, y) \wedge (\neg S(b, w) \vee T(b, w))$

Kapunk egy tetszőleges mondatot (1). Az implikációkat kiküszöböljük az $a \Rightarrow b = \neg a \vee b$ szabály segítségével (2). A negációkat a kvantorokon belülre mozgatjuk (3). Itt univerzális kvantort negáltunk, tehát ha „nem minden x-re létezik y, amire (...)”, akkor „létezik x, amire minden y-ra nem (...)”. A negált zárójeleket felbontjuk a DeMorgan-azonosságok segítségével (4). A negációk hatásköre most maximum egy atom. A változókat standardizáljuk, vagyis az azonos nevűeket átnevezzük (5). Ekkor az összes kvantor kivihető a mondat elejére (6). Az egzisztenciális kvantorokat konstans- vagy függvénybehelyettesítéssel kiküszöböljük (7). Az univerzális kvantorokat innentől elhagyjuk, de a változókat továbbra is univerzálisan kvantáltnak tekintjük (8). A mondat konjunktív normálformában van, ami a rezolúcióban három különálló mondatként kezelhető.

Legáltalánosabb egységesítő helyettesítés

Definíció: Amennyiben egy azonos predikátum szimbólummal kezdődő literálok argumentumai nem egyformák, megvizsgáljuk, hogy van-e olyan helyettesítés, amely egyforma argumentumokat eredményez. Az ilyen helyettesítést illesztő vagy egységesítő/egyesítő helyettesítésnek nevezik.

A helyettesítés egy párokból álló halmaz, amely a változókra vonatkozó értékadásokat tartalmazza. Pl.: $\{x \leftarrow \text{Józsi}, y \leftarrow f(v), z \leftarrow u\}$. Két helyettesítés kompozíciója az a helyettesítés, amely mindkét eredeti helyettesítés értékadásait tartalmazza.

Példa:

Adott egy atom: $A = P(x, f(y))$ és egy helyettesítés: $w = \{x \leftarrow b, y \leftarrow g(z)\}$

Alkalmazva A-ra a w helyettesítést $w[A] = P(b, f(g(z)))$

Definíció: Legyenek a λ , δ , η helyettesítések. λ legáltalánosabb helyettesítésnek nevezzük, ha bármely δ -hoz van olyan η hogy $\delta = \lambda \circ \eta$ (λ és η kompozíciója).

Két elsőrendű mondat egységesítő helyettesítése az a helyettesítés, amit a két mondatot azonossá teszi. A legáltalánosabb egyesítés az, ami a lehető legkevesebb változólekötést alkalmazza.

Az egységesítés során változók helyére helyettesíthetünk más változókat, konstansokat vagy függvényszimbólumokat. Két atom egyesítésénél sorra vesszük az argumentumokat, és megnézzük, hogy a bennük szereplő változók helyére be tudunk-e úgy helyettesíteni, hogy a másikkal azonos formájú legyen. Ha valamelyik argumentumnál ezt nem tudjuk megtenni, akkor a két atom nem egyesíthető.

Példák:

A kisbetűk változókat, a nagybetűk konstansokat szimbolizálnak.

Adott két atom azonos predikátummal:

1. $P(f(g(x, A)), x)$
2. $P(z, B)$

Megpróbáljuk őket egységesíteni. Kezdjük balról az első argumentummal. Itt a 2.-ban egy változó szerepel, ebbe behelyettesíthetjük az 1.-ben szereplő függvényt:

$z \leftarrow f(g(x, A))$

A második argumentumban a 1.-ben szerepel változó, ennek a helyére behelyettesíthetjük a 2.-ban lévő konstanst:

$x \leftarrow B$

Természetesen ezt a változó összes előfordulási helyén meg kell tenni, a többi argumentumban is:

$f(g(B, A))$

Így a helyettesítés: $w = \{ x \leftarrow B, z \leftarrow f(g(B, A)) \}$

A két atom egységesítése pedig: $P(f(g(B, A), B))$

Példa elsőrendű rezolúcióra:

Akik állatot esznek azok húsevők. A bárány állat. A farkas megeszi a bárányt. Húsevő-e a farkas?

$Állat(bárány)$

Megoldás: Formalizálás: $Megeszi(farkas, bárány)$

$Megeszi(x, y) \wedge Állat(y) \Rightarrow Húsevő(x)$

Kérdés: $Húsevő(farkas)$?

1.

$Megeszi(x, y) \wedge Állat(y) \Rightarrow Húsevő(x)$ klóz formára hozása:

$\neg(Megeszi(x, y) \wedge Állat(y)) \vee Húsevő(x)$

$\neg Megeszi(x, y) \vee \neg Állat(y) \vee Húsevő(x)$

2. Célállítás tagadása: $\neg Húsevő(farkas)$

3. Rezolúció menete:

$Állat(bárány)$

$Megeszi(farkas, bárány)$

$\neg Húsevő(farkas)$

$\neg Megeszi(x, y) \vee \neg Állat(y) \vee Húsevő(x)$

$\neg Megeszi(farkas, y) \vee \neg Állat(y)$

$x \leftarrow farkas$

Hozzávéve a rezolvenst a klózhalmazhoz (hiszen MINDEN x-re, így erre az x= farkas-értékre IS igaznak kell lennie):

$Állat(bárány)$

$Megeszi(farkas, bárány)$

$\neg Húsevő(farkas)$

$\neg Megeszi(x, y) \vee \neg Állat(y) \vee Húsevő(x)$

$\neg Megeszi(farkas, y) \vee \neg Állat(y)$

$\neg Megeszi(farkas, bárány)$

$y \leftarrow bárány$

Hozzávéve a rezolvenst a klózhalmazhoz :

$Állat(bárány)$

$Megeszi(farkas, bárány)$

$\neg Húsevő(farkas)$

$\neg Megeszi(x, y) \vee \neg Állat(y) \vee Húsevő(x)$

$\neg Megeszi(farkas, y) \vee \neg Állat(y)$

$\neg Megeszi(farkas, bárány)$

NIL

Tehát valóban, a $Megeszi(farkas, bárány)$ logikai következménye a kiindulási klózhalmaznak.

Megjegyzés:

Herbrand-interpretáció

Herbrand megmutatta, hogy minden elsőrendű klózalmazhoz létezik legfeljebb megszámlálhatóan végtelen univerzum, a Herbrand-univerzum. Egy elsőrendű klózalmaz akkor és csak akkor kontradikció, ha a Herbrand-univerzumon kontradikció.

A Herbrand univerzum konstrukciója lépésről lépésre:

$H_0 = \{ \text{a klózalmazban lévő konstansok halmaza} \}$ vagy ha a klózalmazban nincs konstans, egy szimbolikus konstans $\{a\}$

$H_{i+1} = H_i \cup F_i$ ahol $F_i = \{ \text{a } H_i \text{ elemei behelyettesítve a klózalmaz összes függvényébe az összes lehetséges módon} \}$

$$H^\infty = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k$$

Példa:

Legyen az alap klózalmaz $S = \{P(x, f(x)), Q(A)\}$

A Herbrand-univerzum iterációs lépései:

$$H_0 = \{A\}$$

$$H_1 = \{A, f(A)\}$$

$$H_2 = \{A, f(A), f(f(A))\}$$

:

A klózalmaz Herbrand-bázisa – az atomok:

$$\{P(A,A), Q(A), P(A,f(a)), P(f(A),A), P(f(A),f(A)), Q(f(A)), \dots \}$$

Ezt úgy kapjuk, hogy a klózekba minden lehetséges módon behelyettesítjük a Herbrand-univerzum elemeit.

A Herbrand interpretáció segítségével az elsőrendű formulák absztrak, általános módon interpretálhatók, és így általánosan belátható a következtetségi sémák igazsága vagy ellentmondása.

További példák rezolúcióra:

1. Jánosnak van egy kutyája. Minden kutyatulajdonos állatimádó. Egy állatimádó nem öl állatot. Az Ebi nevű macskát vagy János, vagy Bodri ölte meg.

Kérdés: Bodri ölte meg a macskát?

Az ismert mondatok és néhány háttérinformáció elsőrendű formalizmussal:

$$\exists x \text{Kutya}(x) \wedge \text{Birtokol}(\text{János}, x)$$

$$\forall x (\exists y \text{Kutya}(y) \wedge \text{Birtokol}(x, y)) \Rightarrow \text{Állatimádó}(x)$$

$$\forall x \text{Állatimádó}(x) \wedge \forall y \text{Állat}(y) \Rightarrow \neg \text{Megöl}(x, y)$$

$$\text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi}) \vee \text{Megöl}(\text{Bodri}, \text{Ebi})$$

$$\text{Macska}(\text{Ebi})$$

$$\forall x \text{Macska}(x) \Rightarrow \text{Állat}(x)$$

A mondatokat konjunktív normálformára alakítjuk, és hozzávesszük a kérdés negáltját::

$$1. \text{Kutya}(D)$$

$$2. \text{Birtokol}(\text{János}, D)$$

$$3. \neg \text{Kutya}(y) \vee \neg \text{Birtokol}(x, y) \vee \text{Állatimádó}(x)$$

$$4. \neg \text{Állatimádó}(x) \vee \neg \text{Állat}(y) \vee \neg \text{Megöl}(x, y)$$

$$5. \text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi}) \vee \text{Megöl}(\text{Bodri}, \text{Ebi})$$

$$6. \text{Macska}(\text{Ebi})$$

$$7. \neg \text{Macska}(x) \vee \text{Állat}(x)$$

$$8. \neg \text{Megöl}(\text{Bodri}, \text{Ebi})$$

És alkalmazva a rezolúciót - másképpen leírva, mint előbb:

$$9(7 - \{x : \text{Ebi}\}). \neg \text{Macska}(\text{Ebi}) \vee \text{Állat}(\text{Ebi})$$

$$10(9 - 6). \text{Állat}(\text{Ebi})$$

$$11(3 - \{x : \text{János}, y : D\}). \neg \text{Kutya}(D) \vee \neg \text{Birtokol}(\text{János}, D) \vee \text{Állatimádó}(\text{János})$$

$$12(11 - 2 - 1). \text{Állatimádó}(\text{János})$$

$$13(4 - \{x : \text{János}, y : \text{Ebi}\}). \neg \text{Állatimádó}(\text{János}) \vee \neg \text{Állat}(\text{Ebi}) \vee \neg \text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi})$$

$$14(13 - 12 - 10). \neg \text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi})$$

$$15(14 - 5). \text{Megöl}(\text{Bodri}, \text{Ebi})$$

$$16(15 - 8). \text{ellentmondás}$$

2.Példa:

Bűntény az, ha egy amerikai polgár fegyvert ad el egy Amerikával ellenségez nemzetnek. Nono egy ország, ami ellensége Amerikának, és fel van szerelve rakétákkal. Ezeket mind West ezredes adta el, aki amerikai.

Kérdés: Bűnöző-e West ezredes?

Megoldás:

A mondatok formális leírása:

$$\forall x, y, z \text{ Amerikai}(x) \wedge \text{Fegyver}(y) \wedge \text{Nemzet}(z) \wedge \text{Ellenséges}(z) \wedge \text{Elad}(x, y, z) \Rightarrow \text{Bűnöző}(x)$$

$$\exists x \text{ Birtokol}(\text{Nono}, x) \wedge \text{Rakéta}(x)$$

$$\forall x \text{ Birtokol}(\text{Nono}, x) \wedge \text{Rakéta}(x) \Rightarrow \text{Elad}(\text{West}, \text{Nono}, x)$$

$$\forall x \text{ Rakéta}(x) \Rightarrow \text{Fegyver}(x)$$

$$\text{Ellenséges}(\text{Nono})$$

$$\text{Nemzet}(\text{Nono})$$

$$\text{Amerikai}(\text{West})$$

A normálformájú mondatok a kérdés tagadásával:

$$1. \neg \text{Amerikai}(x) \vee \neg \text{Fegyver}(y) \vee \neg \text{Nemzet}(z) \vee \neg \text{Ellenséges}(z) \vee \neg \text{Elad}(x, y, z) \vee \text{Bűnöző}(x)$$

$$2. \text{Birtokol}(\text{Nono}, M1)$$

$$3. \text{Rakéta}(M1)$$

$$4. \neg \text{Birtokol}(\text{Nono}, x) \vee \neg \text{Rakéta}(x) \vee \text{Elad}(\text{West}, \text{Nono}, x)$$

$$5. \neg \text{Rakéta}(x) \vee \text{Fegyver}(x)$$

$$6. \text{Ellenséges}(\text{Nono})$$

$$7. \text{Nemzet}(\text{Nono})$$

$$8. \text{Amerikai}(\text{West})$$

$$9. \neg \text{Bűnöző}(\text{West})$$

A rezolúcióval előállított mondatok:

$$10(5 - \{x : M1\}). \neg \text{Rakéta}(M1) \vee \text{Fegyver}(M1)$$

$$11(10 - 3). \text{Fegyver}(M1)$$

$$12(4 - \{x : M1\}). \neg \text{Birtokol}(\text{Nono}, M1) \vee \neg \text{Rakéta}(M1) \vee \text{Elad}(\text{West}, \text{Nono}, M1)$$

$$13(12 - 2 - 3). \text{Elad}(\text{West}, \text{Nono}, M1)$$

$$14(1 - \{x : \text{West}, y : M1, z : \text{Nono}\}). \neg \text{Amerikai}(\text{West}) \vee \neg \text{Fegyver}(M1) \vee \neg \text{Nemzet}(\text{Nono}) \vee \neg \text{Ellenséges}(\text{Nono}) \vee \neg \text{Elad}(\text{West}, \text{Nono}, M1) \vee \text{Bűnöző}(\text{West})$$

$$15(14 - 8 - 11 - 7 - 6 - 13). \text{Bűnöző}(\text{West})$$

$$16(15 - 9). \text{ellentmondás}$$

3. Példa

Tudjuk azt, hogy a boszorkányok elégnek, a vádlottunk pedig könnyebb, mint egy kacsa. A feladat az, hogy bebizonyítsuk, hogy a vádlott boszorkány, felhasználva még néhány ismeretet, pl.: hogy a fa úszik a vízben.

$\acute{E}g(x) \Rightarrow Boszorkány(x)$	1: $\neg \acute{E}g(x) \vee Boszorkány(x)$
$Fa(x) \Rightarrow \acute{E}g(x)$	2: $\neg Fa(x) \vee \acute{E}g(x)$
$\acute{U}szik(x) \Rightarrow Fa(x)$	3: $\neg \acute{U}szik(x) \vee Fa(x)$
$Könnyebb(x, y) \wedge \acute{U}szik(y) \Rightarrow \acute{U}szik(x)$	4: $\neg Könnyebb(x, y) \vee \neg \acute{U}szik(y) \vee \acute{U}szik(x)$
$\acute{U}szik(kacsa)$	5: $\acute{U}szik(kacsa)$
$Könnyebb(vádlott, kacsa)$	6: $Könnyebb(vádlott, kacsa)$
? : $Boszorkány(vádlott)$	7: $\neg Boszorkány(vádlott)$

És a rezolúció eredményei:

$$8(2-3): \acute{E}g(x) \vee \neg \acute{U}szik(x)$$

$$9(1-8): \neg \acute{U}szik(x) \vee Boszorkány(x)$$

$$10(4-9): \neg Könnyebb(x, y) \vee \neg \acute{U}szik(y) \vee Boszorkány(x)$$

$$11(10 - \{x: vádlott, y: kacsa\}): \neg Könnyebb(vádlott, kacsa) \vee \neg \acute{U}szik(kacsa) \vee Boszorkány(vádlott)$$

$$12(11-6-5): Boszorkány(vádlott)$$

$$13(12-7): ellentmondás$$

A fenti következtetés valójában nem tűnik túl logikusnak. Mivel a rezolúciós eljárás helyes és teljes (mondataink Horn-klóz alakúak voltak), a probléma csak a kiindulási információkkal lehet. Így is van: az első mondat feltételezi, hogy minden, ami elég, az boszorkány, a harmadik pedig, hogy minden, ami úszik a vízben az fából van.

4. példa:

Tamás, Sándor és Eszter az Alpesi Klub tagjai. Minden klubtag vagy síelő, vagy hegymászó, vagy mindkettő. A hegymászók nem szeretik az esőt, a síelők viszont szeretik a havat. Eszter mindent szeret, amit Tamás nem szeret, és semmit sem szeret, amit Tamás szeret. Tamás szereti az esőt és a havat.

Kérdés: Van olyan klubtag, aki hegymászó, de nem síelő?

Megjegyzés: ez esetben az univerzum magában foglalja a klubtagokat és a természeti jelenségeket, de a helyettesítéseknél érdemes az értelmes kombinációkra törekedni.

A tudásbázisunk formálisan, plusz a kérdés negáltja:

$\forall x \text{ Síel}(x) \vee \text{Mászik}(x)$
 $\neg \exists x \text{Mászik}(x) \wedge \text{Szereti}(x, \text{Eső})$
 $\forall x \text{Síel}(x) \Rightarrow \text{Szereti}(x, \text{Hó})$
 $\forall x \text{Szereti}(\text{Eszter}, x) \Rightarrow \neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, x)$
 $\forall x \neg \text{Szereti}(\text{Eszter}, x) \Rightarrow \text{Szereti}(\text{Tamás}, x)$
 $\text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Eső})$
 $\text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó})$
 $\neg \exists x \text{Síel}(x) \wedge \text{Mászik}(x)$

A normálformájú mondatok:

1. $\text{Síel}(x) \vee \text{Mászik}(x)$
2. $\neg \text{Mászik}(x) \vee \neg \text{Szereti}(x, \text{Eső})$
3. $\neg \text{Síel}(x) \vee \text{Szereti}(x, \text{Hó})$
4. $\neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, x) \vee \neg \text{Szereti}(\text{Eszter}, x)$
5. $\text{Szereti}(\text{Tamás}, x) \vee \text{Szereti}(\text{Eszter}, x)$
6. $\text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Eső})$
7. $\text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó})$
8. $\neg \text{Mászik}(x) \vee \text{Síel}(x)$

A rezolvens mondatok:

- 9(1 – 8). $\text{Síel}(x)$
- 10(9 – 3). $\text{Szereti}(x, \text{Hó})$
- 11(10 – $\{x : \text{Eszter}\}$). $\text{Szereti}(\text{Eszter}, \text{Hó})$
- 12(4 – $\{x : \text{Hó}\}$). $\neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó}) \vee \neg \text{Szereti}(\text{Eszter}, \text{Hó})$
- 13(12 – 11). $\neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó})$
- 14(13 – 7). *ellentmondás*

A rezolúció nem csak arra alkalmas, hogy eldöntendő kérdésekre válaszoljunk vele, hanem megadhatjuk a kérdést kielégítő konstansok halmazát is. Ehhez most formalizáljuk a következő mondatot is: Minden klubtag vagy síelő, vagy hegymászó, vagy mindkettő.

$$15. \neg \text{Mászik}(x) \vee \text{Síel}(x) \vee (\text{Mászik}(x) \wedge \neg \text{Síel}(x))$$

$$16(15 - 1). \text{Síel}(x) \vee (\text{Mászik}(x) \wedge \neg \text{Síel}(x))$$

$$17(16 - 3). \text{Szereti}(x, \text{Hó}) \vee (\text{Mászik}(x) \wedge \neg \text{Síel}(x))$$

$$18(17 - \{x : \text{Eszter}\}). \text{Szereti}(\text{Eszter}, \text{Hó}) \vee (\text{Mászik}(\text{Eszter}) \wedge \neg \text{Síel}(\text{Eszter}))$$

$$19(4 - \{x : \text{Hó}\}). \neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó}) \vee \neg \text{Szereti}(\text{Eszter}, \text{Hó})$$

$$20(18 - 19). \neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó}) \vee (\text{Mászik}(\text{Eszter}) \wedge \neg \text{Síel}(\text{Eszter}))$$

$$21(20 - 7). \text{Mászik}(\text{Eszter}) \wedge \neg \text{Síel}(\text{Eszter})$$

Megkaptuk, hogy Eszter biztosan válasz a kérdésre. A 18. mondat megalkotásakor végig lehet próbálni a tudásbázisban szereplő összes konstans, de a többinél nem jutunk használható eredményre. A válaszalmazó tehát Eszter.

A fenti anyagot önálló tanulás keretében kidolgozta a 2005/06 tanévben:

Bányai Mihály

Ellenőrizte és átdolgozta: Bércesné Novák Ágnes vezető tanár

Felhasznált források:

digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/Diszkrét matematika és algebra

Stuart J. Russell - Peter Norvig: Mesterséges intelligencia modern megközelítésben

Páztorné Varga Katalin jegyzetei

C. R. Dyer – University of Wisconsin: Lecture Notes

Martin Müller – University of Alberta: Lecture Notes