

VÁRTERÉSZ MAGDA

*Mesterséges intelligencia 2
előadások*

2006/07-es tanév

Tartalomjegyzék

1. Logikai kalkulusok	4
2. A predikátumkalkulus	7
2.1. A természetes levezetés	16
3. Formulák normálformái	23
3.1. Kvantormentes formulák normálformái	23
3.2. Kvantoros formulák prenex alakja	28
3.2.1. A prenex-konjunktív vagy prenex-diszjunktív normálalakra hozás algoritmusa	31
3.3. Skolem-normálforma	34
3.3.1. Prenexformula „átírása” univerzális Skolem-formába	35
3.4. Klózok, Horn-klózok	41
3.4.1. Horn-klózok	44
4. Termhelyettesítés	45
4.1. Illesztő helyettesítés	55
4.1.1. Illesztő algoritmus	57
5. A rezolúciós kalkulus	62
5.1. Rezolúció az ítéletlogikában	62
5.1.1. Rezolúciós stratégiák	73
5.2. A Herbrand-univerzum és az elsőrendű klózhalmazok	85

5.2.1. A Herbrand-univerzum előállítása	86
5.3. A rezolúciós kalkulus az elsőrendű logikában	104
5.3.1. Rezolúciós levezetési stratégiák	122
6. A tablók módszere – tablókalkulus	126
6.1. Jelölt tábló az ítéletlogikában	126
6.2. Az elsőrendű tábló	139

1. fejezet

Logikai kalkulusok

Felépíthető a logika szemantikai fogalmakra hivatkozás nélkül is:

szintaktika	szemantika
logikai nyelv	interpretáció
formula	logikai érték
levezethetőség	következmény

A levezethetőség fogalmát **kalkulus** megadásával definiálhatjuk.

Egy kalkulus megadásakor felsoroljuk az

- **alapformuláit** és a
- **levezetési szabályait**.

Ekkor definiálható a levezethetőség fogalma. Egy Γ formulahalmazból levezethető a B formula (jelölése: $\Gamma \vdash B$)

- ha B alapformula, vagy $B \in \Gamma$,
- illetve ha van olyan levezetési szabály, mely B -t előállítja, és az(ok) a formula(ák), amely(ek)ből ez a levezetési szabály B -t előállítja, az(ok) Γ -ból levezethető(ek).

Egy kalkulus **helyes**, ha $\Gamma \vdash B$, akkor $\Gamma \models B$.

Egy kalkulus **teljes**, ha $\Gamma \models B$, akkor $\Gamma \vdash B$.

Egy kalkulus **adekvát**, ha helyes is, teljes is.

Egy logikai rendszer megalkotásakor

- először egy szemantikai rendszert definiálunk,
- majd megkísérlünk ehhez legalább helyes, de ha lehet, adekvát logikai kalkulust szerkeszteni.

2. fejezet

A predikátumkalkulus

Alapsémák:

1. $A \supset (B \supset A)$

2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

3. $A \supset (B \supset A \wedge B)$

4. $A \wedge B \supset A$

5. $A \wedge B \supset B$

6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

7. $A \supset A \vee B$

$$8. B \supset A \vee B$$

$$9. (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$$

$$10. \neg\neg A \supset A$$

$$11. \forall x A(x) \supset A(x)_t^x$$

$$12. \forall x (C \supset A(x)) \supset (C \supset \forall x A(x)), \quad x \notin Fv(C)$$

$$13. A(x)_t^x \supset \exists x A(x)$$

$$14. \forall x (A(x) \supset C) \supset (\exists x A(x) \supset C), \quad x \notin Fv(C)$$

Levezetési szabályok:

$$\text{modus ponens} \quad \frac{A \quad A \supset B}{B}$$

$$\text{általánosítási szabály} \quad \frac{A}{\forall x A}$$

A sémákban és szabályokban az

- A, B, C formulákkal;
- x változóval;
- t x -szel azonos típusú termmel

helyettesíthető be. Az alapsémákból így **alapformulákat** kapunk.

Lemma.

A predikátumkalkulus minden alapformulája logikai törvény.

Lemma.

$$A, A \supset B \models B$$

Lemma.

Ha $\Gamma \models A(x)$ és $x \notin \text{Par}(\Gamma)$, akkor $\Gamma \models \forall x A(x)$.

2.1. DEFINÍCIÓ. (FORMULA-FA ÉS MAGASSÁGA)

- Minden A formula 1 magasságú formula-fa, melyben A **alsó formula**, és nincs nála feljebb levő formula;
- Ha D_1 m_1 , D_2 m_2 magasságú olyan formula-fák, melyben az alsó formulák A és $A \supset B$, akkor

$$\frac{D_1 \quad D_2}{B}$$

is formula-fa B alsó formulával; B -nél D_1 és D_2 minden formulája feljebb van; a formula-fa magassága $\max \{m_1, m_2\} + 1$;

- ha D m magasságú olyan formula-fa, amelyben az alsó formula A , akkor a

$$\frac{D}{\forall x A}$$

alakzat is formula-fa, melyben $\forall x A$ alsó formula, melynél D minden formulája feljebb van, és a formula-fa magassága $m + 1$.

A formulafában azon formulák, melyeknél nincs feljebb levő:

- alapformulák,
- **hipotézisek**, vagy **nyílt premisszák**.

Példa.

$$\frac{\frac{Q(x) \supset P}{\forall x(Q(x) \supset P)} \quad \forall x(Q(x) \supset P) \supset (\exists x Q(x) \supset P)}{\exists x Q(x) \supset P}$$

3 magasságú formulafa

alsó formula: $\exists x Q(x) \supset P$

alapformula: $\forall x(Q(x) \supset P) \supset (\exists x Q(x) \supset P)$

hipotézis: $Q(x) \supset P$

2.2. DEFINÍCIÓ. Levezetés-fa egy formula-fa, melyben ha A -ból az általánosítás szabályával akarjuk a $\forall xA$ -t nyerni, akkor x nem paraméter egyetlen a $\forall xA$ -nál feljebb levő hipotézisben sem.

2.3. DEFINÍCIÓ. A Γ formulahalmazból a B formula **levezethető**, ha készíthető olyan levezetés-fa, melyben B alsó formula, és a hipotésisek mind elemei Γ -nak.

Jelölése: $\Gamma \vdash B$ (szekvencia)

2.4. TÉTEL. *A predikátumkalkulus adekvát logikai kalkulus.*

2.5. TÉTEL. (HELYESSÉG.) Ha $\Gamma \vdash B$, akkor $\Gamma \models B$.

BIZONYÍTÁS. A $\Gamma \vdash B$ szekvenciát megalapozó levezetésfa magassága szerinti indukcióval bizonyítunk. Legyen a levezetésfa magassága k .

- $k = 1$ esetén
 - vagy axióma B , ekkor $\models B$, így nyilván $\Gamma \models B$ is.
 - vagy $B \in \Gamma$, azaz hipotézis, ekkor minden olyan interpretációban és változókiértékelés mellett, amikor minden hipotézis igaz, nyilván B is igaz, tehát $\Gamma \models B$.
- Az indukciós feltevésünk szerint legyen igaz az állítás minden n -nél nem magasabb formulafa esetén.

- Legyen most $k = n + 1$. Ha a $\Gamma \models B$ szekvenciát megalapozó formulafát
 - a modus ponens levezetési szabállyal nyertük a $\Gamma \vdash A$ és $\Gamma \vdash A \supset B$ szekvenciákat megalapozó, legfeljebb n magasságú levezetésfákból. Az indukciós feltevés miatt ekkor igaz az állítás, tehát $\Gamma \models A$ és $\Gamma \models A \supset B$. De minden olyan interpretációban és változókiértékelés mellett, amikor a Γ -beli hipotézisek mind igazak, ezek szerint igazak ezen interpretációkban és változókiértékelések mellett az A és az $A \supset B$ formula is, így a B formula is. Tehát $\Gamma \models B$ is.

- az általánosítás szabályával nyertük, B tehát $\forall x A(x)$ alakú. Az n magasságú levezetésfa, amiből nyertük, a $\Gamma \vdash A$ szekvenciát alapozza meg, ahol $x \notin \text{Par}(\Gamma)$. Az indukciós feltevés miatt ekkor igaz az állítás, tehát $\Gamma \models A(x)$. De minden olyan interpretációban és változókiértékelés mellett, amikor a Γ -beli hipotézisek mind igazak, ezek szerint igaz ezen interpretációkban és változókiértékelések mellett az $A(x)$ is. Mivel $x \notin \text{Par}(\Gamma)$, minden ilyen változókiértékelés minden x -variánsa mellett is igazak a hipotézisek, így az $A(x)$ is, tehát a $\forall x A(x)$ is. Ezért $\Gamma \models \forall x A(x)$.

2.1. A természetes levezetés

Az azonosság törvénye

$$\Gamma, A \vdash A$$

Struktúrális szabályok

bővítés

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$$

szűkítés

$$\frac{\Gamma, B, B, \Delta \vdash A}{\Gamma, B, \Delta \vdash A}$$

felcserélés

$$\frac{\Gamma, B, C, \Delta \vdash A}{\Gamma, C, B, \Delta \vdash A}$$

vágás

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

Logikai szabályok

BEVEZETÉS

implikáció

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B}$$

konjunkció

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

diszjunkció

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

ELTÁVOLÍTÁS

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \supset B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

BEVEZETÉS

negáció

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

ekvivalencia

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A \equiv B}$$

ELTÁVOLÍTÁS

$$\frac{\Gamma \vdash \neg \neg A}{\Gamma \vdash A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \equiv B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B \quad \Gamma \vdash A \equiv B}{\Gamma \vdash A}$$

BEVEZETÉS

univerzális kvantor

$$\frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)} \quad (x \notin Par(\Gamma))$$

egzisztenciális kvantor

$$\frac{\Gamma \vdash A(x)_t^x}{\Gamma \vdash \exists x A(x)}$$

ELTÁVOLÍTÁS

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A(x)}{\Gamma \vdash A(x)_t^x}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash B}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash B} \quad (x \notin Par(\Gamma))$$

2.6. TÉTEL. (DEDUKCIÓ-TÉTEL.)

Ha $\Gamma, A \vdash B$, akkor $\Gamma \vdash A \supset B$.

BIZONYÍTÁS. A $\Gamma, A \vdash B$ szekvenciát megalapozó levezetésfa magassága szerinti indukcióval bizonyítunk. Legyen a levezetésfa magassága k .

- $k = 1$ esetén

- vagy axióma B , vagy $B \in \Gamma$, ekkor

$$\frac{B \quad ; \quad B \supset (A \supset B)}{A \supset B}$$

így $\Gamma \vdash A \supset B$.

- vagy $B = A$. De ekkor $\vdash A \supset A$.

- Az indukciós feltevésünk szerint legyen igaz az állítás minden n -nél nem magasabb formulafa esetén.

- Legyen most $k = n + 1$. Ha a $\Gamma, A \vdash B$ szekvenciát megalapozó formulafát
 - a modus ponens levezetési szabállyal nyertük a $\Gamma, A \vdash C$ és $\Gamma, A \vdash C \supset B$ szekvenciákat megalapozó, legfeljebb n magasságú levezetésfákból. Az indukciós feltevés miatt ekkor igaz az állítás, tehát $\Gamma \vdash A \supset C$ és $\Gamma \vdash A \supset (C \supset B)$.

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \\
 \vdots \\
 \Gamma \\
 \vdots \\
 A \supset C
 \end{array}
 \frac{
 \begin{array}{c}
 \Gamma \\
 \vdots \\
 A \supset (C \supset B); (A \supset (C \supset B)) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset B))
 \end{array}
 }{
 \begin{array}{c}
 ; \\
 (A \supset C) \supset (A \supset B)
 \end{array}
 }
 \frac{}{A \supset B}$$

Tehát $\Gamma \vdash A \supset B$.

- az általánosítás szabályával nyertük, B tehát $\forall x C(x)$ alakú.
 Az n magasságú levezetésfa, amiből nyertük, a $\Gamma, A \vdash C(x)$ szekvenciát alapozza meg, ahol $x \notin \text{Par}(\Gamma, A)$. Az indukciós feltevés miatt ekkor igaz az állítás, tehát $\Gamma \vdash A \supset C(x)$.

$$\frac{\displaystyle \frac{\displaystyle \frac{\Gamma}{\vdots} \quad A \supset C(x)}{\forall x(A \supset C(x))} \quad \forall x(A \supset C(x)) \supset (A \supset \forall x C(x))}{A \supset \forall x C(x)}$$

Tehát $\Gamma \vdash A \supset \forall x C(x)$.

3. fejezet

Formulák normálformái

3.1. Kvantormentes formulák normálformái

- Egy atomi formulát vagy negáltját **literálnak** fogjuk nevezni.
- **Elemi konjunkció**
 1. egy literál,
 2. vagy egy elemi konjunkció és egy literál konjunkciója;
- **Elemi diszjunkció**
 1. egy literál,
 2. vagy egy elemi diszjunkció és egy literál diszjunkciója.

- **Konjunktív normálforma**

1. egy elemi diszjunkció,
2. vagy egy konjunktív normálforma és egy elemi diszjunkció konjunkciója.

- **Diszjunktív normálforma**

1. egy elemi konjunkció,
2. vagy egy diszjunktív normálforma és egy elemi konjunkció diszjunkciója.

Lemma.

Az elsőrendű logikai nyelv minden kvantormentes formulájához konstruálható vele logikailag ekvivalens konjunktív és diszjunktív normálforma.

Jelek közötti összefüggések: (1) $\neg(A \supset B) \sim A \wedge \neg B$

$$(2) A \supset B \sim \neg A \vee B$$

Kétszeres tagadás:

$$(3) \neg\neg A \sim A$$

De Morgan törvényei:

$$(4) \neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$$

$$(5) \neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$$

Disztributivitás:

$$(6) A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$(7) A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

A konstrukció lépései:

1. a logikai jelek közötti összefüggések alapján az implikációkat eltávolítjuk;
2. De Morgan törvényeivel elérjük, hogy negáció csak atomokra vonatkozzon;
3. a disztributivitást felhasználva elérjük, hogy a konjunkciók és diszjunkciók megfelelő sorrendben kövessék egymást;
4. esetleg egyszerűsítünk.

Példa.

$$(A \supset B) \vee \neg(\neg B \supset A \vee \neg C)$$

↓ implikáció-eltávolítás

$$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \wedge \neg(A \vee \neg C))$$

↓ negáció atomokra vonatkozik

$$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \wedge \neg A \wedge C)$$

↓ konjunkciók diszjunkciója

$$(\neg A \vee B \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$$

↓ egyszerűsítés

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$$

↓ egyszerűsítés

$$\neg A \vee B$$

3.2. Kvantoros formulák prenex alakja

Egy $Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_nA$ ($n \geq 0$) alakú formulát, ahol a A kvantormentes formula, **prenex alakú formulának** nevezünk.

Példa.

A $\forall x \forall y (P(x, y) \supset \neg Q(x))$, a $\exists x \forall y (P(x, y) \vee R(x, z))$, a $\neg P(x, x)$ formulák prenexformulák, viszont a $\forall x \forall y P(x, y) \supset \neg Q(x)$ formula nem prenexformula.

Lemma.

Egy elsőrendű logikai nyelv tetszőleges formulájához konstruálható vele logikailag ekvivalens prenex alakú formula.

De Morgan kvantoros törvényei (1) $\neg \forall x A \sim \exists x \neg A$

$$(2) \neg \exists x A \sim \forall x \neg A$$

Kvantorok kétoldali kiemelése változótisztaság

$$(3) \forall x A \wedge \forall y B \sim \forall x (A \wedge B(y||x))$$

$$(4) \exists x A \vee \exists y B \sim \exists x (A \vee B(y||x))$$

Kvantorok egyoldali kiemelése változótisztaság

$$(5) Qx A \wedge B \sim Qx (A \wedge B)$$

$$(6) Qx A \vee B \sim Qx (A \vee B)$$

A konstrukció lépései:

1. változó-tiszta alakra hozzuk a formulát;
2. alkalmazzuk De Morgan kvantoros és a kvantorkiemelésre vonatkozó logikai törvényeket.

Példa.

$$\forall x P(x) \supset \neg \exists x Q(x)$$

↓ változó-tiszta alakra hozás

$$\forall x P(x) \supset \neg \exists y Q(y)$$

↓ egyoldali kvantorkiemelés

$$\forall x P(x) \supset \forall y \neg Q(y)$$

$$\exists x (P(x) \supset \forall y \neg Q(y))$$

$$\exists x \forall y (P(x) \supset \neg Q(y))$$

3.2.1. A prenex-konjunktív vagy prenex-diszjunktív normálalakra hozás algoritmusa

1. Az implikációk helyére a *logikai jelek közötti összefüggések* alapján velük ekvivalens implikációt nem tartamazó formulákat írunk.
2. A *kétszeres tagadás* és *De Morgan törvényeit* alkalmazzuk a formulában szereplő negációkra addig, amíg minden negáció hatásköre atomi formula nem lesz.
3. Az így nyert formulához vele kongruens (logikailag ekvivalens) változóiban tiszta formulát konstruálunk.
4. A *kvantorkiemelésre* vonatkozó ekvivalenciákat alkalmazzuk addig, amíg az összes kvantor a formula elé nem kerül. Ezzel a formulát prenexalakra hoztuk.
5. Prenex-konjunktív, illetve prenex-diszjunktív normálformula előállításához a kapott prenexformula magját a *disztributivitást* alkalmazva konjunktív, illetve diszjunktív normálformára hozzuk.

Példa. Hozzuk a

$$\forall x(\forall y P(x, y) \wedge \exists y \neg(Q(y) \supset P(x, a))) \supset \neg \forall x \exists y (P(y, x) \supset R(x, y))$$

formulát prenexalakra.

1. Az implikációk átírása:

$$\neg(\forall x(\forall y P(x, y) \wedge \exists y (Q(y) \wedge \neg P(x, a)))) \vee \neg \forall x \exists y (\neg P(y, x) \vee R(x, y)).$$

2. A kétszeres tagadás és De Morgan törvényeinek alkalmazása:

$$\exists x(\exists y \neg P(x, y) \vee \forall y (\neg Q(y) \vee P(x, a))) \vee \exists x \forall y (P(y, x) \wedge \neg R(x, y)).$$

3. Az egzisztenciális kvantor kétoldali kiemelésére vonatkozó ekvivalencia alkalmazása:

$$\exists x(\exists y \neg P(x, y) \vee \forall y (\neg Q(y) \vee P(x, a)) \vee \forall y (P(y, x) \wedge \neg R(x, y))).$$

4. A formulában az y változó három prefixumban is meg van nevezve. Két helyen a kötött változókat szabályosan átnevezzük a

formulában még nem szereplő y_1 és y_2 változókra:

$$\exists x(\exists y\neg P(x, y) \vee \forall y_1(\neg Q(y_1) \vee P(x, a)) \vee \forall y_2(P(y_2, x) \wedge \neg R(x, y_2))).$$

5. Ezután már mindegyik kvantor kiemelhető (tetszőleges sorrendben), egy lehetséges eredmény:

$$\exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2 (\neg P(x, y) \vee (\neg Q(y_1) \vee P(x, a)) \vee (P(y_2, x) \wedge \neg R(x, y_2))).$$

6. A formula magja diszjunktív normálforma, de a disztribúció felhasználásával átírható konjunktív normálformába, ha az a további feldolgozás szempontjából úgy célszerű:

$$\begin{aligned} \exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2 ((\neg P(x, y) \vee \neg Q(y_1) \vee P(x, a) \vee P(y_2, x)) \wedge \\ \wedge (\neg P(x, y) \vee \neg Q(y_1) \vee P(x, a) \vee \neg R(x, y_2))). \end{aligned}$$

3.3. Skolem-normálforma

A $\forall x \forall y (P(x, y) \supset \neg Q(x))$ prenexformula prefixumában csak univerzális kvantorok vannak. Az ilyen, azaz $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A$ alakú formulák fontosak lesznek a továbbiakban.

Univerzális Skolem-formulának nevezzük az olyan prenexformulát, amelynek a prefixumában csak univerzális kvantor szerepel. Ha a Skolem-formula magja konjunktív normálforma, akkor a formulát *Skolem-normálformának* nevezzük.

Tétel.

Tetszőleges A elsőrendű formulához konstruálható olyan univerzális Skolem-formula, mely pontosan akkor kielégíthetetlen, ha A kielégíthetetlen.

3.3.1. Prenexformula „átírása” univerzális Skolem-formába

1. Új Skolem-szimbólumok bevezetése:

Vizsgáljuk meg a

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_{j-1} \exists x_j Q_{j+1} x_{j+1} \dots Q_n x_n A$$

prenexformulát, amelynek a prefixumából az egzisztenciális kvantorokat eliminálni szeretnénk. Legyen a prefixumban az első egzisztenciális kvantor a prefixum j -edik kvantora.

- Ha $j = 1$, akkor minden olyan interpretációban és κ változókiértékelés esetén, amely mellett a formula igaz, az interpretáció $\mathcal{U}_{\pi_{x_1}}$ univerzumában van legalább egy $u \in \mathcal{U}_{\pi_{x_1}}$, hogy $\kappa^*(x_1) = u$ mellett a $Q_2 x_2 \dots Q_n x_n A$ formula igaz lesz. Ezt az elemet *Skolem-konstansnak* nevezzük.

Bővítsük ki az elsőrendű nyelvünket egy új π_{x_1} fajta s konstansszimbólummal, mely az egyes interpretációk univerzumai-ban rendre egy-egy Skolem-konstanst – ha egyáltalán van ilyen – nevez meg.

- Legyen most $j > 1$. Egy $\mathcal{I}$ interpretációban valamely κ változókiértékelés mellett a

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_{j-1} \exists x_j Q_{j+1} x_{j+1} \dots Q_n x_n A$$

formula pontosan akkor igaz, ha κ -ban az $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ változókhoz bármilyen más – az interpretáció megfelelő univerzumaiból vett – elemet rendelve mindig van legalább egy elem $\mathcal{U}_{\pi_{x_j}}$ -ben, amellyel pedig az x_j változót értékelve az így nyert változókiértékelés mellett a $\exists x_j$ hatásköre igaz.

Azaz minden $(u_1, u_2, \dots, u_{j-1}) \in \mathcal{U}_{\pi_{x_1}} \times \dots \times \mathcal{U}_{\pi_{x_{j-1}}}$ elem $j-1$ -eshez tartozik legalább egy $u \in \mathcal{U}_{\pi_{x_j}}$, hogy κ azon κ' variánsa mellett, melyre

$$\kappa'(x) = \begin{cases} u_i & \text{ha } x \in \{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}\}, \\ u & \text{ha } x = x_j, \\ \kappa(x) & \text{egyébként,} \end{cases}$$

a $\exists x_j$ hatásköre igaz lesz. Legyen

$$f^{\mathcal{I}} : \mathcal{U}_{\pi_{x_1}} \times \dots \times \mathcal{U}_{\pi_{x_{j-1}}} \rightarrow \mathcal{U}_{\pi_{x_j}}$$

egy függvény, amely minden $(u_1, u_2, \dots, u_{j-1})$ -hez egy ilyen u értéket rendel. Ezt a függvényt *Skolem-függvénynek* nevezzük.

Bővítsük ki az elsőrendű nyelvünket egy új $f(\pi_{x_1}, \dots, \pi_{x_{j-1}}, \pi_{x_j})$ alakú függvényszimbólummal. A kibővített nyelv interpretálása során f -et, ha van Skolem-függvény, Skolem-függvénnyel interpretáljuk.

2. Kvantoreliminálási lépés:

Ezután a prefixumból elhagyjuk a $\exists x_j$ -t, és a formula magjában elvégezzük az $(x_j \parallel s)$, illetve az $(x_j \parallel f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}))$ termhelyettesítést. A kapott

$$Q_2 x_2 \dots Q_n x_n A(x_1 \parallel s),$$

illetve

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_{j-1} Q_{j+1} x_{j+1} \dots Q_n x_n A(x_j \parallel f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}))$$

formula az eredeti formulában szereplő első egzisztenciális kvantort már nem tartalmazza.

Megmutatjuk, hogy ezzel a lépéssel az eredeti formulával a kielégíthetőség szempontjából egyenértékű formulát kaptunk.

- (a) Egyrészt minden olyan interpretációban, amelyben az eredeti formula valamely változókiértékelés mellett igaz volt, az új függvénszimbólumot (konstansszimbólumot) interpretálhatjuk egy Skolem-függvénnyel (Skolem-konstanssal) úgy, hogy a változókiértékelés mellett igaz lesz az átalakított formula is.
 - (b) Ha pedig az eredeti formula minden interpretációban, minden változókiértékelés mellett hamis volt, azaz kielégíthetetlen, akkor az átalakított formula is az lesz, mivel ekkor nincs Skolem-függvény (konstans) egyetlen interpretáló struktúrában sem.
3. Az új Skolem-szimbólumok bevezetésének és a kvantoreliminálásnak a lépéseit végrehajtjuk a soron következő egzisztenciális kvantorra, amíg minden egzisztenciális kvantort nem elimináltunk.

Példa. Írjuk át Skolem-normálformába a

$$\begin{aligned} & \exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2 ((\neg P(x, y) \vee \neg Q(y_1) \vee P(x, a) \vee P(y_2, x)) \wedge \\ & \quad \wedge (\neg P(x, y) \vee \neg Q(y_1) \vee P(x, a) \vee \neg R(x, y_2))) \end{aligned}$$

prenex-konjunktív formulát. A két egzisztenciális kvantor a prefixum első két kvantora, ezért két Skolem-konstanst kell bevezetnünk. Jelöljük az a -tól különböző két új konstanst s_1 és s_2 -vel.

$$\begin{aligned} & \forall y_1 \forall y_2 ((\neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1, a) \vee P(y_2, s_1)) \wedge \\ & \quad \wedge (\neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1, a) \vee \neg R(s_1, y_2))). \end{aligned}$$

3.4. Klózok, Horn-klózok

Az ítéletlogikában az elemi diszjunkciót *klóznak* is nevezik.

Az *elsőrendű klóz* pedig egy olyan zárt univerzális Skolem-formula, amelynek a magja elemi diszjunkció.

Egy Skolem-normálforma magja egy konjunktív normálforma.

Ha egy zárt K Skolem-normálformára „visszafelé” alkalmazzuk a konjunktóra vonatkozó kétoldali kvantorkiemelési szabályt, akkor elsőrendű klózok konjunktóját kapjuk. Legyen S ezen klózok halmaza.

Tétel.

Legyen K egy zárt Skolem-normálforma, S pedig a K magjából nyert elsőrendű klózoknak a halmaza. K pontosan akkor kielégíthetetlen, ha S kielégíthetetlen.

Példa. Az előző példában kapott Skolem-normálformában alkalmazzuk a kvantorkiemelésre vonatkozó ekvivalenciát „visszafelé”:

$$\begin{aligned} & \forall y_1 \forall y_2 (\neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1, a) \vee P(y_2, s_1)) \wedge \\ & \wedge \forall y_1 \forall y_2 (\neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1, a) \vee \neg R(s_1, y_2)). \end{aligned}$$

Hozzuk a formulát változóiban tiszta alakra:

$$\begin{aligned} & \forall y_1 \forall y_2 (\neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1, a) \vee P(y_2, s_1)) \wedge \\ & \wedge \forall x_1 \forall x_2 (\neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(x_1) \vee P(s_1, a) \vee \neg R(s_1, x_2)). \end{aligned}$$

Mivel egy elsőrendű klóz minden változója univerzálisan kvantált, az elsőrendű klózhalmazokban a klózek prefixumait (helykímélési céllal) nem tüntetjük fel. Tehát a fenti elsőrendű klózhalmazt így adjuk meg:

$$\left\{ \begin{array}{l} \neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1, a) \vee P(y_2, s_1), \\ \neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(x_1) \vee P(s_1, a) \vee \neg R(s_1, x_2) \end{array} \right\}.$$

Példa. Írjuk át Skolem-normálformába a

$$\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$$

prenexformulát. Először írjuk át a formula magját konjunktív normálformába:

$$\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x, y) \vee R(x, y, z)) \wedge (Q(x, z) \vee R(x, y, z))).$$

A Skolem-függvények egyváltozósak, vezessünk be az elsőrendű nyelvbe jelölésükre két új függvényszimbólumot: f -et és g -t. A Skolem-normálforma:

$$\forall x ((\neg P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x))) \wedge (Q(x, g(x)) \vee R(x, f(x), g(x)))).$$

Elsőrendű klózek konjunkciójaként felírva a formulát:

$$\forall x (\neg P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x))) \wedge \forall x (Q(x, g(x)) \vee R(x, f(x), g(x))).$$

A változóiban tiszta elsőrendű klózhalmoz pedig:

$$\{ \neg P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x)), Q(y, g(y)) \vee R(y, f(y), g(y)) \}.$$

3.4.1. Horn-klózok

A *Horn-klózok* olyan klózok, melyekben legfeljebb egy pozitív literál van.

- tény: A
- szabály: $\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \dots \vee \neg B_n \vee A$
- cél: $\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \dots \vee \neg B_n$

Tehát a Horn-klózok olyan univerálisan kvantált zárt formulák, melyek magja a szabályok esetén

$$B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n \supset A,$$

cél esetén pedig

$$\neg(B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n)$$

alakban is írható.

4. fejezet

Termhelyettesítés

Egy olyan függvényt, amely az elsőrendű nyelv véges sok változóján van értelmezve és minden változóhoz a változó fajtájával megegyező fajtájú termet rendel, *termhelyettesítésnek* nevezünk. *Üres* a termhelyettesítés, ha az értelmezési tartománya üres.

Legyen $\text{Dom}(\theta) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ és $\theta(x_i) = t_i$ minden $i = 1, 2, \dots, k$ -ra ($k \geq 1$). θ -t megadhatjuk táblázattal:

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ t_1 & t_2 & \dots & t_k \end{pmatrix}$$

vagy felsorolással:

$$\theta = (x_1, x_2, \dots, x_k \parallel t_1, t_2, \dots, t_k)$$

θ_{-x} jelölje azt a termhelyettesítést, melyre $\text{Dom}(\theta_{-x}) = \text{Dom}(\theta) \setminus \{x\}$ és minden $z \in \text{Dom}(\theta_{-x})$ esetén $\theta_{-x}(z) = \theta(z)$.

Legyen θ tetszőleges termhelyettesítés.

1. Ha $c \in \text{Cnst}$, akkor $(c\theta) \rightleftharpoons c$.
2. Ha x változó, akkor $(x\theta) \rightleftharpoons \begin{cases} x, & \text{ha } x \notin \text{Dom}(\theta) \\ \theta(x), & \text{ha } x \in \text{Dom}(\theta) \end{cases}$
3. $(f(t_1, t_2, \dots, t_k)\theta) \rightleftharpoons f((t_1\theta), (t_2\theta), \dots, (t_k\theta))$
4. $(P(t_1, t_2, \dots, t_k)\theta) \rightleftharpoons P((t_1\theta), (t_2\theta), \dots, (t_k\theta))$
5. $(\neg A\theta) \rightleftharpoons \neg(A\theta)$.
6. $((A \circ B)\theta) \rightleftharpoons ((A\theta) \circ (B\theta))$, ahol $\circ$ binér logikai összekötőjel.
7. $(Qx A\theta) \rightleftharpoons Qx(A\theta_{-x})$, ahol Q kvantor.

A θ termhelyettesítés megengedett a K kifejezés számára, ha minden $x \in \text{Dom}(\theta)$ esetén x minden K -beli szabad előfordulása kívül esik a $\theta(x)$ term valamennyi változóját megnevező kvantor hatáskörén.

1. Termek és atomi formulák számára minden termhelyettesítés megengedett.
2. $\neg A$ számára egy termhelyettesítés megengedett, ha megengedett A számára.
3. $(A \circ B)$ számára egy termhelyettesítés megengedett, ha megengedett A és B számára is.
4. QxA számára egy θ termhelyettesítés megengedett, ha
 - (a) egyetlen $z \in \text{Par}(QxA) \cap \text{Dom}(\theta)$ változó esetén sem fordul elő x a $\theta(z)$ termben,
 - (b) θ_{-x} pedig megengedett A számára.

Példa.

A $\forall \tilde{x} R(\tilde{x}, f(x, \tilde{x})) \supset \exists x Q(x, f(x, \tilde{x}))$ formula számára az

$$\begin{pmatrix} x & y & \tilde{x} \\ y & x & f(y, \tilde{y}) \end{pmatrix}$$

termhelyettesítés megengedett, az

$$\begin{pmatrix} x & y & \tilde{x} \\ y & x & f(x, \tilde{y}) \end{pmatrix}$$

termhelyettesítés pedig nem megengedett, mert a helyettesítendő szabad előfordulású $\tilde{x}$ az x -et kötő $\exists$ hatáskörében van, és a helyére beírandó $f(x, \tilde{y})$ termben is előfordul az x változó.

Legyen K egy kifejezés és θ egy termhelyettesítés. Konstruáljunk meg egy K -val kongruens olyan K' formulát, amely számára θ megengedett. Ekkor a $(K'\theta)$ kifejezés a θ termhelyettesítés K -ban való szabályos végrehajtásának eredménye. Jelölése: $[K\theta]$.

1. Ha K term vagy atomi formula, akkor $[K\theta] \rightleftharpoons (K\theta)$.
2. $[\neg A\theta] \rightleftharpoons \neg[A\theta]$
3. $[(A \circ B)\theta] \rightleftharpoons ([A\theta] \circ [B\theta])$
- 4.(a) Ha egyetlen $z \in \text{Par}(QxA) \cap \text{Dom}(\theta)$ változó esetén sem fordul elő a $\theta(z)$ termben x , akkor $[QxA\theta] \rightleftharpoons Qx[A\theta_{-x}]$.
- (b) Ha van olyan $z \in \text{Par}(QxA) \cap \text{Dom}(\theta)$ változó, hogy x paraméter $\theta(z)$ -ben, akkor válasszunk egy új változót – például u -t –, mely nem fordul elő sem QxA -ban, sem $\text{Rng}(\theta)$ termjeiben, és

$$[QxA\theta] \rightleftharpoons Qu[A(x \parallel u)\theta_{-x}].$$

Példa.

A $\forall \tilde{x} R(\tilde{x}, f(x, \tilde{x})) \supset \exists x Q(x, f(x, \tilde{x}))$ formulában az

$$\begin{pmatrix} x & y & \tilde{x} \\ y & x & f(x, \tilde{y}) \end{pmatrix}$$

termhelyettesítés szabályos végrehajtásának eredménye a

$$\forall \tilde{x} R(\tilde{x}, f(y, \tilde{x})) \supset \exists z Q(z, f(z, f(x, \tilde{y})))$$

formula.

Legyenek

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ t_1 & t_2 & \dots & t_k \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \eta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_\ell \\ s_1 & s_2 & \dots & s_\ell \end{pmatrix}$$

egy nyelv termhelyettesítései. θ és η kompozícióján a

$$(\theta\eta) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_j} \\ (t_1\eta) & (t_2\eta) & \dots & (t_k\eta) & s_{i_1} & s_{i_2} & \dots & s_{i_j} \end{pmatrix}$$

termhelyettesítést értjük, ahol

$$\{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_j}\} = \text{Dom}(\eta) \setminus \text{Dom}(\theta).$$

Példa.

Legyenek

$$\theta = \begin{pmatrix} x & y & \tilde{x} \\ y & x & f(x, \tilde{y}) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \eta = \begin{pmatrix} x & y & \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} \\ c & z & \tilde{y} & \tilde{x} & f(x, \tilde{x}) \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}^{p1}$ termhelyettesítései. Ekkor

$$(\theta\eta) = \begin{pmatrix} x & y & \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} \\ z & c & f(c, \tilde{x}) & \tilde{x} & f(x, \tilde{x}) \end{pmatrix}$$

és

$$(\eta\theta) = \begin{pmatrix} x & y & \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} \\ c & z & \tilde{y} & f(x, \tilde{y}) & f(y, f(x, \tilde{y})) \end{pmatrix}.$$

A példa mutatja, hogy a kompozíció művelete egy nyelv termhelyettesítéseinek halmazán nem kommutatív.

Lemma.

Legyenek θ és η egy nyelv termhelyettesítései. Ekkor tetszőleges t term esetén

$$(t(\theta\eta)) = ((t\theta)\eta).$$

Tétel.

Egy elsőrendű logikai nyelv tetszőleges θ , η és ζ termhelyettesítései esetén

$$(1) \quad ((\theta\eta)\zeta) = (\theta(\eta\zeta)) \quad (\text{a kompozíció asszociatív})$$

$$(2) \quad \theta\varepsilon = \varepsilon\theta = \theta \quad (\varepsilon \text{ neurális elem})$$

Azaz a kompozíció műveletével a termhelyettesítések halmaza neurális elemmel rendelkező félcsoport.

Legyenek θ és η termhelyettesítések. Az η helyettesítés *általánosabb* a θ helyettesítésnél, ha van olyan λ termhelyettesítés, hogy $\theta = \eta\lambda$.
Példa.

Az

$$\theta = \begin{pmatrix} x & y & z \\ f(g(a, h(z))) & g(h(x), b) & h(x) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \eta = \begin{pmatrix} x & y \\ f(g(x, y)) & g(z, b) \end{pmatrix}$$

helyettesítések esetén η általánosabb a θ helyettesítésnél, mert $\theta = \eta\lambda$, ahol

$$\lambda = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & h(z) & h(x) \end{pmatrix}$$

A reláció reflexív és tranzitív.

4.1. Illesztő helyettesítés

Legyen $W = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ azonos predikátumszimbólumot tartalmazó atomi formulák legalább kételemű véges halmaza. Az olyan θ termhelyettesítést, amelyre az $A_1\theta, A_2\theta, \dots, A_k\theta$ atomi formulák rendre azonosak, W *illesztő helyettesítésének* nevezzük. W illesztő helyettesítése W *legáltalánosabb illesztő helyettesítése*, ha W minden illesztő helyettesítésénél általánosabb.

Példa.

A $P(x, f(a, y))$ és a $P(b, z)$ atomoknak egy illesztő helyettesítése:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ b & c & f(a, c) \end{pmatrix}$$

legáltalánosabb illesztő helyettesítése:

$$\begin{pmatrix} x & z \\ b & f(a, y) \end{pmatrix}$$

Vizsgáljuk a W elemeit párhuzamosan, szimbólumonként balról jobbra haladva. Álljunk meg annál az első szimbólumnál, amelyik a W nem minden atomi formulájában egyforma. Emeljük ki W minden atomi formulájából azt a résztermet, amely az ezen a pozíción lévő szimbólummal kezdődik. E résztermek D halmazát a W összeférhetetlenségi halmazának nevezzük.

Példa.

Legyen

$$W = \{P(x, f(y, z)), P(x, a), P(x, g(h(k(x))))\}.$$

W összeférhetetlenségi halmaza

$$D = \{f(y, z), a, g(h(k(x)))\}$$

4.1.1. Illesztő algoritmus

1. $k := 0$, $W_k := W$, $\sigma_k := \varepsilon$.
2. Ha W_k egyetlen atomot tartalmaz, akkor sikeresen vége: σ_k a W legáltalánosabb illesztő helyettesítése. Egyébként határozzuk meg W_k összeférhetetlenségi halmazát: D_k -t.
3. Ha van D_k -ban olyan x_k individuumváltozó és t_k term, hogy x_k nem fordul elő t_k -ban, akkor a 4. lépéssel folytatjuk. Egyébként sikertelenül vége: W nem illeszthető.
4. $\sigma_{k+1} := \sigma_k(x_k \parallel t_k)$, $W_{k+1} := \{A(x_k \parallel t_k) \mid A \in W_k\}$. (Megjegyezzük, hogy $W_{k+1} = \{A\sigma_{k+1} \mid A \in W\}$.)
5. $k := k + 1$, és a 2. lépéssel folytatjuk.

Tétel

Ha W egymáshoz illeszthető atomi formulák véges, nemüres halmaza, akkor az illesztő algoritmus mindig a 2. lépéssel fejeződik be, és az utolsó σ_k legáltalánosabb illesztő helyettesítés lesz W -re.

Példa.

Döntsük el az illesztő algoritmussal, hogy illeszthetők-e a

$$W = \{ P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u)) \}$$

halmaz atomi formulái egymáshoz.

$$1. W_0 := W, \quad \sigma_0 := \varepsilon.$$

$$2. D_0 = \{a, z\}.$$

3. z egy individuumváltozó, a egy a z -t nem tartalmazó term.

$$4. \sigma_1 := \sigma_0(z \parallel a) = \varepsilon(z \parallel a) = (z \parallel a).$$

$$\begin{aligned} W_1 &:= \{ P(a, x, f(g(y)))(z \parallel a), P(z, f(z), f(u))(z \parallel a) \} = \\ &= \{ P(a, x, f(g(y))), P(a, f(a), f(u)) \}. \end{aligned}$$

$$5. D_1 = \{x, f(a)\}$$

6. x egy individuumváltozó, $f(a)$ egy az x -et nem tartalmazó term.

$$7. \sigma_2 := \sigma_1(x \parallel f(a)) = (z \parallel a)(x \parallel f(a)) = (z, x \parallel a, f(a)).$$

$$\begin{aligned} W_2 &:= \{ P(a, x, f(g(y)))(x \parallel f(a)), P(a, f(a), f(u))(x \parallel f(a)) \} = \\ &= \{ P(a, f(a), f(g(y))), P(a, f(a), f(u)) \}. \end{aligned}$$

$$8. D_2 = \{g(y), u\}.$$

9. u egy individuumváltozó, $g(y)$ egy az u -t nem tartalmazó term.

$$10. \sigma_3 := \sigma_2(u \parallel g(y)) = (z, x \parallel a, f(a))(u \parallel g(y)) = (z, x, u \parallel a, f(a), g(y)).$$

$$\begin{aligned} W_3 &:= \{ P(a, f(a), f(g(y)))(u \parallel g(y)), P(a, f(a), f(u))(u \parallel g(y)) \} = \\ &= \{ P(a, f(a), f(g(y))), P(a, f(a), f(g(y))) \} = \\ &= \{ P(a, f(a), f(g(y))) \}. \end{aligned}$$

11. W_3 -ban egyetlen atom van, így σ_3 a legáltalánosabb illesztő helyettesítés W -re.

Példa.

Vizsgáljuk meg, hogy illeszthetők-e egymáshoz a

$$W = \{ Q(f(a), g(x)), Q(y, y) \}$$

halmaz atomi formulái.

$$1. W_0 := W, \quad \sigma_0 := \varepsilon.$$

$$2. D_0 = \{ f(a), y \}.$$

3. y egy individuumváltozó, $f(a)$ egy az y -t nem tartalmazó term.

$$4. \sigma_1 := \sigma_0(y \parallel f(a)) = \varepsilon(y \parallel f(a)) = (y \parallel f(a)).$$

$$\begin{aligned} W_1 &:= \{ Q(f(a), g(x))(y \parallel f(a)), Q(y, y)(y \parallel f(a)) \} = \\ &= \{ Q(f(a), g(x)), Q(f(a), f(a)) \}. \end{aligned}$$

$$5. D_1 = \{ g(x), f(a) \}.$$

6. A D_1 -ben nincs individuumváltozó, ezért az algoritmus azzal az eredménnyel fejeződik be, hogy W atomjai nem illeszthetők.

5. fejezet

A rezolúciós kalkulus

5.1. Rezolúció az ítéletlogikában

Legyenek C_1 és C_2 pontosan egy komplement literálpárt tartalmazó klózok. Ha $C_1 = C'_1 \vee L_1$ és $C_2 = C'_2 \vee L_2$, ahol L_1 és L_2 a komplement literálpár, a $C'_1 \vee C'_2$ klózt a (C_1, C_2) klózpár *rezolvensének* nevezzük. Ha $C_1 = L_1$ és $C_2 = L_2$, rezolvensük az *üres klóz* ($\square$).

Az a tevékenység, amelynek eredménye a rezolvens, a *rezolválás*, azon literálpár literáljai pedig, amely lehetővé teszi a rezolvensképzést, a *kirezolvált literálok*.

Példa.

Vizsgáljunk most meg néhány klózpárt, van-e rezolvensük.

	klózpár	rezolvens
(a)	$(X \vee Y, \neg Y \vee Z)$	$X \vee Z$
(b)	$(X \vee \neg Y, \neg Y \vee Z)$	nincs: mindkét azonos alapú literál negált
(c)	$(X \vee \neg Y, Z \vee \neg V)$	nincs: nincs azonos alapú literál
(d)	$(\neg X \vee \neg Y, X \vee Y \vee Z)$	nincs: két komplement literálpár van
(e)	$(X, \neg X)$	$\square$

Egy S klózalmazból a C klóz *rezolúciós levezetése* egy olyan véges $k_1, k_2, \dots, k_m$ ($m \geq 1$) klózsorozat, ahol minden $j = 1, 2, \dots, m$ -re

1. vagy $k_j \in S$,
2. vagy van olyan $1 \leq s, t < j$, hogy k_j a (k_s, k_t) klózpár rezolvense, és klózsorozat utolsó tagja, k_m , éppen a C klóz.

A rezolúciós kalkulus eldöntésproblémája az, hogy *levezethető-e S -ből az üres klóz*. A rezolúciós levezetés célja tehát az üres klóz levezetése S -ből. Azt, hogy S -ből levezethető az üres klóz, úgy is ki lehet fejezni, hogy S -nek van *rezolúciós cáfolata*.

Példa.

Próbáljuk meg az üres klózt levezetni az

$$S = \{ \neg X \vee Y, \neg Y \vee Z, X \vee V, \neg V \vee Y \vee Z, \neg Z \}$$

klózhalmazból. A levezetés bármelyik S -beli klózzal indítható.

1. $\neg V \vee Y \vee Z$ [$\in S$]
2. $\neg Z$ [$\in S$]
3. $\neg V \vee Y$ [1, 2 rezolvense]
4. $\neg Y \vee Z$ [$\in S$]
5. $\neg Y$ [2, 4 rezolvense]
6. $\neg V$ [3, 5 rezolvense]
7. $X \vee V$ [$\in S$]
8. X [6, 7 rezolvense]

- 9. $\neg X \vee Y$ [$\in S$]
- 10. Y [8, 9 rezolvense]
- 11. $\square$ [5, 10 rezolvense]

Tehát S -nek van rezolúciós cáfolata.

Legyenek $C_1 = C'_1 \vee L_1$ és $C_2 = C'_2 \vee L_2$, ahol L_1 és L_2 az egyetlen komplement literálpár.

Tétel.

$$\{C_1, C_2\} \models_0 C'_1 \vee C'_2.$$

BIZONYÍTÁS. Ha $C_1 = L_1$ és $C_2 = L_2$, akkor nincs a $\{C_1, C_2\}$ klózhalmazt kielégítő interpretáció, tehát igaz az állítás. Egyébként a $\{C_1, C_2\}$ klózhalmazt kielégítő tetszőleges interpretáció

- vagy olyan, hogy az L_1 -hez rendel i értéket ($\mathcal{I}_{L_1}$),
- vagy olyan, hogy az L_2 -höz rendel i értéket ($\mathcal{I}_{L_2}$).

$\mathcal{I}_{L_1}$ kielégíti a $\{C_1, C_2\}$ klózhalmazt, azaz itt a C_1 és a C_2 klózek igazak, de L_2 hamis, ezért C'_2 igaz, tehát igaz $C'_1 \vee C'_2$ is. Hasonlóképpen láthatjuk be, hogy a $\mathcal{I}_{L_2}$ interpretációkban pedig C'_1 igaz. Tehát mind $\mathcal{I}_{L_1}$, mind $\mathcal{I}_{L_2}$ kielégíti a $C'_1 \vee C'_2$ klózt.

Tétel.

Ha a C klóz a (C_1, C_2) klózpár rezolvense, akkor azon $\mathcal{I}$ interpretációk a $\{C_1, C_2\}$ klózhalmazt nem elégítik ki, amelyekben C hamis.

BIZONYÍTÁS.

- Ha $C_1 = L_1$ és $C_2 = L_2$, rezolvensük az üres klóz. Az üres klóz kielégíthetetlen, azaz minden interpretációban hamis. Tehát azt kell belátni, hogy a $\{C_1, C_2\}$ klózhalmaz kielégíthetetlen. De C_1 és C_2 egy komplement literálpár, így egyetlen interpretáció sem elégítheti ki egyszerre őket.
- Legyen $C_1 = C'_1 \vee L_1$ és $C_2 = C'_2 \vee L_2$, ahol L_1 és L_2 komplement literálpár. Legyen $\mathcal{I}$ egy olyan interpretáció, melyben C hamis. Ez azt jelenti, hogy C'_1 és C'_2 minden literálja hamis $\mathcal{I}$ -ben, azaz a C_1 és C_2 klózokban L_1 és L_2 kivételével minden literál hamis. Az L_1 és L_2 literálok közül viszont csak az egyik lehet igaz, ezért a $\{C_1, C_2\}$ klózhalmazt az $\mathcal{I}$ interpretáció nem elégíti ki.

Lemma.

Legyen S tetszőleges klózhalmoz és a $k_1, k_2, \dots, k_m$ klózsorozat rezolúciós levezetés S -ből. Ekkor k_j minden $j = 1, 2, \dots, m$ -re tautologikus következménye az S klózhalmoznak, azaz $S \models_0 k_j$.

BIZONYÍTÁS.

1. A levezetés első klóza, k_1 , biztosan eleme S -nek, tehát $S \models_0 k_1$.
2. Tegyük most fel, hogy minden $j \leq n$ -re igazoltuk már, hogy $S \models_0 k_j$.
3. Belátjuk, hogy k_{n+1} -re is igaz az állítás. Ha $k_{n+1} \in S$, akkor $S \models_0 k_{n+1}$. Ha k_{n+1} valamely k_s, k_t klózok rezolvense, akkor az első tétel miatt $\{k_s, k_t\} \models_0 k_{n+1}$. Az indukciós feltevés miatt $S \models_0 k_s$ és $S \models_0 k_t$. Ebből $S \models_0 k_{n+1}$.

Tétel. [A rezolúciós kalkulus helyessége.]

Legyen S tetszőleges klózalmaz. Ha S -ből levezethető az üres klóz, akkor S kielégíthetetlen.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy van olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, ami kielégíti S -et. Az előbb bizonyított lemma szerint egy S -ből való rezolúciós levezetésbeli bármely k_j klózra $S \models_0 k_j$, tehát $\mathcal{I}$ kielégíti a rezolúciós levezetés minden klózát is. De az üres klóz kielégíthetetlen, tehát nem lehet eleme a levezetésnek. Így tehát ha S -ből levezethető az üres klóz, akkor S kielégíthetetlen.

Tétel. [A rezolúciós kalkulus teljessége.]

Ha az S véges klózalmaz kielégíthetetlen, akkor S -ből levezethető az üres klóz.

Következtetés rezolúciós kalkulussal

Legyen $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ a feltételformulák halmaza és B a tételformula. A feltételhalmazhoz hozzávesszük a tételformula negáltját és a kapott $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmazból előállítjuk az S klózalmazt. Ha S -nek van rezolúciós cáfolata, akkor

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models_0 B.$$

Példa.

Vegyünk a következő formulahalmazt:

$$\{X \supset Y, Y \supset Z, X \vee U, U \supset V \supset Z, \neg Z\}.$$

A tételformula $\neg X$. A tétel negáltját hozzátesszük a feltételformulák halmazához, és ha a kapott formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor igazoltuk, hogy $\neg X$ tétel. A rezolúciós kalkulus előkészítéseként a feltételformulákból klózokat állítunk elő:

$$\{\neg X \vee Y, \neg Y \vee Z, X \vee U, \neg U \vee \neg V \vee Z, \neg Z\}.$$

Ezt a klózalmazt kibővítjük az X formulával (klózzal), és rezolúciós levezetéssel megpróbáljuk levezetni az üres klózt.

1. $\neg X \vee Y$ [$\in S$]
2. $\neg Y \vee Z$ [$\in S$]
3. $\neg X \vee Z$ [1, 2 rezolvense]
4. $\neg Z$ [$\in S$]
5. $\neg X$ [3, 4 rezolvense]
6. X [$\in S$]
7. $\square$ [5, 6 rezolvense]

Tehát a $\neg X$ tétel.

5.1.1. Rezolúciós stratégiák

Egy rezolúciós levezetés szerkezetét *levezetési fa* segítségével szemléltethetjük. A levezetési fa csúcsai klózik. Két csúcsból pedig pontosan akkor vezet el egy harmadik, közös csúcsba, ha ott a két klóz rezolvense található.

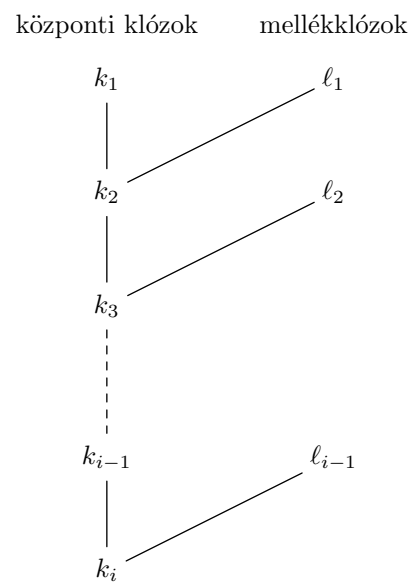
Egy S klózhalmazból való *lineáris rezolúciós levezetés* egy olyan $k_1, \ell_1, k_2, \ell_2, \dots, k_{m-1}, \ell_{m-1}, k_m$ rezolúciós levezetés, amelyben minden $j = 2, 3, \dots, m$ -re k_j a (k_{j-1}, ℓ_{j-1}) klózpár rezolvense. A k_j klózikat *centrális klóziknak*, az ℓ_j klózikat *melléklóziknak* nevezzük.

A lineáris rezolúciós levezetés definíciójából világos, hogy tetszőleges rezolúciós levezetés átírható lineárisrá, azaz

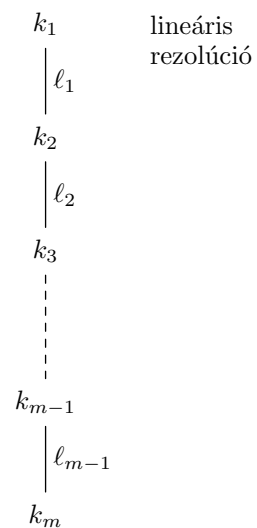
Tétel.

A lineáris rezolúciós kalkulus teljes.

A lineáris levezetés szerkezetét szemléltető levezetési fa a következő:



Szokás a levezetési fát egyetlen ágként (lineáris gráffal) is ábrázolni. Ekkor a centrális klózokat a csúcsokhoz, a melléklózokat pedig az élekhez rendeljük.



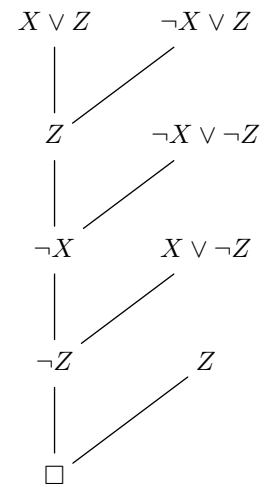
Amennyiben egy levezetést lineáris gráffal ábrázolunk, a gyökérben lévő k_1 klózzal kezdődő összes levezetést egyetlen fával ábrázolhatjuk. Ez a *teljes levezetési fa*. Egy csúcsból annyi él indul ki, ahány klózalmazbeli klózzal, illetve a levezetés során addig előállt rezolvenssel képezhető rezolvense a csúcshoz rendelt klóznak. A lineáris rezolúciós kalkulus teljessége miatt ha van az üres klóznak levezetése k_1 -ből, akkor azt meg is találjuk a levezetések teljes fájának bejárásával.

Példa.

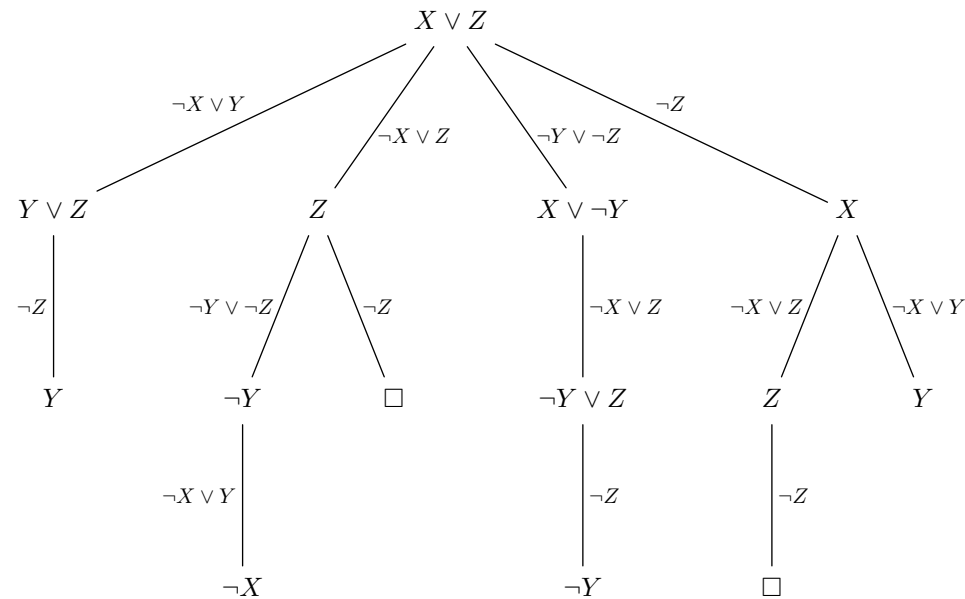
(a) Legyen $S = \{X \vee Z, \neg X \vee Z, X \vee \neg Z, \neg X \vee \neg Z\}$. S -ből az $X \vee Z$ klózzal kezdődő egy lehetséges lineáris levezetés:

1. $X \vee Z$ [$\in S$]
2. $\neg X \vee Z$ [$\in S$]
3. Z [1, 2 rezolvense]
4. $X \vee \neg Z$ [$\in S$]
5. X [3, 4 rezolvense]
6. $\neg X \vee \neg Z$ [$\in S$]
7. $\neg Z$ [5, 6 rezolvense]
8. Z [centrális klóz]
9. $\square$ [7, 8 rezolvense]

A levezetést szemléltető levezetési fa:



(b) Legyen $S = \{X \vee Z, \neg X \vee Z, \neg Y \vee \neg Z, \neg X \vee Y, \neg Z\}$.
 Állítsunk elő egy részletet a teljes levezetési fából. Induljunk ki a $X \vee Z$ klózból.



A gyakorlatban elterjedt két jól használható, de nem teljes rezolúciós stratégia a *lineáris input-* és az *egységrezolúciós stratégia*. A két eljárás ekvivalens egymással, azaz egy klózhalmaznak pontosan akkor van lineáris inputrezolúciós cáfolata, ha van egységrezolúciós cáfolata.

Egy S klózhalmazból való lineáris inputrezolúciós levezetés egy olyan $k_1, \ell_1, k_2, \ell_2, \dots, k_{m-1}, \ell_{m-1}, k_m$ lineáris rezolúciós levezetés, melyben minden $j = 1, 2, \dots, m - 1$ -re $\ell_j \in S$, azaz a lineáris input rezolúciós levezetésben a melléklózok S -nek elemei.

Egy S klózhalmazból való egységrezolúciós levezetés egy olyan $k_1, k_2, \dots, k_m$ rezolúciós levezetés, ahol minden $j = 1, 2, \dots, m$ -re ha $k_j \notin S$, akkor k_j két olyan őt a levezetésben megelőző k_s, k_t ($1 \leq s, t < j$) klóznak a rezolvense, amelyek közül az egyik egységklóz.

A lineáris inputrezolúciós stratégia nem teljes: Legyen a levezetésben k_m az üres klóz, vagyis a $(k_m - 1, \ell_m - 1)$ klózpár rezolvense. ℓ_{m-1} egységklóz és $\ell_{m-1} \in S$, tehát S -ben kell egységklóznak lenni. (Az egységrezolúció esetén pedig a levezetést el sem lehet kezdeni, ha nincs S -ben egységklóz.)

Példa.

Legyen a klózhalmaz

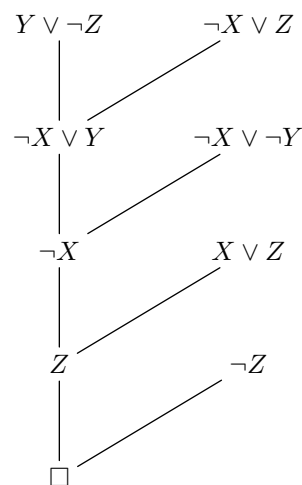
$$S = \{ Y \vee \neg Z, X \vee Z, \neg X \vee \neg Y, \neg X \vee Z, \neg Z \}.$$

Egy lineáris inputcáfolat:

1. $Y \vee \neg Z$ [$\in S$]
2. $\neg X \vee Z$ [$\in S$]
3. $\neg X \vee Y$ [1, 2 rezolvense]
4. $\neg X \vee \neg Y$ [$\in S$]

5. $\neg X$ [3, 4 rezolvense]
6. $X \vee Z$ [$\in S$]
7. Z [5, 6 rezolvense]
8. $\neg Z$ [$\in S$]
9. $\square$ [7, 8 rezolvense]

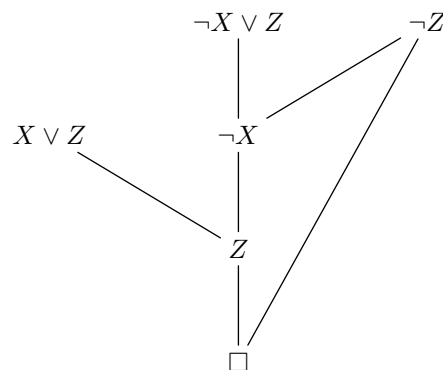
A lineáris inputrezolúcióhoz tartozó levezetési fa:



Egy egységcáfolat:

1. $\neg X \vee Z$ [$\in S$]
2. $\neg Z$ [$\in S$]
3. $\neg X$ [1, 2 rezolvense]
4. $X \vee Z$ [$\in S$]
5. Z [3, 4 rezolvense]
6. $\square$ [2, 5 rezolvense]

Az egységcáfolathoz tartozó levezetési fa:



Bár a lineáris inputrezolúciós stratégia nem teljes, meg lehet adni olyan formulaosztályt, amelyre az. Az olyan klózokat, amelyek legfeljebb egy pozitív literált tartalmaznak, *Horn-klóznak* nevezzük. A *Horn-formulák* pedig azok a formulák, melyek konjunktív normálformája Horn-klózok konjunkciója. Bebizonyították, hogy a lineáris inputrezolúciós stratégia Horn-formulák esetére (szokás azt is mondani, hogy a *Horn-logikában*) teljes.

5.2. A Herbrand-univerzum és az elsőrendű klózalmazok

Jó lenne, ha létezne olyan speciális $\mathcal{H}$ univerzum, hogy egy S elsőrendű klózalmaz pontosan akkor lenne kielégíthetetlen, ha kielégíthetetlen ezen $\mathcal{H}$ univerzum felett. Egy ilyen univerzum létezését mutatta meg Herbrand.

5.2.1. A Herbrand-univerzum előállítása

Legyen S tetszőleges klózhalmaz, a leíró nyelve pedig $\langle Pr, Fn, Cnst \rangle$.

1. $\mathcal{H}_0 \Rightarrow \begin{cases} Cnst, & \text{ha } Cnst \neq \emptyset, \\ \{a\} & \text{egyébként,} \end{cases}$ továbbá $i := 0$.
2. $\mathcal{H}_{i+1} \Rightarrow \mathcal{H}_i \cup T_i$, ahol
 $T_i \Rightarrow \{t \mid t = f(t_1, t_2, \dots, t_n), \text{ ahol } f \in Fn, t_j \in \mathcal{H}_i, j = 1, 2, \dots, n\}$,
 $i := i + 1$ és ismételjük meg a lépést.
3. $\mathcal{H} \Rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i$.

A $\mathcal{H}$ halmaz az S klózhalmaz Herbrand-univerzuma.

Példa.

Legyen $S = \{P(a), \neg P(x) \vee P(f(x))\}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= \{a\}, \\ \mathcal{H}_1 &= \{a, f(a)\}, \\ \mathcal{H}_2 &= \{a, f(a), f(f(a))\}, \\ &\vdots \\ \mathcal{H} &= \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots\}.\end{aligned}$$

Példa.

Legyen $S = \{P(x) \vee Q(x), R(z), T(y) \vee \neg W(y)\}$.

Mivel S -ben nincs konstansszimbólum, ezért legyen $\mathcal{H}_0 = \{a\}$.

S -ben függvényyszimbólum sincs, ezért

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = \dots = \mathcal{H} = \{a\}.$$

Példa.

Legyen $S = \{P(f(x), a, g(y), b)\}$. Ekkor

$$\mathcal{H}_0 = \{a, b\}$$

$$\mathcal{H}_1 = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b)\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), \\ f(f(a)), f(f(b)), f(g(a)), f(g(b)), \\ g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b))\} \end{aligned}$$

$\vdots$

Legyen az S klózalmaz leíró nyelve $\langle Pr, Fn, Cnst \rangle$, Herbrand-univerzuma pedig $\mathcal{H}$. S leíró nyelve *Herbrand-interpretációinak* nevezzük és $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ -vel jelöljük a nyelv azon interpretációit, melyek univerzuma éppen $\mathcal{H}$,

- minden $c \in Cnst$ konstansszimbólumhoz $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ a $c \in \mathcal{H}$ univerzum-elemet (önmagát) rendeli, és
- minden k aritású $f \in Fn$ függvényszimbólumhoz $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ hozzárendeli azt az $f^{\mathcal{I}_{\mathcal{H}}}: \mathcal{H}^k \rightarrow \mathcal{H}$ műveletet, amelyikre minden $h_1, h_2, \dots, h_k \in \mathcal{H}$ esetén

$$f^{\mathcal{I}_{\mathcal{H}}}(h_1, h_2, \dots, h_k) = f(h_1, h_2, \dots, h_k).$$

Egy S elsőrendű klózalmaz Herbrand-interpretációi tehát csak az S -ben előforduló predikátumszimbólumok interpretálásában különböznek.

Legyen S egy elsőrendű klózhalmaz és $\mathcal{H}$ a klózhalmazhoz tartozó Herbrand-univerzum. A $\mathcal{H}$ Herbrand-univerzum feletti zárt atomok egy rögzített sorozatát *Herbrand-bázisnak* nevezzük.

Világos, hogy ha adva van az S elsőrendű klózhalmaz egy $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ Herbrand-interpretációja, azt a következő módon is leírhatjuk: legyen $\{A_1, A_2, \dots\}$ az S klózhalmaz Herbrand-bázisa és legyen

$$L_i \rightleftharpoons \begin{cases} A_i, & \text{ha } A_i \text{ igaz } \mathcal{I}_{\mathcal{H}}\text{-ban,} \\ \neg A_i, & \text{ha } A_i \text{ hamis } \mathcal{I}_{\mathcal{H}}\text{-ban.} \end{cases}$$

Ekkor a $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ Herbrand-interpretációt az $\{L_1, L_2, \dots\}$ literál-halmaz egyértelműen megadja.

Példa.

Legyen $S = \{P(x) \vee Q(x), R(f(y))\}$. S Herbrand-univerzuma:

$$\mathcal{H} = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots\}.$$

S Herbrand-bázisa:

$$\{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \dots\}.$$

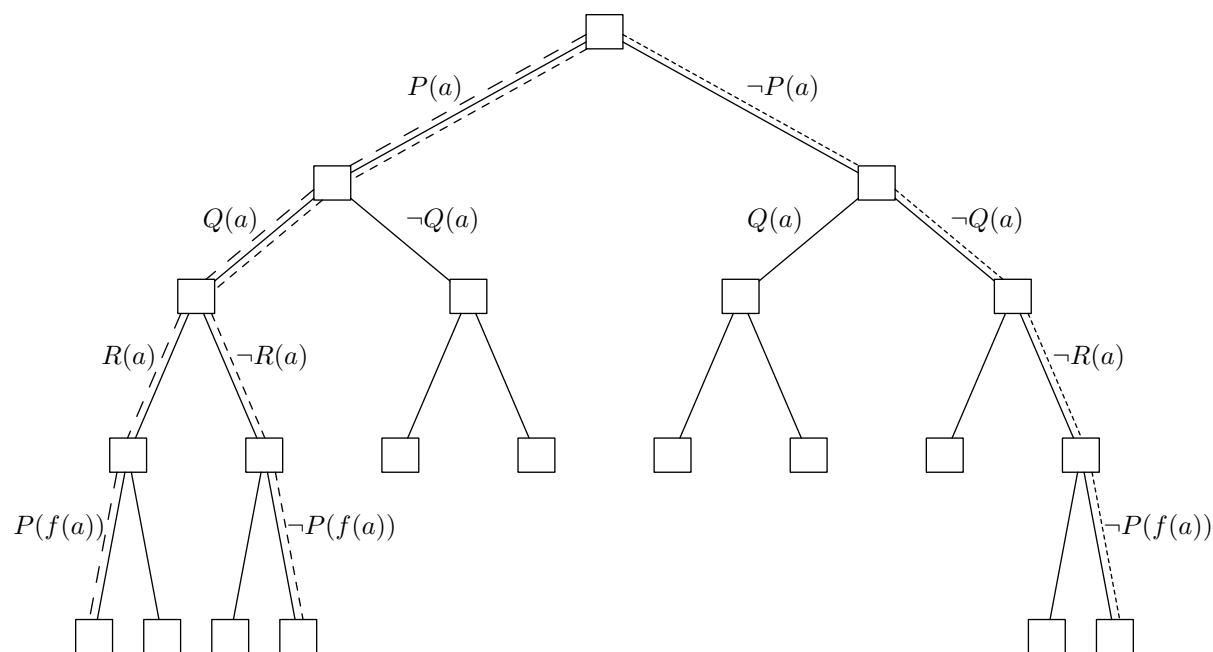
Néhány Herbrand-interpretáció:

$$\mathcal{I}_1 = \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \dots\}$$

$$\mathcal{I}_2 = \{\neg P(a), \neg Q(a), \neg R(a), \neg P(f(a)), \neg Q(f(a)), \neg R(f(a)), \dots\}$$

$$\mathcal{I}_3 = \{P(a), Q(a), \neg R(a), P(f(a)), Q(f(a)), \neg R(f(a)), \dots\}$$

Az alábbi ábrán látható szemantikus fán bejelöltük az $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$ Herbrand-interpretációkat.



Legyen az S klózhalmaz leíró nyelve $\langle Pr, Fn, Cnst \rangle$, és legyen ennek $\mathcal{I}$ valamely $\mathcal{U}$ univerzum feletti interpretációja.

Az $\mathcal{I}$ -nek *megfelelő Herbrand-interpretáció* S -nek egy olyan $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ Herbrand-interpretációja, amelyre teljesül, hogy van olyan

$$\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$$

függvény, hogy

a $P(h_1, h_2, \dots, h_n)$ zárt atom pontosan akkor igaz $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ -ban, ha a („neki megfelelő”) $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ atom igaz $\mathcal{I}$ -ben az

$$x_1 \mapsto \varphi(h_1), x_2 \mapsto \varphi(h_2), \dots, x_n \mapsto \varphi(h_n)$$

változókiértékelés mellett.

Most megmutatjuk, hogy valamely S elsőrendű klózhalmaz leíró nyelvének tetszőleges $\mathcal{I}$ interpretációjához van megfelelő Herbrand-interpretáció.

Legyen $\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}_{Pr}, \mathcal{I}_{Fn}, \mathcal{I}_{Cnst} \rangle$, ahol az interpretáció univerzuma $\mathcal{U}$.
 Legyen a $\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$ a következőképpen definiálva:

- ha $Cnst = \emptyset$, akkor a $\mathcal{H}$ -ben szereplő extra konstanshoz φ rendeljen tetszőleges $\mathcal{U}$ -beli elemet,
- minden $c \in Cnst$ (egyúttal $c \in \mathcal{H}$) konstansszimbólum esetén $\varphi(c)$ legyen az $\mathcal{I}_{Cnst}(c)$ $\mathcal{U}$ -beli elem,
- ha pedig $h \in \mathcal{H}$ $f(h_1, h_2, \dots, h_k)$ alakú, akkor $\varphi(f(h_1, h_2, \dots, h_k))$ legyen a $f^{\mathcal{I}}(\varphi(h_1), \varphi(h_2), \dots, \varphi(h_k))$ $\mathcal{U}$ -beli elem.

Most megadjuk az $\mathcal{I}$ -nek megfelelő Herbrand-interpretációt:

Ha az S Herbrand bázisabeli A_1 -nek „megfelelő” $\mathcal{I}$ -beli atom igaz, a Herbrand-interpretációt megadó literálhalmazba írjuk be A_1 -et, egyébként pedig $\neg A_1$ -et. Mivel a bázis elemei különbözőek, a Herbrand-bázis első k atomja igazságértékének rögzítése után A_{k+1} is „megkaphatja” a neki „megfelelő” $\mathcal{I}$ -beli atom igazságértékét.

Példa.

Legyen $S = \{P(x), Q(y, f(y, a))\}$.

Legyen $\mathcal{I}$ a következő: $\mathcal{U} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$, az a interpretáltja $\mathbf{2}$, a predikátum- és függvéneyszimbólumokhoz pedig az alábbi reláció- és művelettáblákkal definiált relációkat és műveleteket rendel $\mathcal{I}$.

$P^{\mathcal{I}}$	1	2
	i	h

$Q^{\mathcal{I}}$	1	2
1	h	h
2	i	i

$f^{\mathcal{I}}$	1	2
1	1	2
2	2	1

S Herbrand-univerzuma:

$$\mathcal{H} = \{a, f(a, a), f(a, f(a, a)), f(f(a, a), a), f(f(a, a), f(a, a)), \dots\}.$$

S Herbrand-bázisa:

$$\{P(a), Q(a, a), P(f(a, a)), Q(a, f(a, a)), Q(f(a, a), a), \dots\}.$$

Ekkor a $\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$ megfeleltetés:

$$a \mapsto \mathbf{2} \text{ (kötelező), } f(a, a) \mapsto \mathbf{1}, f(a, f(a, a)) \mapsto \mathbf{2}, f(f(a, a), a) \mapsto \mathbf{2}, \dots$$

Az $\mathcal{I}$ -nek megfelelő Herbrand-interpretáció:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \{\neg P(a), Q(a, a), P(f(a, a)), \neg Q(a, f(a, a)), Q(f(a, a), a), \dots\}.$$

Példa.

Legyen $S = \{P(x), Q(y, f(y, z))\}$. Vegyük észre, hogy S leíró nyelve az előző példabeli leíró nyelvtől csak abban különbözik, hogy ebben nincs konstansszimbólum. Interpretáljuk a S nyelvét az $\mathcal{I}'$ interpretációval, ami csak annyiban különbözik $\mathcal{I}$ -től, hogy konstansszimbólumot nyilván nem kell interpretálnia.

Most a $\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$ megfeleltetés során a -hoz bármely univerzumelem hozzárendelhető. Tartsuk meg a többi Herbrand-univerzumbeli elemre az előző példabeli megfeleltetést.

– Ha $a \mapsto \mathbf{2}$, akkor az $\mathcal{I}'$ -nek megfelelő Herbrand-interpretáció a fenti $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$.

– Ha $a \mapsto \mathbf{1}$, az $\mathcal{I}'$ -nek megfelelő Herbrand-interpretáció

$$\mathcal{I}'_{\mathcal{H}} = \{P(a), \neg Q(a, a), P(f(a, a)), \neg Q(a, f(a, a)), \neg Q(f(a, a), a), \dots\}.$$

Tétel.

Ha egy $\mathcal{I}$ interpretáció kielégít egy S elsőrendű klózhalmazt, akkor az $\mathcal{I}$ -nek megfelelő Herbrand-interpretáció is kielégíti S -t.

BIZONYÍTÁS.

A definíció szerint ha $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ az $\mathcal{I}$ -nek megfelelő Herbrand-interpretáció, akkor van olyan $\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$ függvény, hogy az $\mathcal{I}$ ugyanazt az igazságértéket rendeli a $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ atomhoz az

$$x_1 \mapsto \varphi(h_1), x_2 \mapsto \varphi(h_2), \dots, x_n \mapsto \varphi(h_n)$$

változókiértékelés mellett, mint az $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ a $P(h_1, h_2, \dots, h_n)$ -hez minden $h_1, h_2, \dots, h_n \in \mathcal{H}$ esetén.

Tétel.

Egy S elsőrendű klózhalmaz akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha S -t nem elégíti ki a Herbrand-univerzuma feletti egyetlen Herbrand-interpretáció sem.

BIZONYÍTÁS.

1. Tegyük fel, hogy S kielégíthetetlen. Ekkor S -t nem elégítheti ki (semmilyen univerzum felett) egyetlen interpretáció sem, így egyetlen Herbrand-interpretáció sem.
2. Tegyük fel, hogy S ugyan kielégíthetetlen az általa meghatározott Herbrand-univerzumon, de S nem kielégíthetetlen, azaz van olyan $\mathcal{U}$ univerzum és $\mathcal{I}$ interpretáció, amely S -t kielégíti. Legyen $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ a $\mathcal{I}$ -nek megfelelő Herbrand-interpretáció. Az előző tétel miatt $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ kielégíti S -t, pedig $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ a Herbrand-univerzum feletti interpretáció. Ellentmondásra jutottunk, tehát ha S kielégíthetetlen a Herbrand-univerzumán, akkor S kielégíthetetlen.

5.1. MEGJEGYZÉS. Egyik tétel sem áll fenn, ha S nem elsőrendű klózalmaz. Vagyis, ha S tetszőleges zárt formulák halmaza, akkor általában nem igaz, hogy S kielégíthetetlenségének vizsgálata esetén elég lenne S -et csak a Herbrand-struktúrákkal interpretálni.

Például legyen $S = \{P(a), \exists x \neg P(x)\}$. Az S második formulája nem elsőrendű klóz. S Herbrand-univerzuma: $\mathcal{H} = \{a\}$, S Herbrand-bázisa: $\{P(a)\}$. Az S formulahalmazt egyik Herbrand-interpretáció sem elégíti ki. Azonban S kielégíthető, hiszen az az $\mathcal{U} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ feletti $\mathcal{I}$ interpretáció, melyben $P^{\mathcal{I}}(\mathbf{0}) = i$, $P^{\mathcal{I}}(\mathbf{1}) = h$ és $a \mapsto \mathbf{0}$, kielégíti S -et.

Legyen S egy klózalmaz, $\mathcal{H}$ a Herbrand-univerzuma, κ egy változókiértékelés. Ekkor

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \kappa(x_1) & \kappa(x_2) & \dots & \kappa(x_k) \end{pmatrix}$$

egy termhelyettesítése S leíró nyelvének. A $C(t_1, t_2, \dots, t_n)\theta$ formulát a $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n C(t_1, t_2, \dots, t_n)$ klóz egy $\mathcal{H}$ feletti *alappéldányának* (alapklóz) nevezzük.

Példa.

Az $S = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), x), P(g(b)), \neg Q(y, z)\}$ klózalmaz klózzai Herbrand-univerzum feletti alappéldányai:

$$\begin{aligned} &\{\neg P(b) \vee Q(f(b), b), \neg P(f(b)) \vee Q(f(f(b)), f(b)), \\ &\neg P(g(b)) \vee Q(f(g(b)), g(b)), \dots, P(g(b)), \\ &\neg Q(b, b), \neg Q(f(b), b), \dots, \neg Q(f(g(b)), g(b)), \dots\} \end{aligned}$$

Most ismertetjük az elsőrendű rezolúciós kalkulushoz is elvezető Herbrand-tételt.

Tétel.

Egy S elsőrendű klózalmaz akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha az S klóza Herbrand-univerzum feletti alappéldányainak van véges kielégíthetetlen S' részalmaz.

Példa.

- (a) Legyen $S = \{P(x), \neg P(f(a))\}$. Az S elsőrendű klózalmaz kielégíthetetlen, mert S Herbrand-univerzum feletti alapklózainak

$$\{P(f(a)), \neg P(f(a))\}$$

egy véges kielégíthetetlen részhalmaza.

- (b) Az $S = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), x), P(g(b)), \neg Q(y, z)\}$ kielégíthetetlen, mert S Herbrand-univerzum feletti alapklózainak

$$\{\neg P(g(b)) \vee Q(f(g(b)), g(b)), P(g(b)), \neg Q(f(g(b)), g(b))\}$$

egy véges kielégíthetetlen részhalmaza. Ezek az alapklózok az $x \mapsto g(b)$, $y \mapsto f(g(b))$, $z \mapsto g(b)$ változókiértékelés mellett álltak elő.

5.3. A rezolúciós kalkulus az elsőrendű logikában

Példa.

$$C_1 = \forall x(P(f(x)) \vee Q(x)) \quad \text{és} \quad C_2 = \forall x\forall y(\neg P(f(x)) \vee R(x, y))$$

Ha a magjaikat a nulladrendű esethez hasonlóan rezolválnánk, a

$$C = \forall x\forall y(Q(x) \vee R(x, y))$$

klózhoz jutnánk. Lássuk be, hogy

$$\{\forall x(P(f(x)) \vee Q(x)), \forall x\forall y(\neg P(f(x)) \vee R(x, y))\} \models \forall x\forall y(Q(x) \vee R(x, y)).$$

Ha $\mathcal{I}$ kielégíti a C_1 és C_2 klózokat, a $P(f(x)) \vee Q(x)$ és $\neg P(f(x)) \vee R(x, y)$ formulák $\mathcal{I}$ -ben minden változókiértékelés mellett igazak.

Tehát ha $|P(f(x))|^{\mathcal{I}, \kappa} = h$, akkor $|Q(x)|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$, és ha $|\neg P(f(x))|^{\mathcal{I}, \kappa} = h$, akkor $|R(x, y)|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$. Mivel minden κ -ra $|P(f(x))|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$ esetén $|\neg P(f(x))|^{\mathcal{I}, \kappa} = h$ és fordítva, vagy a $|Q(x)|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$, vagy az $|R(x, y)|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$ fennáll, és így $|\forall x\forall y(Q(x) \vee R(x, y))|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$.

Ha ilyen módon képezve elsőrendű klózok rezolvensét szeretnénk ezt rezolúciós levezetési szabályként alkalmazni, akkor igazolni kell általánosan is a példabeli állítást.

Tétel.

Legyenek most C_1 és C_2 olyan elsőrendű klózok, melyek pontosan egy komplement literálpárt tartalmaznak, azaz C_1 és C_2 magjai $C_1^M = C_1^{M'} \vee L_1$ és $C_2^M = C_2^{M'} \vee L_2$ alakúak, ahol L_1 és L_2 komplement literálpár. Ha $C^M = C_1^{M'} \vee C_2^{M'}$ a C klóz magja, akkor $\{C_1, C_2\} \models C$.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel hogy az $\mathcal{I}$ interpretáció kielégíti a $\{C_1, C_2\}$ elsőrendű klózalmazt. Kövessük az előző gondolatmenetet. Az $\mathcal{I}$ interpretációban tetszőleges κ változókiértékelés mellett vagy L_1 és $C_2^{M'}$, vagy L_2 és $C_1^{M'}$ igaz. Azaz $\mathcal{I}$ -ben C igaz.

Komplemens párt nem tartalmazó két elsőrendű klóz Herbrand-univerzum feletti alappéldányaiban lehet komplementens pár.

Példa.

$$\{ \forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(x, f(y))), \forall z \forall v (\neg P(g(z)) \vee \neg P(v)), \forall u Q(g(u), u) \}.$$

Egyik klózpárban sincs komplementens literálpár. A Herbrand-univerzum:

$$\{ a, g(a), f(a), g(f(a)), g(g(a)), f(f(a)), f(g(a)), \dots \}.$$

Egy alaprezolúciós levezetés:

1. $Q(g(f(a)), f(a))$ [$u \mapsto f(a)$]
2. $P(g(f(a))) \vee \neg Q(g(f(a)), f(a))$ [$x \mapsto g(f(a)), y \mapsto a$]
3. $P(g(f(a)))$
4. $\neg P(g(f(a)))$ [$z \mapsto f(a), v \mapsto g(f(a))$]
5. $\square$

Tegyük egy új változót a kiválasztott alapklózokban az a helyébe.

1. $Q(g(f(w)), f(w))$ $[(u \parallel f(w))]$
2. $P(g(f(w))) \vee \neg Q(g(f(w)), f(w))$ $[(x, y \parallel g(f(w)), w)]$
3. $P(g(f(w)))$
4. $\neg P(g(f(w)))$ $[(z, v \parallel f(w), g(f(w)))]$
5. $\square$

Ez a levezetés a

$$\left\{ \forall w (P(g(f(w))) \vee \neg Q(g(f(w)), f(w))), \right. \\ \left. \forall w \neg P(g(f(w))), \forall w Q(g(f(w)), f(w)) \right\}$$

klózhalmazból való egy elsőrendű rezolúciós levezetés. Ezt a klózhalmazt úgy kaptuk az eredetiből, hogy az elsőrendű klózok magjaiban az atomi formulákban az individuumváltozók helyébe olyan termeket helyettesítettünk, amelyek azonos alapú literálokat eredményeztek.

Ezzel a – logikában egyébként nem megengedett – helyettesítéssel (illesztő helyettesítés)

- a klózhalmaz kielégíthetősége megőrződik,
- a kapott elsőrendű klózhalmaz alappéldányaiban a lehetséges komponens párok megjelennek.

Tétel.

Legyen C^M a C elsőrendű klóz magja. Tegyük fel, hogy

$$Par(C^M) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Legyen $\theta = (x_1, x_2, \dots, x_n \mid t_1, t_2, \dots, t_n)$ tetszőleges termhelyettesítés C leíró nyelvén, és

$$Par(C^M\theta) = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}.$$

Ekkor tetszőleges olyan $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ Herbrand-interpretációban, amelyben C igaz, a $\forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k (C^M\theta)$ klóz is igaz.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ Herbrand-interpretációban a C klóz, azaz $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n C^M$ igaz. Ekkor C^M a Herbrand-interpretációbeli minden változókiértékelés mellett igaz. Ez azt jelenti, hogy C^M Herbrand-univerzum feletti alapklózái $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ -ban igazak. Nyilván $C^M \theta$ -nak az $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ -beli tetszőleges κ változókiértékelés mellett $\mathcal{H}$ feletti alappéldányai mind C^M $\mathcal{H}$ feletti alapklózái, hisz a $t_1, t_2, \dots, t_n$ termek κ mellett $\mathcal{H}$ feletti alappéldányai jelennek meg az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók helyett C^M -ben. Ezek viszont mint Herbrand-univerzumbeli elemek C^M alappéldányaiban is előfordulnak.

Legyen W egy C elsőrendű klózban előforduló legalább két azonos alapú egyformán negált literál alapjainak halmaza. Ha W atomjai illeszthetők egymáshoz és σ a W legáltalánosabb illesztő helyettesítése, akkor a $C^M\sigma$ magú klózt a C klóz *faktorának* nevezzük. Ha a faktor egységklóz, akkor C *egységfaktorának* hívjuk.

Példa.

Legyen $C = \forall x \forall y (P(x) \vee P(f(y)) \vee \neg Q(x))$.

A két P -vel kezdődő atom legáltalánosabb illesztő helyettesítése a

$$\sigma = (x \parallel f(y)).$$

Ennek megfelelően a

$$\forall y (P(f(y)) \vee \neg Q(f(y)))$$

klóz a C klóz faktora.

Legyenek C_1 és C_2 változóikban tiszta klózok. Legyenek C_1 és C_2 magjai rendre $C_1^M = C_1^{M'} \vee L_1$ és $C_2^M = C_2^{M'} \vee L_2$ alakúak, ahol L_1 és L_2 ellentétesen negált literálok. Ha az L_1 és az L_2 literálok alapjai illeszthetők egymáshoz, legyen σ a legáltalánosabb illesztő helyettesítésük. Ekkor a C_1 és C_2 klózok *bináris rezolvence* a $C_1^{M'}\sigma \vee C_2^{M'}\sigma$ magú klóz.

A C_1 és a C_2 klózok *elsőrendű rezolvence* a következő bináris rezolvensek valamelyike:

1. a C_1 és a C_2 klózok bináris rezolvence,
2. a C_1 klóz és a C_2 klóz egy faktorának a bináris rezolvence,
3. a C_1 klóz egy faktorának és a C_2 klóznak a bináris rezolvence,
4. a C_1 klóz egy faktorának és a C_2 klóz egy faktorának a bináris rezolvence.

Példa.

Legyen $C_1^M = P(x) \vee Q(x)$ és $C_2^M = \neg P(a) \vee R(x)$. Mivel x mind C_1^M -ben, mind C_2^M -ben előfordul, a C_2^M -ben átnevezzük. Ezután $C_2^M = \neg P(a) \vee R(y)$. A rezolváláshoz válasszuk az $L_1 = P(x)$ és az $L_2 = \neg P(a)$ literálokat. Alapjaik legáltalánosabb illesztő helyettesítése: $(x \parallel a)$. Így tehát a C_1 és a C_2 klózok bináris rezolvense

$$Q(x)(x \parallel a) \vee R(y)(x \parallel a) = Q(x) \vee R(y),$$

ahol a $P(x)$ és a $\neg P(a)$ literálok szerint rezolváltunk.

Példa.

$C_1^M = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$ és $C_2^M = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$. A C_1 faktorának magja $P(f(y)) \vee R(g(y))$. C_1 faktorának és C_2 -nek bináris rezolvense a $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ klóz. Ennélfogva a C_1 és a C_2 klózok egyik elsőrendű rezolvense $R(g(g(a))) \vee Q(b)$.

Jelöljük C_1 és C_2 elsőrendű rezolvensét – utalva a rezolvensképzés módjára – a következőképpen: $((C_1\lambda_1)\sigma - L_1\sigma) \vee ((C_2\lambda_2)\sigma - L_2\sigma)$.
Tétel.

Legyen a C elsőrendű klóz a C_1 és C_2 elsőrendű klózok elsőrendű rezolvense. Ekkor $\{C_1, C_2\} \models C$.

BIZONYÍTÁS. C_1 és C_2 változóikban tiszta klózok. Rezolvensük általános esetben $C = ((C_1\lambda_1)\sigma - L_1\sigma) \vee ((C_2\lambda_2)\sigma - L_2\sigma)$. Az előbb bizonyított tétel miatt, ha az $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ Herbrand-interpretáció kielégíti $\{C_1, C_2\}$ -t, akkor $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ kielégíti a $\{C_1\lambda_1\sigma, C_2\lambda_2\sigma\}$ klózhalmazt is. Az a két literál, amely szerint rezolváltunk, a $C_1\lambda_1\sigma$ és $C_2\lambda_2\sigma$ klókban komplement literálpár, így

$$\{ C_1\lambda_1\sigma, C_2\lambda_2\sigma \} \models C.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $\{C_1, C_2\} \models C$.

Egy S elsőrendű klózalmazból való *elsőrendű rezolúciós levezetés* elsőrendű klózok egy olyan véges $k_1, k_2, \dots, k_m$ ($m \geq 1$) sorozata, ahol minden $j = 1, 2, \dots, m$ -re

1. vagy $k_j \in S$,
2. vagy van olyan $1 \leq s, t < j$, hogy k_j a k_s és k_t klózok elsőrendű rezolvense.

Tétel. [Elsőrendű rezolúciós kalkulus helyessége.]

Ha egy S elsőrendű klózalmazból van az üres klóznak elsőrendű rezolúciós levezetése, akkor S kielégíthetetlen.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy van az üres klóznak elsőrendű rezolúciós levezetése S -ből: $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m = \square$ ($m \geq 1$).

Tegyük fel ugyanakkor, hogy van olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, mely kielégíti S -t. Ezért ha a rezolúciós levezetésben $k_j \in S$, $\mathcal{I}$ kielégíti k_j -t. Ha pedig a rezolúciós levezetésben k_j a k_s és k_t ($1 \leq s, t < j$) klók elsőrendű rezolvense és $\mathcal{I}$ kielégíti a k_s és k_t klózat, akkor $\mathcal{I}$ kielégíti a rezolvensüket, k_j -t is. Ezért indukcióval könnyen látható, hogy $\mathcal{I}$ -nek ki kellene elégítenie a $\{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m\}$ klózalmazt is. De $k_m = \square$, az üres klóz pedig kielégíthetetlen, tehát S -nek is kielégíthetetlennek kell lennie.

Példa.

A

$$\{ \forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(x, f(y))), \forall z \forall v (\neg P(g(z)) \vee \neg P(v)), \forall u Q(g(u), u) \}$$

klózhalmazból szerkesszünk meg egy elsőrendű rezolúciós levezetést:

1. $Q(g(u), u)$
2. $P(x) \vee \neg Q(x, f(y)) \quad [(x, u \parallel g(f(y)), f(y))]$
3. $P(g(f(y)))$
4. $\neg P(g(z)) \vee \neg P(v) \quad [(v \parallel g(z)) \text{ faktorizáció, } (z \parallel f(y))]$
5. $\square$

A faktORIZÁCIÓ az elsőrendű rezolúciós elv lényeges eleme, alkalmazása nélkül az elsőrendű rezolúciós eljárás nem lenne teljes.

PÉLDA.

Adott a következő formulahalmaz:

$$\{ \forall x \forall y (P(x) \supset Q(y, y) \vee Q(x, y)), \\ \forall x \forall y \neg (P(x) \wedge Q(y, y) \wedge Q(x, y)), \\ \forall x P(x) \}.$$

A formulák alapján kapott klózhalmaz:

$$S = \{ \neg P(x) \vee Q(y, y) \vee Q(x, y), \neg P(x) \vee \neg Q(y, y) \vee \neg Q(x, y), P(x) \}.$$

1. A Herbrand-univerzum: $\mathcal{H} = \{a\}$. A Herbrand-bázis: $\{P(a), Q(a, a)\}$.
A $\mathcal{H}$ feletti alapklozshalmaz: $\{\neg P(a) \vee Q(a, a), \neg P(a) \vee \neg Q(a, a), P(a)\}$.
Alaprezolúciós levezetés:

1. $P(a)$
2. $\neg P(a) \vee Q(a, a)$
3. $Q(a, a)$ [1, 2 rezolvense]
4. $\neg P(a) \vee \neg Q(a, a)$
5. $\neg Q(a, a)$ [1, 4 rezolvense]
6. $\square$ [3, 5 rezolvense]

2. Elsőrendű rezolúciós levezetés S -ből, faktORIZÁCIÓ nélkül:

1. $P(x)$

2. $\neg P(x) \vee Q(y, y) \vee Q(x, y)$

3. $Q(y, y) \vee Q(x, y)$ [1, 2 rezolvence]

4. $\neg P(x) \vee \neg Q(y, y) \vee \neg Q(x, y)$

5. $\neg Q(y, y) \vee \neg Q(x, y)$ [1, 4 rezolvence]

A levezetés nem folytatható, mivel nincs olyan klózpár, amely egyetlen komplement literálpárt tartalmazna. Így az üres klózt nem kapjuk meg.

3. Rezolúciós levezetés S -ből, faktORIZÁCIÓVAL:

(a) Alkalmazzuk S klózaira a $\sigma = (x \parallel y)$ legáltalánosabb illesztő helyettesítést.

$$S_\sigma = \{ \neg P(y) \vee Q(y, y), \neg P(y) \vee \neg Q(y, y), P(y) \}.$$

(b) A levezetés S_σ -ból:

1. $P(y)$
2. $\neg P(y) \vee Q(y, y)$
3. $Q(y, y)$ [1, 2 rezolvense]
4. $\neg P(y) \vee \neg Q(y, y)$
5. $\neg Q(y, y)$ [1, 4 rezolvense]
6. $\square$ [3, 5 rezolvense]

Tétel. [Elsőrendű rezolúciós kalkulus teljessége.] Ha egy S elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen, akkor S -ből van az üres klóznak rezolúciós levezetése.

5.3.1. Rezolúciós levezetési stratégiák

1. A teljes szintek módszere

Legyen S tetszőleges klózhalmoz. A teljes szintek módszere a következőképpen állítja elő a levezetéshez a rezolvenseket:

$$1. R_0 := \{ C \mid C \text{ a } (C_1, C_2) \text{ pár rezolvense, } C_1, C_2 \in S \}, \\ S_1 := S \cup R_0, \quad i := 1.$$

2. Ha $\square \in S_i$, sikeresen vége. Egyébként

$$R_i := \{ C \mid C \text{ a } (C_1, C_2) \text{ pár rezolvense, } C_1 \in S_i, C_2 \in R_{i-1} \}, \\ S_{i+1} := S_i \cup R_i, \quad i := i + 1 \text{ és folytassuk a 2. lépéssel.}$$

Ezzel a módszerrel sok egyforma klóz jelenik meg a rezolvensek között, sőt olyan rezolvens klózek is a klózhalmozba kerülhetnek, amelyekre a továbblépésben biztosan nincs szükség. E problémák megoldására született meg a törlési stratégia.

2. A törlési stratégia

Minden $i = 1, 2, \dots$ esetén az R_i klózhalmazból el kell hagyni a fölösleges klózokat: a tautológiákat és azokat, amelyeket más klózok „tartalmaznak”.

Jelölje C^l és D^l rendre a C és a D klózok literáljainak halmazát. Egy C klóz *befoglalja* a D klózt, ha van olyan σ termhelyettesítés, hogy $C^l\sigma \subseteq D^l$. D a *befoglalt* klóz.

Példa.

Legyen $C = P(x)$ $D = P(a) \vee Q(a)$.

Ekkor $C^l = \{P(x)\}$ és $D^l = \{P(a), Q(a)\}$.

Ha $\sigma = (x \parallel a)$, akkor $C^l\sigma = \{P(a)\}$.

$C^l\sigma \subseteq D^l$, tehát C befoglalja D -t.

A tautológiákat és a befoglalt klózokat meg kell találni. A tautológiákat a faktORIZÁCIÓ segítségével fedhetjük fel.

A befoglalási teszt azonban nem olyan egyszerű.

Legyenek C és D klózok. Legyen $\theta = (x_1, x_2, \dots, x_n \parallel a_1, a_2, \dots, a_n)$, ahol $x_1, x_2, \dots, x_n$ a D -ben előforduló változók és $a_1, a_2, \dots, a_n$ sem C -ben, sem D -ben elő nem forduló különböző konstansszimbólumok. Tegyük fel, hogy $D = L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m$.

1. $W := \{ \neg L_1\theta, \neg L_2\theta, \dots, \neg L_m\theta \}$, $U_0 := \{ C \}$, $i := 0$,

2. Ha $\square \in U_i$, akkor vége: C befoglalja D -t. Egyébként

$$U_{i+1} = \{ C \mid C \text{ a } C_1, C_2 \text{ rezolvense, } C_1 \in U_i, C_2 \in W \},$$

3. Ha U_{i+1} üres, akkor vége: C nem foglalja be D -t. Egyébként $i := i + 1$, és folytatás a 2. lépéssel.

Példa.

$D = \neg P(h(y)) \vee Q(f(h(y)), a) \vee \neg P(z)$ és $C = \neg P(x) \vee Q(f(x), a)$.

Befoglalja-e C a D -t?

D változói az y és a z . Legyen $\theta = (y, z \parallel b, c)$.

Ekkor $D\theta = \neg P(h(b)) \vee Q(f(h(b)), a) \vee \neg P(c)$.

$$1. \ W = \{ P(h(b)), \neg Q(f(h(b)), a), P(c) \},$$

$$U_0 = \{ \neg P(x) \vee Q(f(x), a) \}.$$

2. Mivel $\square \notin U_0$, azt kapjuk, hogy

$$U_1 = \{ Q(f(h(b)), a), \neg P(h(b)), Q(f(c), a) \}.$$

3. Mivel $U_1 \neq \emptyset$ és az $\square \notin U_1$, az eljárást folytatva kapjuk, hogy

$$U_2 = \{\square\}.$$

4. Mivel $\square \in U_2$, az eljárásnak vége: C befoglalja D -t.

6. fejezet

A tablók módszere – tablókalkulus

6.1. Jelölt tábló az ítéletlogikában

Vezessünk be a logika nyelvébe két új szimbólumot: a T -t és az F -et. Ha A formula, TA és FA *jelölt formulák*.

Egy interpretációban TA igaz, ha A igaz és TA hamis, ha A hamis. Továbbá FA igaz, ha A hamis és FA hamis, ha A igaz.

Legyen S jelölt formulák tetszőleges halmaza. S *lefele zárt*, ha minden olyan esetben, amikor

1. $TA \wedge B \in S$, akkor $TA \in S$ és $TB \in S$,
2. $TA \vee B \in S$, akkor $TA \in S$ vagy $TB \in S$,
3. $TA \supset B \in S$, akkor $FA \in S$ vagy $TB \in S$,
4. $T\neg A$, akkor $FA \in S$,
5. $FA \wedge B \in S$, akkor $FA \in S$ vagy $FB \in S$,
6. $FA \vee B \in S$, akkor $FA \in S$ és $FB \in S$,
7. $FA \supset B \in S$, akkor $TA \in S$ és $FB \in S$ és
8. $F\neg A$, akkor $TA \in S$.

Jelölt formulák egy S halmaza *Hintikka-halmaz*, ha S lefele zárt és nem tartalmaz ellentétesen jelölt formulapárt.

Tétel.

Ha S Hintikka-halmaz, akkor kielégíthető.

BIZONYÍTÁS. Az S Hintikka-halmaz lefele zárt, tehát tartalmaz jelölt atomokat, de nem tartalmaz ellentétesen jelölteket. Legyen e tetszőlegesen rögzített igazságérték. Legyen az $\mathcal{I}$ interpretáció a következő:

$$\mathcal{I}(X) \Rightarrow \begin{cases} i & \text{ha } TX \in S, \\ h & \text{ha } FX \in S, \\ e & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A szerkezeti indukció elvének segítségével megmutatjuk, hogy tetszőleges $C \in S$ jelölt formula igaz $\mathcal{I}$ -ben.

(alaplépés:) Jelölt ítéletváltozókra $\mathcal{I}$ definíciója miatt nyilvánvaló, hogy igaz az állítás.

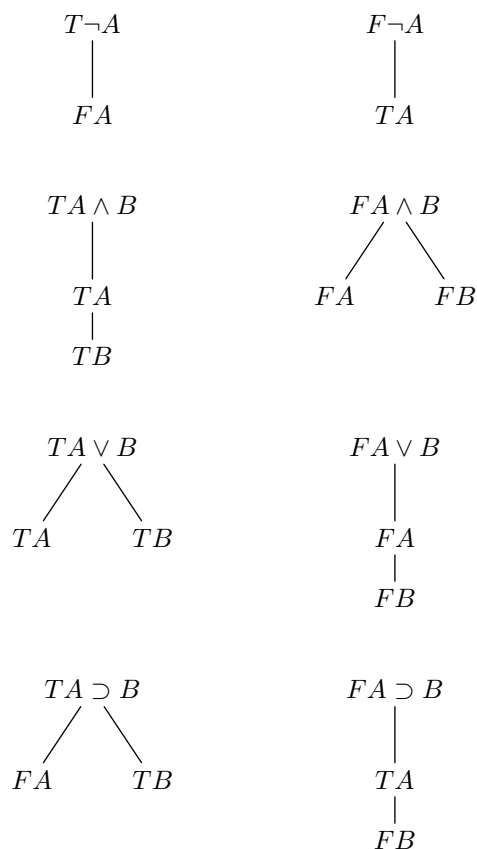
(indukciós lépések:) – Legyen $C = TA \wedge B$ alakú jelölt formula.

Mivel $C \in S$, így $TA \in S$ és $TB \in S$. Indukciós feltevésünk, hogy TA és TB igazak. De mivel $C = TA \wedge B$, ezért C is igaz. Hasonló az $FA \vee B$ és az $FA \supset B$ formulák esete.

– Legyen $C = FA \wedge B$ alakú jelölt formula. Mivel $C \in S$, így $FA \in S$ vagy $FB \in S$. Indukciós feltevésünk, hogy FA vagy FB igazak. De így a $C = FA \wedge B$ is igaz. Hasonló a $TA \vee B$ és a $TA \supset B$ formulák esete.

– Legyen $C = T\neg A$ alakú. Mivel $C \in S$, így $FA \in S$. Indukciós feltevésünk, hogy FA igaz, így C igaz. Hasonlóan az $F\neg A$ esetben.

A táblók módszerében (mint kalkulusban) minden „formulafajtára” van egy-egy levezetési szabály. A levezetési szabályt a formula *közvetlen táblójának* is nevezik:



Egy C jelölt formula *jelölt táblója* egy olyan bináris fa, melynek csúcsai jelölt formulák. A gyökérbe elhelyezzük a C jelölt formulát. Előállítjuk C közvetlen táblóját. Feltesszük, hogy a C -nek egy T táblója adott. Legyen T -ben D egy levélcsúcs. Ekkor a T tábló *közvetlen kiterjesztése* a következő:

- (A) Ha van még nem „feldolgozott” $TA \wedge B$, $FA \vee B$, $FA \supset B$ alakú jelölt formula a gyökérből a D csúcsba vezető úton, akkor kapcsoljuk D -hez ezen út folytatásaként a megfelelő formula közvetlen táblójából nyert jelölt formulákat mint új csúcsokat. Azaz két egymást követő csúcsot illesztünk a táblóhoz.
- (B) Ha van még nem „feldolgozott” $FA \wedge B$, $TA \vee B$, $TA \supset B$ alakú jelölt formula a gyökérből a D csúcsba vezető úton, akkor D -hez kapcsoljunk két csúcsot: a bal oldali a megfelelő formula közvetlen táblójából nyert egyik, a jobb oldali pedig a másik jelölt formula.

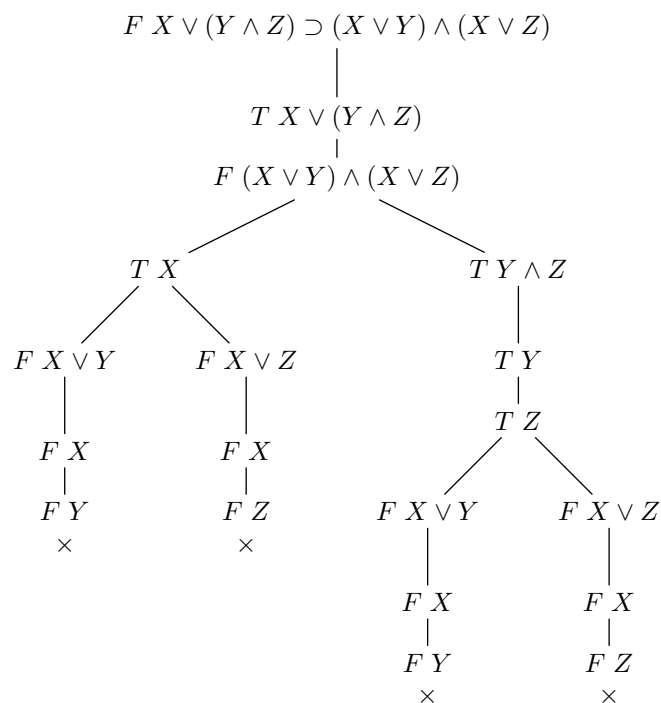
- (E) Ha van még nem „feldolgozott” $T\neg A$, $F\neg A$ alakú jelölt formula a gyökérből a D csúcsba vezető úton, akkor kapcsoljuk D -hez ezen út folytatásaként a megfelelő formula közvetlen táblójából nyert jelölt formulát mint új csúcsot.

Példa.

Adjuk meg most az

$$F(X \vee (Y \wedge Z)) \supset (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

formula jelölt táblóját.



A tábló egy *ága teljes*, ha az ágon lévő fel nem dolgozott formulák jelölt atomok. A tábló *teljes*, ha minden ága teljes.

A tábló egy *ága zárt*, ha az ágon egy formula T -vel és F -fel jelölve is előfordul. A tábló *zárt*, ha minden ága zárt, egyébként a tábló *nyitott*.

Azt mondjuk, hogy az A formulának létezik *táblócáfolata*, ha a TA táblója zárt, vagy hogy a B formula *bizonyítható táblóval*, ha FB táblója zárt.

Tétel. [A tablókalkulus helyessége.]

Ha a TA jelölt formula tablója zárt, akkor A kielégíthetetlen.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy TA tablója zárt, ekkor a tabló minden ága zárt. Mivel a tabló gyökerében lévő TA formula minden ágon szerepel, ezért ha A kielégíthető lenne, lenne olyan interpretáció, melyben TA igaz, de ekkor van olyan ág, melyen haladva ebben az interpretációban igaz jelölt formulákat kapunk. De akkor az ág nem lehet zárt.

Tétel.

Egy tábló bármely teljes, nyitott ága kielégíthető.

BIZONYÍTÁS. Legyen S az T tábló egy teljes, nyitott ágán az összes jelölt formula halmaza. S Hintikka-halmaz, mert nincs olyan X ítéletváltozó, hogy $TX, FX \in S$, továbbá ha

1. $TA \wedge B \in S$, akkor $TA \in S$ és $TB \in S$,
2. $TA \vee B \in S$, akkor $TA \in S$ vagy $TB \in S$,
3. $TA \supset B \in S$, akkor $FA \in S$ vagy $TB \in S$,
4. $T\neg A$, akkor $FA \in S$,
5. $FA \wedge B \in S$, akkor $FA \in S$ vagy $FB \in S$,
6. $FA \vee B \in S$, akkor $FA \in S$ és $FB \in S$,
7. $FA \supset B \in S$, akkor $TA \in S$ és $FB \in S$ és
8. ha $F\neg A$, akkor $TA \in S$.

A Hintikka-halmazok kielégíthetők, tehát S kielégíthető.

Tétel. [A tablókalkulus teljessége.]

Ha egy A formula kielégíthetetlen, akkor TA bármely teljes tablója zárt.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy T az TA formula egy teljes tablója. Ha T nyitott, akkor A kielégíthető. Ezért ha A kielégíthetetlen, akkor T biztosan zárt.

A tábló fogalmát most kiterjesztjük formulahalmazokra is.

Egy $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ *véges formulahalmaz táblója* gyökerében a formulahalmaz minden formulája szerepel. Ezután a C_1 teljes táblóját a gyökérhez kapcsoljuk. A nyitott ágakat a C_2 teljes táblójával folytatjuk és így tovább.

Egy $\{C_1, C_2, \dots\}$ *megszámlálhatóan végtelen formulahalmaz táblója* gyökerében a formulahalmaz minden formulája szerepel. Ezután az előbbi módszerrel definiáljuk a formulahalmaz táblóját.

6.2. Az elsőrendű tabló

Hogy a tárgyalás egyszerűbb legyen, az (egyfajtájú) elsőrendű logika nyelv ábécéjét – a nyelv kifejezőerejét megőrizve – újradefiniáljuk. A nyelv ábécéjének logikán kívüli szimbólumai legyenek a következők:

1. minden $k = 1, 2, \dots$ esetén k aritású predikátumszimbólumok megszámlálható sorozata,
2. individuumváltozók megszámlálható sorozata,
3. az individuumváltozóktól különböző ún. (individuum-)paraméter-szimbólumok megszámlálható sorozata.

A nyelv szintaxisa csak a termék definiálásában változik: az individuumváltozók és a paraméterszimbólumok lesznek a nyelv termjei.

Tiszta formulák azok az elsőrendű formulák, amelyekben nem fordul elő paraméterszimbólum.

A nyelv szemantikájának megadása során rögzítünk egy tetszőleges, nemüres halmazt, az univerzumot, jelöljük ezt most is $\mathcal{U}$ -val.

A nyelv tiszta formuláinak igazságértékét a különböző $\mathcal{U}$ feletti interpretációk és változókiértékelések mellett a szokásos módon definiálhatjuk.

Ha egy formulában minden paraméterszimbólum helyére $\mathcal{U}$ -nak egy-egy elemét írjuk be, ún. $\mathcal{U}$ -*formulát* nyerünk. Nyilván a tiszta formulák is $\mathcal{U}$ -formulák. Az összes – szabad individuumváltozót nem tartalmazó – *zárt* $\mathcal{U}$ -formulának a halmazát jelöljük $E^{\mathcal{U}}$ -val.

Legyen A egy az $u_1, u_2, \dots, u_n$ univerzumelemeket tartalmazó zárt $\mathcal{U}$ -formula. A az $\mathcal{U}$ feletti valamely $\mathcal{I}$ interpretációban pontosan akkor igaz, ha A -ba az $u_1, u_2, \dots, u_n$ helyére az A -ban nem szereplő $x_1, x_2, \dots, x_n$ egymástól különböző individuumváltozókat írva, a nyert tiszta formula $\kappa(x_i) = u_i$ ($i = 1, \dots, n$) mellett igaz $\mathcal{I}$ -ben.

Határozzuk meg végül a paraméterszimbólumokat is tartalmazó zárt – szabad individuumváltozót nem tartalmazó – formulák szemantikáját. Egy az $a_1, a_2, \dots, a_n$ paraméterszimbólumokat tartalmazó zárt formulát az $\mathcal{U}$ feletti valamely $\mathcal{I}$ interpretáció kielégíti, ha van a paraméterszimbólumoknak $\mathcal{U}$ -ba való olyan κ leképezése, hogy az $\kappa(a_i) \in \mathcal{U}$ individuumokat rendre a_i helyére írva, az így nyert zárt $\mathcal{U}$ -formula igaz $\mathcal{I}$ -ben.

Legyen $S \subseteq E^{\mathcal{U}}$ jelölt formulák tetszőleges halmaza. S az $\mathcal{U}$ univerzum felett *S lefele zárt*, ha minden olyan esetben, amikor

1. $TA \wedge B \in S$, akkor $TA \in S$ és $TB \in S$,
2. $TA \vee B \in S$, akkor $TA \in S$ vagy $TB \in S$,
3. $TA \supset B \in S$, akkor $FA \in S$ vagy $TB \in S$,
4. $T\neg A$, akkor $FA \in S$,
5. $T\forall x A \in S$, akkor minden $u \in \mathcal{U}$ -ra $TA_u^x \in S$,
6. $T\exists x A \in S$, akkor legalább egy $u \in \mathcal{U}$ -ra $TA_u^x \in S$,

7. $FA \wedge B \in S$, akkor $FA \in S$ vagy $FB \in S$,
8. $FA \vee B \in S$, akkor $FA \in S$ és $FB \in S$,
9. $FA \supset B \in S$, akkor $TA \in S$ és $FB \in S$ és
10. $F\neg A$, akkor $TA \in S$,
11. $F\forall xA \in S$, akkor legalább egy $u \in \mathcal{U}$ -ra $FA_u^x \in S$,
12. $F\exists xA \in S$, akkor minden $u \in \mathcal{U}$ -ra $FA_u^x \in S$.

$S \subseteq E^{\mathcal{U}}$ elsőrendű Hintikka-halmaz, ha az $\mathcal{U}$ univerzum felett lefelezárta és $\mathcal{U}$ -atom T -vel is és F -fel is egyszerre nem fordul elő benne.

Tétel. [Hintikka-lemma az elsőrendű logikában.]

Ha S az $\mathcal{U}$ univerzum feletti elsőrendű Hintikka-halmaz, akkor S kielégíthető ($\mathcal{U}$ felett).

Az elsőrendű táblók módszerében – az ítéletlogikai táblókhoz hasonlóan – minden formulafajtára van egy-egy levezetési szabály, azaz *közvetlen tábló*.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} T\forall xA \\ | \\ TA(x \parallel a) \end{array} & (C) & \begin{array}{c} F\exists xA \\ | \\ FA(x \parallel a) \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} T\exists xA \\ | \\ TA(x \parallel a) \end{array} & (D) & \begin{array}{c} F\forall xA \\ | \\ FA(x \parallel a) \end{array} \\
 & \text{(megkötéssel)} &
 \end{array}$$

A „megkötéssel” azt jelenti, hogy ha az a paraméterszimbólumot korábban már bevezettük valamely (C) vagy (D) közvetlen táblóval az ágon, akkor nem használhatjuk fel újra (mert az interpretációban szabadon választható értéket szeretnénk majd biztosítani e paraméterszimbólum számára). Ha viszont a (C) közvetlen táblót alkalmazzuk egy ilyen a ún. *kritikus* paraméterszimbólum bevezetése után, a felhasználható C -ben.

Egy tiszta formula jelölt táblóját a közvetlen táblók segítségével az ítéletlogikai definíció kiterjesztésével adhatjuk meg:

- (C) Ha van $T\forall xA$, illetve $F\exists xA$ alakú jelölt formula a gyökérből a D csúcsba vezető úton, akkor D -hez kapcsoljuk ezen út folytatásaként TA_a^x , illetve FA_a^x formulát mint új csúcsot, ahol a tetszőleges paraméterszimbólum.
- (D) Ha van $F\forall xA$, illetve $T\exists xA$ alakú nem „feldolgozott” jelölt formula a gyökérből a D csúcsba vezető úton, akkor D -hez kapcsoljuk ezen út folytatásaként TA_a^x , illetve FA_a^x formulát mint új csúcsot, ahol a kritikus paraméterszimbólum.

A (D) közvetlen tablót *liberalizálhatjuk* a következők szerint:

Ha az a paraméterszimbólumot új paraméterszimbólumként vezetünk be egy (C) közvetlen tablóval a tabló aktuális ágán, akkor később egy (D) közvetlen tablóval újra felhasználhatjuk (mivel a (C)-vel bevezetett paraméterszimbólum interpretációbeli értéke tetszőleges, tehát a (D)-vel bevezetett érték is megfelel számára.) Ezzel a liberalizálással a tabló sok esetben rövidíthető.

Példa.

A $\exists y(\exists x P(x) \supset P(y))$ formula jelölt tablója

1. nem liberalizált paramétertechnikával:

$$\begin{array}{c}
 F \exists y(\exists x P(x) \supset P(y)) \\
 | \\
 F \exists x P(x) \supset P(a) \\
 | \\
 T \exists x P(x) \\
 | \\
 F P(a) \\
 | \\
 T P(b) \\
 | \\
 F \exists x P(x) \supset P(b) \\
 | \\
 F P(b) \\
 \times
 \end{array}$$

2. liberalizált paramétertechnikával:

$$\begin{array}{c} F \exists y(\exists x P(x) \supset P(y)) \\ | \\ F \exists x P(x) \supset P(a) \\ | \\ T \exists x P(x) \\ | \\ F P(a) \\ | \\ T P(a) \\ \times \end{array}$$

A tabló egy ága zárt, ha az ágon (elsőrendű) komplement literálpár fordul elő, és a tabló akkor zárt, ha minden ága zárt, egyébként a tabló nyitott.

Tétel. [Az elsőrendű tabló helyessége.]

Ha az elsőrendű TA formula tablója zárt, akkor A kielégíthetetlen.

BIZONYÍTÁS. Ha egy tabló zárt, akkor TA nem lehet igaz egyetlen interpretációban sem, hisz egyetlen ága sem lehet igaz egyetlen interpretációban sem. Tehát a gyökérben lévő formula kielégíthetetlen.

A tabló egy ága *befejezett*, ha az ágon lévő fel nem dolgozott formulák literálok, és ha egy $T\forall xA$, illetve $F\exists xA$ formula és egy a paraméterszimbólum előfordul az ágon, akkor TA_a^x , illetve FA_a^x is szerepel ezen az ágon. A tabló *befejezett*, ha minden ága befejezett.

Ezután olyan szisztematikus tablóépítési stratégiát vezetünk be, amely biztosítja, hogy befejezett ágak állhassanak elő:

- Először az (A), a (B) és a (D) tablóépítési szabályokat hajtjuk végre, amíg lehet.
- Ezután a (C) közvetlen tablók alkalmazása következik az ágon előforduló paraméterszimbólumok segítségével.

A tablóépítést addig folytatjuk, amíg az ág vagy befejezett, vagy zárt nem lesz.

Tétel.

Egy befejezett szisztematikus tábló nyitott ágai kielégíthetők.

BIZONYÍTÁS. Egy befejezett szisztematikus tábló nyitott ágán egy elsőrendű Hintikka-halmaz áll elő, ahol $\mathcal{U}$ az ágon szereplő paraméterezimbólumok halmaza. Egy elsőrendű Hintikka-halmaz pedig kielégíthető.

Tétel. [Az elsőrendű tábló teljessége.]

Ha az A elsőrendű formula logikai törvény, akkor van az FA jelölt formulának zárt, befejezett táblója.

BIZONYÍTÁS. Legyen A elsőrendű logikai törvény. Legyen T az FA jelölt formula befejezett szisztematikus táblója. Ha T -nek lenne nyitott ága, akkor (és így $\neg A$ is) kielégíthető lenne, ellentétben azzal, hogy A törvény.