

Elsőrendű logika:

Prenex- , Skolem – normálforma

PRENEX - normálforma:

Hozzuk Prenex – normálformára a következő kifejezést:

$$\exists x [\exists y (B(x,y) \wedge P(y)) \rightarrow \forall y \exists z G(x,y,z)]$$

1.lépés: implikációk átírása $A(x) \rightarrow B(y) = \neg A(x) \vee B(y)$

$$\exists x [\neg \exists y (B(x,y) \wedge P(y)) \vee \forall y \exists z G(x,y,z)]$$

2.lépés: de Morgan azonosságok $\neg \exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$

$$\neg \forall x A(x) = \exists x \neg A(x)$$

$$\exists x [\forall y \neg (B(x,y) \wedge P(y)) \vee \forall y \exists z G(x,y,z)]$$

$$\exists x [\forall y (\neg B(x,y) \vee \neg P(y)) \vee \forall y \exists z G(x,y,z)]$$

3.lépés: kvantor kiemelés (Ez után Prenex forma)

$$\begin{aligned} - \forall x A(x) \vee \forall x B(x) &= \forall x \forall y (A(x) \vee B(y)) \\ &(\text{NEM} = \forall x (A(x) \vee B(x))) \end{aligned}$$

$$- \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) = \forall x (A(x) \wedge B(x))$$

$$- \exists x A(x) \vee \exists x B(x) = \exists x (A(x) \vee B(x))$$

$$\begin{aligned} - \exists x A(x) \wedge \exists x B(x) &= \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y)) \\ &(\text{NEM} = \exists x (A(x) \wedge B(x))) \end{aligned}$$

$$\exists x \forall y_1 \forall y_2 \exists z [\neg B(x,y_1) \vee \neg P(y_1) \vee G(x,y_2,z)]$$

4.lépés: disztributív szabályok alkalmazása a konjunktív normálformára való hozáshoz

(Ez után Prenex normálforma)

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Jelen feladatban nem kell használni mivel már konjunktív normálformát kaptunk.

5.lépés: SKOLEM – normálforma:

„ $\exists$ ” kvantorok változóinak kiértékelése

$$x \rightarrow c$$

$z \rightarrow f(y_1, y_2)$ - a változó függ az összes előtte álló „ $\forall$ ” kvantor változójától (más „ $\exists$ ” kvantorétól nem)

$$\forall y_1 \forall y_2 [\neg B(c, y_1) \vee \neg P(y_1) \vee G(c, y_2, f(y_1, y_2))]$$

1.) Hozzuk Skolem – normálformára:

$$\exists x K(x) \vee \neg \forall x [((R(x) \wedge T(x)) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \neg \forall y (\neg Q(y) \rightarrow P(x, y))]$$

1. implikációk

$$\exists x K(x) \vee \neg \forall x [\neg (\neg (R(x) \wedge T(x)) \vee Q(x)) \vee \neg \forall y (Q(y) \vee P(x, y))]$$

2. de Morgan

$$\exists x K(x) \vee \exists x [(\neg (R(x) \wedge T(x)) \vee Q(x)) \wedge \forall y (Q(y) \vee P(x, y))]$$

$$\exists x K(x) \vee \exists x [(\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y (Q(y) \vee P(x, y))]$$

3. kvantor kiemelés

$$\exists x \forall y \{K(x) \vee [(\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge (Q(y) \vee P(x, y))]\}$$

4. disztributív szabályok (itt most $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$)

$$\exists x \forall y \{[K(x) \vee \neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)] \wedge [K(x) \vee Q(y) \vee P(x, y)]\}$$

5. Skolemizálás

$$x \rightarrow c$$

$$\forall y \{[K(c) \vee \neg R(c) \vee \neg T(c) \vee Q(c)] \wedge [K(c) \vee Q(y) \vee P(c, y)]\}$$

2.) Hozzuk Skolem – normálformára:

$$\forall x [\forall y P(x, y) \wedge \exists y \neg (Q(y) \rightarrow P(x, a))] \rightarrow \neg \forall x \exists y [P(y, x) \rightarrow R(x, y)]$$

1. implikációk

$$\neg (\forall x [\forall y P(x, y) \wedge \exists y (Q(y) \wedge \neg P(x, a))]) \vee \neg \forall x \exists y [\neg P(y, x) \vee R(x, y)]$$

2. de Morgan

$$\exists x[\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y (\neg Q(y) \vee P(x,a))] \vee \exists x \forall y [P(y,x) \wedge \neg R(x,y)]$$

3.kvantor kiemelés

$$\exists x[\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y (\neg Q(y) \vee P(x,a)) \vee \forall y (P(y,x) \wedge \neg R(x,y))]$$

$$\exists x[\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y_1 (\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee \forall y_2 (P(y_2,x) \wedge \neg R(x,y_2))]$$

$$\exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2 [\neg P(x,y) \vee (\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee (P(y_2,x) \wedge \neg R(x,y_2))]$$

4.disztributív szabályok

$$\exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2 [\{\neg P(x,y) \vee \neg Q(y_1) \vee P(x,a) \vee (P(y_2,x))\} \wedge$$

$$\wedge \{\neg P(x,y) \vee \neg Q(y_1) \vee P(x,a) \vee \neg R(x,y_2)\}]$$

5.Skolemizálás

$$x \rightarrow s_1$$

$$y \rightarrow s_2$$

$$\forall y_1 \forall y_2 [\{\neg P(s_1,s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1,a) \vee (P(y_2,s_1))\} \wedge$$

$$\wedge \{\neg P(s_1,s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1,a) \vee \neg R(s_1,y_2)\}]$$

3.) Kis segítség skolemizáláshoz

$$\exists x_1 \exists x_2$$

$$x_1 \rightarrow c$$

$$x_2 \rightarrow d$$

$$\forall y \exists x$$

$$x \rightarrow f(y)$$

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4 \forall x_5 \exists x_6$$

$$x_1 \rightarrow c$$

$$x_3 \rightarrow f(x_2)$$

$$x_4 \rightarrow g(x_2)$$

$$x_6 \rightarrow h(x_2,x_5)$$

Források:

2. feladat: <http://www.inf.unideb.hu/~varteres/mi2folia/foliafo.pdf>