

Elsőrendű logika gigakonzi

Különbség a kétfajta logika közt:

nulladrendű: állításokat kezel (pl süt a nap)

→ elsőrendű: részletesebb, pontosabb leírása a valóságnak

Fogalmak:

- **univerzum:** legbővebb halmaz, amiben vizsgálódunk, aminek az elemeire az állítások igazak.
 - Az univerzumot úgy kell megválasztani, hogy ne kelljen új relációkat bevezetni, de ne is tűnjenek el állítások. Pl: A fiatalok szeretik a sört. Ha itt az univerzumnak az fiatalokat választom, akkor a mondat ezen része „eltűnik” a formalizált kifejezésből. Ha bővebbre veszem az univerzumot, akkor viszont plusz dolgokat kell bevezetnem. Pl, ha az előlényeket veszem univerzumnak, akkor azt is bele kéne vennem, hogy emberekről van szó (mert mondjuk a kiskutya is lehet fiatal, mégse szereti a sört).
- **objektumok:** változók, konstansok >> ezek az univerzum elemei
- **relációk:** egy vagy több objektum és a $\{I, H\}$ halmaz közt való leképezések
 - Egyváltozós: $R:U \rightarrow \{I, H\}$
 - Kétváltozós: $R:U \times U \rightarrow \{I, H\}$ stb.
 - Pl: $B(x,y)$ jelentése: x barátja-e y . DE $B(x)$ jelentheti ezt is: x barátja-e Józsinak. A relációk lényegében eldöntendő kérdések, melyek a paramétereikre vonatkoznak.
- **függvények:** Egy vagy több objektum és egy másik objektum közti leképezés
 - Egyváltozós: $f:U \rightarrow U$
 - Kétváltozós: $f:U \times U \rightarrow U$ stb.
 - Pl: $A(x)$: ennek a kifejezésnek az értéke egy olyan U -beli elem lesz, melyre igaz, hogy x apja.
- **kvantorok:**
 - Univezális: $\forall$ (minden...)
 - Egzisztenciális: $\exists$ (létezik/keressük/van olyan...)
 - Nyílt/zárt mondat: ha kötött minden változó, akkor zárt egy mondat, egyébként nyitott

Példák:

1) Minden kutya emlős és négylábú.

- **Univerzum választásának fontossága** (1.eset: univerzum=élőlények, 2.eset: univerzum=kutyák
→ Bár elvileg a második is helyes, az első megoldás a szerencsés).
- univerzum: élőlények
- Jelölések: $K(x)$: x kutya-e, $E(x)$: x emlős-e, $N(x)$: x négylábú-e
- Megoldás: $\forall x(K(x) \rightarrow (E(x) \wedge N(x)))$

2) Mindenki, aki átment a DM zh-n és nyert a lottón az boldog.

- Az **univerzális kvantoros** kifejezésekben szinte mindig **implikáció** szerepel.
- univerzum: emberek
- Jelölések: $\hat{A}(x)$: x átment-e a DM zh-n, $Ny(x)$: x nyert-e a lottón, $B(x)$: x boldog-e
- Megoldás: $\forall x((\hat{A}(x) \wedge Ny(x)) \rightarrow B(x))$

3) Van olyan rovar, amelyik nem bogár.

- FONTOS! Az **egzisztenciális kvantoros** mondatokban szinte mindig **konjugáció** szerepel, implikáció szinte soha.
- A nulladrendű logikához hasonlóan itt is igaz, hogy az **állítások/relációk pozitívak legyenek**, ne tagadások (pl: **nem** halandó)!
- univerzum: élőlények
- Jelölések: $R(x)$: x rovar-e, $B(x)$: x bogár-e
- megoldás: $\exists x (R(x) \wedge \neg B(x))$

4) Aki másnak vermet ás, maga esik bele.

- Lehet ám **trükkösen** is **megfogalmazni** a mondatokat, nem mindig fog az szerepelni, hogy „mindig”, vagy hogy „létezik”...
- univerzum: emberek
- Jelölések: $V(x)$: x vermet ás-e másnak, $B(x)$: x beleesik-e a verembe
- Megoldás: $\forall x (V(x) \rightarrow B(x))$

5) Egy állatbarát nem öl állatot.

- Ez is egy **trükkös megfogalmazás**.
- univerzum: élőlények
- Jelölések: $\hat{A}b(x)$: x állatbarát-e, $\hat{A}(x)$: x állat-e, $M(x, y)$: x megöli y-t
- Megoldás: $\forall x (\hat{A}b(x) \rightarrow \neg \exists y (\hat{A}(y) \rightarrow M(x, y)))$

6) Ezek egyazon példa variációi, az **egzisztenciális-univerzális kvantorok közti különbséget** és az **implikáció elemeinek sorrendjét** szemlélteti.

1. Az univerzum végig az emberek halmaza lesz.
2. Jelölések: $I(x)$: x ITK-s-e, $B(x, y)$: x és y barátkozik-e vagy $B(x)$: x barátkozik-e Laurával (és itt feltehetjük, hogy a barátkozás egy kölcsönös dolog, tehát szimmetrikus a relációnk) Mi most a kétváltozós „barátokozik”-relációt fogjuk használni.

a. Laura ITK-s.

- Bevezetünk egy konstanst: „L”. Ez mindig az univerzum egy adott elemét fogja jelenteni, esetünkben Laurát.
- Megoldás: $I(L)$

b. Laura barátkozik ITK-sokkal

- A "barátkozik" relációt felvehetjük egy- és kétváltozósként is, érdemes végiggondolni, mi a különbség a kettő közt.
- Megoldás: $\exists x (I(x) \rightarrow B(L, x))$ vagy $\exists x (I(x) \rightarrow B(x))$

c. Laura csak ITK-sokkal barátkozik

- Vedd észre: Előzőhöz képest az implikáció elemeinek sorrendje fordított.

- Megoldás: $\forall x (B(L,x) \rightarrow I(x))$
- d. *A nem ITK-sok nem barátkoznak Laurával.*
 - Megoldás: $\forall x (\text{nem } I(x) \rightarrow \text{nem } B(x,L))$
- e. *Laura mindenkivel barátkozik, aki ITK-s.*
 - Vedd észre: b) mondathoz képest csak annyi a különbség, itt univerzális kvantor szerepel.
 - Megoldás: $\forall x (I(x) \rightarrow B(L,x))$
- f. *Aki ITK-s nem barátkozik Laurával, aki pedig nem ITK-s, azzal Laura nem barátkozik.*
 - Megoldás: $\forall x (I(x) \rightarrow \text{nem } B(x,L)) \wedge \forall y (B(y,L) \rightarrow \text{nem } I(y))$
 - Megjegyzés: A mondat második felében nyugodtan lecserélhetnénk y-t x-re (a skólemizálásnál le is cseréljük), mivel a kvantorok érvényességi köre miatt amúgy is két különböző változóról van szó.

Normálformára alakítás

- 1) **Implikációk** átalakítása: $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$
- 2) **Negációk** zárójeleken belülről vitele: De Morgan-azonosságok segítségével
- 3) Standardizálás: a kvantorok megszüntetése előtt az azonos nevű változókat átnevezzük, ezután **minden kvantor kiírható a mondat elejére**
- 4) Skolemizáció: az **egzisztenciális kvantor kiküszöbölése** konstans- vagy függvénybevezetéssel
 - Ha az **egzisztenciális kvantor a mondat legelején** van: bevezetek egy **konstanst** az egzisztenciális kvantor által kötött változó helyett
 - Magyarázat: A mondat ilyenkor valahogy így néz ki: $\exists x$ (valami). Ezt úgy olvasom fel, hogy létezik/találok olyan x-et, melyre igaz a feltétel („valami”). Nosza, találjunk akkor egy ilyet, és nevezzük el (pl c-nek). Ha ezt a konstanst beírom a mondatba, akkor ugyan azt elfelejtem, hogy más ilyen konstansok is létezhetnek, de attól még a mondat biztos igaz lesz.
 - Ha **van univerzális kvantor az egzisztenciális kvantor előtt: függvényt** vezetek be.
 - Magyarázat: A mondat ilyenkor valahogy így néz ki: $\forall x \exists y$ (valami). Ez felolvashatom úgy, hogy minden x esetén/minden x-hez létezik egy olyan y, melyre igaz a feltétel. Ha minden x-hez létezik egy megfelelő y, akkor ez egy egymáshoz rendelés, amit függvénnyel le tudunk írni. Itt is elfeledkezünk arról, hogy minden x-hez több y is jó lenne, de ez nem baj, a mondat igaz marad.
- 5) **disztributív szabályok** alkalmazása a zárójelek felbontására

Példák:

- 1) Bűntény az, ha egy amerikai polgár fegyvert ad el egy Amerikával ellenséges nemzetnek. Nono egy ország, ami ellensége Amerikának, és fel van szerelve rakétákkal. Ezeket mind West ezredes adta el, aki amerikai.

Kérdés: Bűnöző-e West ezredes?

Megoldás:

A mondatok formális leírása:

$$\forall x, y, z \text{ Amerikai}(x) \wedge \text{Fegyver}(y) \wedge \text{Nemzet}(z) \wedge \text{Ellenséges}(z) \wedge \text{Elad}(x, y, z) \Rightarrow \text{Bűnöző}(x)$$

$$\exists x \text{ Birtokol}(\text{Nono}, x) \wedge \text{Rakéta}(x)$$

$$\forall x \text{ Birtokol}(\text{Nono}, x) \wedge \text{Rakéta}(x) \Rightarrow \text{Elad}(\text{West}, \text{Nono}, x)$$

$$\forall x \text{ Rakéta}(x) \Rightarrow \text{Fegyver}(x) \wedge \text{Ellenséges}(\text{Nono})$$

$$\text{Nemzet}(\text{Nono})$$

$$\text{Amerikai}(\text{West})$$

A normálformájú mondatok a kérdés tagadásával:

$$1. \neg \text{Amerikai}(x) \vee \neg \text{Fegyver}(y) \vee \neg \text{Nemzet}(z) \vee \neg \text{Ellenséges}(z) \vee \neg \text{Elad}(x, y, z) \vee \text{Bűnöző}(x)$$

$$2. \text{Birtokol}(\text{Nono}, M1)$$

$$1. \text{Rakéta}(M1)$$

$$4. \neg \text{Birtokol}(\text{Nono}, x) \vee \neg \text{Rakéta}(x) \vee \text{Elad}(\text{West}, \text{Nono}, x) \quad 5. \neg \text{Rakéta}(x) \vee \text{Fegyver}(x)$$

$$6. \text{Ellenséges}(\text{Nono})$$

$$7. \text{Nemzet}(\text{Nono})$$

$$8. \text{Amerikai}(\text{West})$$

$$9. \neg \text{Bűnöző}(\text{West})$$

A rezolúcióval előállított mondatok:

$$10. (5 - \{x : M1\}). \neg \text{Rakéta}(M1) \vee \text{Fegyver}(M1) \quad 11. (10 - 3).$$

$$\text{Fegyver}(M1)$$

$$12. (4 - \{x : M1\}). \neg \text{Birtokol}(\text{Nono}, M1) \vee \neg \text{Rakéta}(M1) \vee \text{Elad}(\text{West}, \text{Nono}, M1) \quad 13. (12 - 2 - 3).$$

$$\text{Elad}(\text{West}, \text{Nono}, M1)$$

$$14. (1 - \{x : \text{West}, y : M1, z : \text{Nono}\}). \neg \text{Amerikai}(\text{West}) \vee \neg \text{Fegyver}(M1) \vee \neg \text{Nemzet}(\text{Nono}) \vee$$

$$\vee \neg \text{Ellenséges}(\text{Nono}) \vee \neg \text{Elad}(\text{West}, \text{Nono}, M1) \vee \text{Bűnöző}(\text{West})$$

$$15. (14 - 8 - 11 - 7 - 6 - 13). \text{Bűnöző}(\text{West})$$

$$16. (15 - 9). \text{ellentmondás}$$

Hakkel Tamás
2016.02.16.

- 2) Tamás, Sándor és Eszter az Alpesi Klub tagjai. Minden klubtag vagy síelő, vagy hegymászó, vagy mindkettő. A hegymászók nem szeretik az esőt, a síelők viszont szeretik a havat. Eszter mindent szeret, amit Tamás nem szeret, és semmit sem szeret, amit Tamás szeret. Tamás szereti az esőt és a havat.

Kérdés: Van olyan klubtag, aki hegymászó, de nem síelő?

Megjegyzés: ez esetben az univerzum magában foglalja a klubtagokat és a természeti jelenségeket, de a helyettesítéseknél érdemes az értelmes kombinációkra törekedni.

A tudásbázisunk formálisan, plusz a kérdés negáltja:

$$\forall x \text{ Síel}(x) \vee \text{Mászik}(x)$$

$$\neg \exists x \text{ Mászik}(x) \wedge \text{Szereti}(x, \text{Eső})$$

$$\forall x \text{ Síel}(x) \Rightarrow \text{Szereti}(x, \text{Hó})$$

$$\forall x \text{ Szereti}(\text{Eszter}, x) \Rightarrow \neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, x)$$

$$\forall x \neg \text{Szereti}(\text{Eszter}, x) \Rightarrow \text{Szereti}(\text{Tamás}, x) \vee \text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Eső})$$

$$\text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó})$$

$$\neg \exists x \text{ Síel}(x) \wedge \text{Mászik}(x)$$

A normálformájú mondatok:

$$1. \text{Síel}(x) \vee \text{Mászik}(x) \quad 2. \neg \text{Mászik}(x) \vee \neg \text{Szereti}(x, \text{Eső}) \quad 3. \neg \text{Síel}(x) \vee \text{Szereti}(x, \text{Hó})$$

$$4. \neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, x) \vee \neg \text{Szereti}(\text{Eszter}, x)$$

$$5. \text{Szereti}(\text{Tamás}, x) \vee \text{Szereti}(\text{Eszter}, x)$$

$$6. \text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Eső})$$

$$7. \text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó}) \quad 8. \neg \text{Mászik}(x) \vee \text{Síel}(x)$$

A rezolvens mondatok:

$$9(1 - 8). \text{Síel}(x)$$

$$10(9 - 3). \text{Szereti}(x, \text{Hó})$$

$$11(10 - \{x : \text{Eszter}\}). \text{Szereti}(\text{Eszter}, \text{Hó})$$

$$12(4 - \{x : \text{Hó}\}). \neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó}) \vee \neg \text{Szereti}(\text{Eszter}, \text{Hó})$$

$$13(12 - 11). \neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó})$$

$$14(13 - 7). \text{ellentmondás}$$