

DM konzultáció

Rajna Zalán

logika (megoldások) matematika szigorlathoz mintafeladatok a témában

Egy kis elmélet (ismétlés):

- **Disztributív szabály:** $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
- **De Morgan azonosságok:** $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
- **Elnyelési szabály:** $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
- **Implikáció:** $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- **Tautológia:** a kifejezés minden interpretációban igaz.
- **Kontradikció:** a kifejezés minden interpretációban hamis.
- **Konjunktív normál forma (KNF):** $(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_n) \wedge (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_k) \wedge (\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_l) \wedge \dots$
- **Diszjunktív normál forma (DNF):** $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \vee (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \dots \wedge \beta_k) \vee (\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \dots \wedge \gamma_l) \vee \dots$
- **Modus ponens:** $(\alpha, \alpha \rightarrow \beta) \models_0 \beta$ $(\alpha, \neg \alpha \vee \beta) \models_0 \beta$

Feladatok, példák:

1.) Lássuk be, hogy a következő formulák ekvivalensek.

$(A \vee B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$ ill. $(A \rightarrow \neg B) \wedge \neg B$

megoldás:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge \neg B$	$(A \vee B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$	A	$\neg B$	$A \rightarrow \neg B$	$\neg B$	$(A \rightarrow \neg B) \wedge \neg B$
I	I	I	H	H	I	H	H	H	H
I	H	I	I	I	I	I	I	I	I
H	I	I	H	H	H	H	I	H	H
H	H	H	H	I	H	I	I	I	I

2.) Hozzuk konjunktív majd diszjunktív normál formára az alábbi kifejezést!

$\neg((B \rightarrow A) \rightarrow \neg(A \rightarrow C))$

megoldás:

$\neg((B \rightarrow A) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)) \equiv \neg(\neg(\neg B \vee A) \vee \neg(\neg A \vee C)) \equiv \neg((B \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg C)) \equiv \neg(B \wedge \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg C) \equiv (\neg B \vee A) \wedge (\neg A \vee C)$

$(\neg B \vee A) \wedge (\neg A \vee C) \equiv (\neg B \wedge (\neg A \vee C)) \vee (A \wedge (\neg A \vee C)) \equiv (\neg B \wedge \neg A) \vee (\neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge C)$

3.) Határozzuk meg az alábbi Y művelettel ekvivalens teljes konjunktív és teljes diszjunktív normál formát!

A	B	C	Y	DNF	KNF
I	I	I	H	$A \wedge B \wedge \neg C$ $A \wedge \neg B \wedge C$	$\neg A \vee \neg B \vee \neg C$
I	I	H	I		
I	H	I	I		
I	H	H	H		
H	I	I	I	$\neg A \wedge B \wedge C$	$\neg A \vee B \vee C$
H	I	H	H		
H	H	I	H	$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$	$A \vee \neg B \vee C$ $A \vee B \vee \neg C$
H	H	H	I		

megoldás:

TDNF: $Y \equiv (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

TKNF: $Y \equiv (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C)$

4.) Formalizáljuk a következő mondatokat!

- Ödön vagy Jakab otthon van, de nincs otthon mind a kettő.

megoldás: $[(\text{Ödön otthon van}) \vee (\text{Jakab otthon van})] \wedge \neg[(\text{Ödön otthon van}) \wedge (\text{Jakab otthon van})]$

- Ha nem esik az eső, de süt a nap, vagy a szél fúj, akkor elindulunk és szerencsésen megérkezünk; vagy megváltozik az idő, és tábort verünk, vagy visszafordulunk.

megoldás: $[(\neg(\text{esik az eső}) \wedge ((\text{süt a nap}) \vee \neg(\text{fúj a szél}))) \rightarrow ((\text{elindulunk}) \wedge (\text{szerencsésen megérkezünk}))] \vee ((\text{megváltozik az idő}) \wedge ((\text{tábort verünk}) \vee (\text{visszafordulunk})))$

- Szivárványt csak akkor láthatunk, ha a nap is süt, és az eső is esik, és nincsen dél.

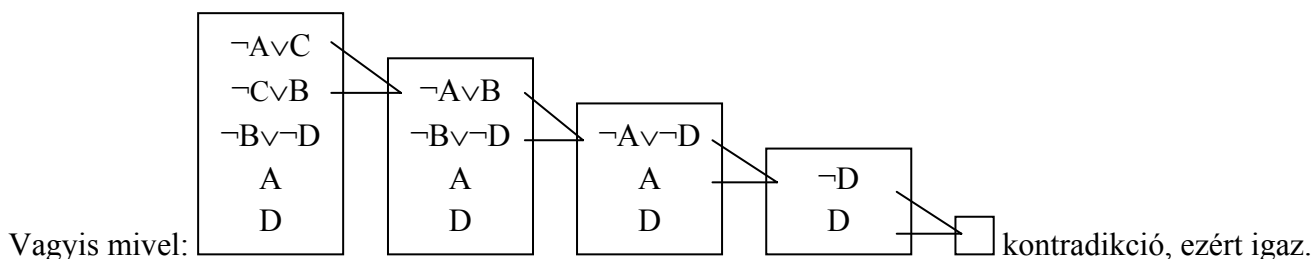
megoldás: $(\text{szivárványt látok}) \rightarrow ((\text{süt a nap}) \wedge (\text{esik az eső}) \wedge \neg(\text{dél van}))$

5.) Rezolúcióval lássuk be a következőt:

$A \rightarrow C$
$C \rightarrow B$
$\neg(B \wedge D)$
$A \rightarrow \neg D$

megoldás:

$A \rightarrow C$ $C \rightarrow B$ $\neg(B \wedge D)$ $A \rightarrow \neg D$	ACSA igaz, ha	$A \rightarrow C$ $C \rightarrow B$ $\neg(B \wedge D)$ $\neg(A \rightarrow \neg D)$	kontradikció.
--	---------------	--	---------------



6.) Formalizáljuk az alábbiakat!

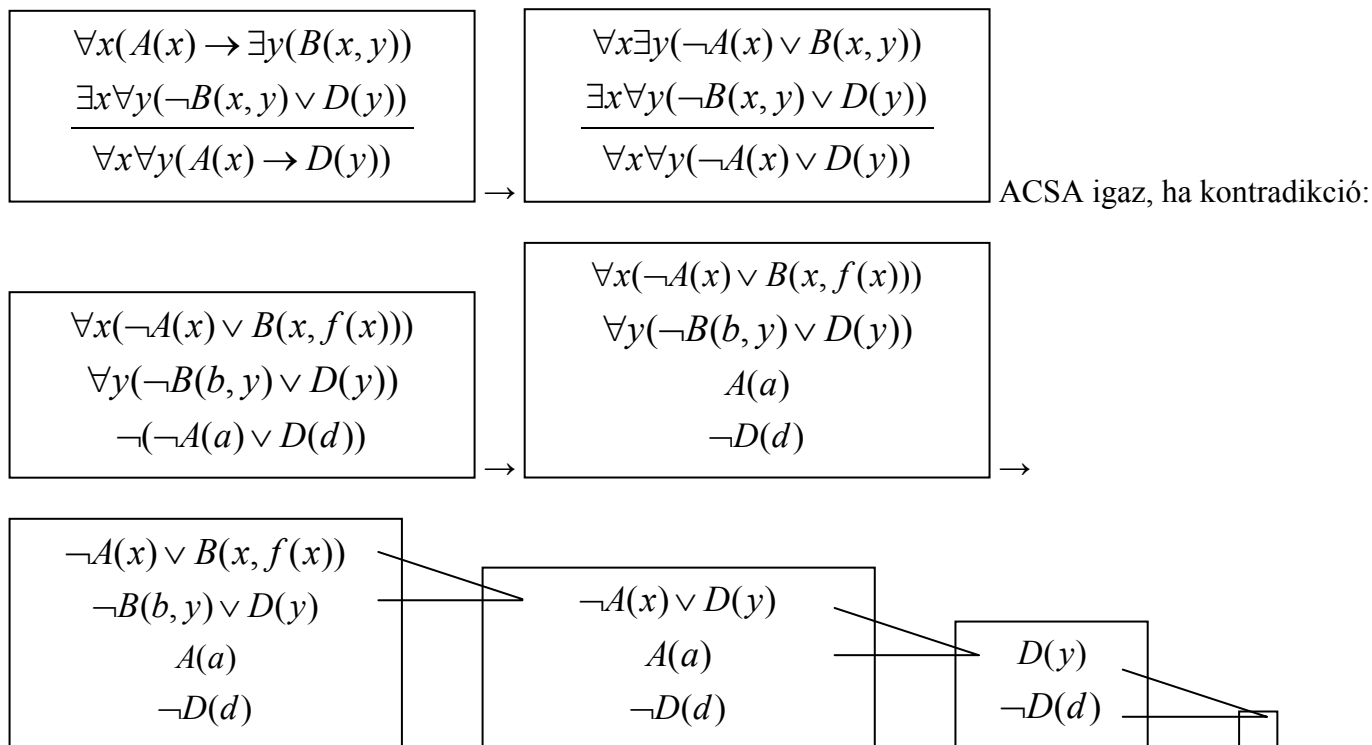
- Ödön fiatal:
megoldás: fiatal(Ödön)
- Ödön barátkozik fiatalokkal:
megoldás: $\exists x(\text{fiatal}(x) \wedge \text{barátkozik}(\text{Ödön}, x))$
- Ödön csak fiatalokkal barátkozik:
megoldás: $\forall x(\text{barátkozik}(\text{Ödön}, x) \rightarrow \text{fiatal}(x))$
- Az idősebbek nem barátkoznak Ödönnel:
megoldás: $\forall x(\neg \text{fiatal}(x) \rightarrow \neg \text{barátkozik}(x, \text{Ödön}))$
- Ödön mindenkivel barátkozik, aki fiatal:
megoldás: $\forall x(\text{fiatal}(x) \rightarrow \text{barátkozik}(\text{Ödön}, x))$
- Aki fiatal nem barátkozik Ödönnel, aki pedig idős, azzal Ödön nem barátkozik:
megoldás: $\forall x(\text{fiatal}(x) \rightarrow \neg \text{barátkozik}(x, \text{Ödön})) \wedge \forall y(\neg \text{fiatal}(y) \rightarrow \neg \text{barátkozik}(\text{Ödön}, y))$

7.) Lássuk be, hogy ez az elsőrendű következtetés helyes:

megoldás: rezolúcióhoz Skolem normál formára kell hozni a következtetést.

$$\frac{\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(B(x, y))) \quad \exists x \forall y(\neg B(x, y) \vee D(y))}{\forall x \forall y(A(x) \rightarrow D(y))}$$

- implikációk helyettesítése
- negálások bevitele atomi szintre
- kvantorok előre vitele
- egzisztenciális kvantor helyettesítése függvényekkel: $y_1 \rightarrow f(x)$, valamint $x_2 \rightarrow b$ és $x_3 \rightarrow a$, $y_3 \rightarrow d$.



További hasznos feladatok elsőrendű logikához:

http://www.cs.bme.hu/~acsbernadett/DM/Elsorendu_logika_gyakkieg.pdf