

Mi a logika?

- ▶ Régebbi elnevezés:
 - ▶ dialektika (a vitatkozás művészete)
 - ▶ analitika (Arisztotelésznél)
- ▶ Logika: az érvényes következtetés elmélete
- ▶ Következtetés:
 - ▶ 1. premissza: Ha esik az eső, sáros az út.
 - ▶ 2. premissza: Esik az eső.
 -
 - ▶ Konklúzió: Sáros az út.

Mikor érvényes egy következtetés?

- ▶ Mit értünk azon, hogy az alábbi következtetés érvényes?
 - ▶ Ha esik az eső, sáros az út.
 - ▶ Esik az eső.
 -
 - ▶ Sáros az út.
- ▶ Érvényes egy következtetés: ha a premisszák igazak, akkor a konklúzió is igaz.

Elsőrendű logika (predikátum logika)

- ▶ A nulladrendű logika azt tételezi fel a világról, hogy **tényekből áll**
- ▶ Az elsőrendű logika a nyelvhez hasonlóan azt tételezi fel, hogy a világot az alábbiak alkotják (többféle értelmezés is lehet):
 - ▶ **Objektumok**: pl. emberek, házak, számok, egyetemek, focibajnokságok
 - ▶ **Relációk**: piros, kerek, prím, testvére, rokona, része, kisebb_mint, apja, szereti, tanítja...
 - ▶ **Függvények/tulajdonságok**: apja, barátja, kisebb_mint, összeg, stb.

Kvantorok

- ▶ Univerzális kvantor: $\forall$ (minden)
- ▶ Egzisztenciális kvantor: $\exists$ (van olyan)
- ▶ Nyitott mondat:
 - ▶ x álmos. – $\dot{A}(x)$
- ▶ Kvantort elérve:
 - ▶ $\forall x (x \text{ álmos}): \forall x \dot{A}(x)$ Minden x -re, x álmos. Röviden: Mindenki álmos.
 - ▶ $\exists x (x \text{ álmos}): \exists x \dot{A}(x)$ Van olyan x , x álmos. Röviden: Van, aki álmos.
- ▶ Kvantor alkalmazásának sémája:
 - ▶ kvantor – változó – (hatókör)
- ▶ A kvantor leköti a nyitott mondat szabad változóját.
- ▶ Az egyváltozós nyitott mondatból zárt **mondatot** csinál.

Példák

- ▶ Kétváltozós nyitott mondat:
 - ▶ $(x \text{ ember}) \rightarrow (y \text{ barátja } x\text{-nek})$
 - ▶ Kiolvasás: Ha x ember, akkor y barátja x -nek.
- ▶ Kössük le y -t egzisztenciális kvantorral:
 - ▶ $(x \text{ ember}) \rightarrow \exists y (y \text{ barátja } x\text{-nek})$
 - ▶ Kiolvasás: Ha x ember, akkor van olyan y , hogy x barátja y -nak.
 - ▶ Röviden: Ha x ember, akkor x -nek van barátja.
- ▶ Kössük le x -et univerzális kvantorral:
 - ▶ $\forall x [(x \text{ ember}) \rightarrow \exists y (y \text{ barátja } x\text{-nek})]$
 - ▶ Kiolvasás: Minden x -re: ha x ember, akkor x -nek van barátja.
 - ▶ Röviden: Minden embernek van barátja.

További példák

- ▶ **Példa: Univerzum: Kiss, Nagy, Gauss, Bolyai**
- ▶ `PPKE_ITK_első_évfolyamos(x)`-mikor lesz igaz az értéke?
- ▶ `PPKE_ITK _első_évfolyamos(x)`-mikor lesz hamis az értéke?
- ▶ `x PPKE_ITK _első_évfolyamos(x)` -mikor lesz igaz az értéke?

Egzisztenciaállítások

- ▶ Egzisztenciaállítás: $\exists x.F(x)$
 - ▶ Létezik páros szám: $\exists x (x \text{ páros szám})$

Egyéb esetek:

- ▶ Van olyan F, amely G: $\exists x [F(x) \wedge G(x)]$
 - ▶ Van olyan gomba, amelyik mérgező: $\exists x (x \text{ gomba} \wedge x \text{ mérgező})$
- ▶ Van olyan F, amely nem G: $\exists x [F(x) \wedge \sim G(x)]$
 - ▶ Van olyan madár, amelyik nem repül: $\exists x [x \text{ madár} \wedge \sim (x \text{ repül})]$
- ▶ Nincs olyan F, amely G: $\sim \exists x [F(x) \wedge G(x)]$
 - ▶ Nincs olyan diák, aki megbukott. $\Leftrightarrow$ Egyetlen diák sem bukott meg.
 - ▶ $\sim \exists x [F(x) \wedge G(x)] \Leftrightarrow \forall x \sim [F(x) \wedge G(x)] \Leftrightarrow \forall x [F(x) \rightarrow \sim G(x)]$
- ▶ Nincs olyan F, amely G: $\sim \exists x [F(x) \wedge \sim G(x)]$
 - ▶ Nincs olyan ló, amelyik nem négylábú. $\Leftrightarrow$ Minden ló négylábú.
 - ▶ $\sim \exists x [F(x) \wedge \sim G(x)] \Leftrightarrow \forall x \sim [F(x) \wedge \sim G(x)] \Leftrightarrow \forall x [F(x) \rightarrow G(x)]$

Hogyan számítható ki egy formula igazságértéke?

Igaz-e, hogy $(\forall x \forall y P(x,y))$?

Ezt így önmagában nem tudjuk eldönteni, az előzőek értelmében meg kell mondanunk az interpretációt is, vagyis azt, hogy milyen értékeket vehet fel az x és y változó, és mi a jelentése a P prédikátumnak. A minden: és a létezik, van olyan: kvantorok jelentése tehát a következő:

$P(x)$ formula olvasása: minden x -re $P(x)$, bármely x -re $P(x)$, tetszőleges x -re $P(x)$.

És ezt jelentheti: minden (bármely, tetszőleges) x –re, ami a megadott univerzumból veheti fel az értékeit, igaz az, hogy a P -vel jelölt tulajdonsággal rendelkezik.

$\exists x P(x)$ formula olvasása: van olyan (létezik) x , amelyre $P(x)$.

És ezt jelentheti: van olyan (létezik legalább egy) x –re, ami a megadott univerzumból veheti fel az értékeit, igaz az, hogy a P -vel jelölt tulajdonsággal rendelkezik. Természetesen több ilyen x individuum érték is lehet.

I. interpretáció:

Legyen az univerzum a természetes számok halmaza, és $P(x, y)$ jelentse azt, hogy $x < y$.

Ekkor a $\forall \exists x y P(x, y)$ formula jelentése, interpretációja:

I. interpretáció:

Legyen az univerzum a természetes számok halmaza, és $P(x, y)$ jelentse azt, hogy $x < y$. Ekkor a $\forall x \exists y P(x, y)$ formula jelentése, interpretációja: Vagyis, minden x természetes számhoz létezik egy nálánál nagyobb y természetes szám. Ebben az interpretációban tehát a formula igaz.

II. interpretáció: univerzum:= természetes számok halmaza
 $P(x, y) := y < x$, vagyis, igaz-e, hogy $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}$, hogy $y < x$?
Ez nem igaz, mert az $x=1$ -hez nincs ilyen y . Hamis

II. interpretáció: univerzum: = racionális számok

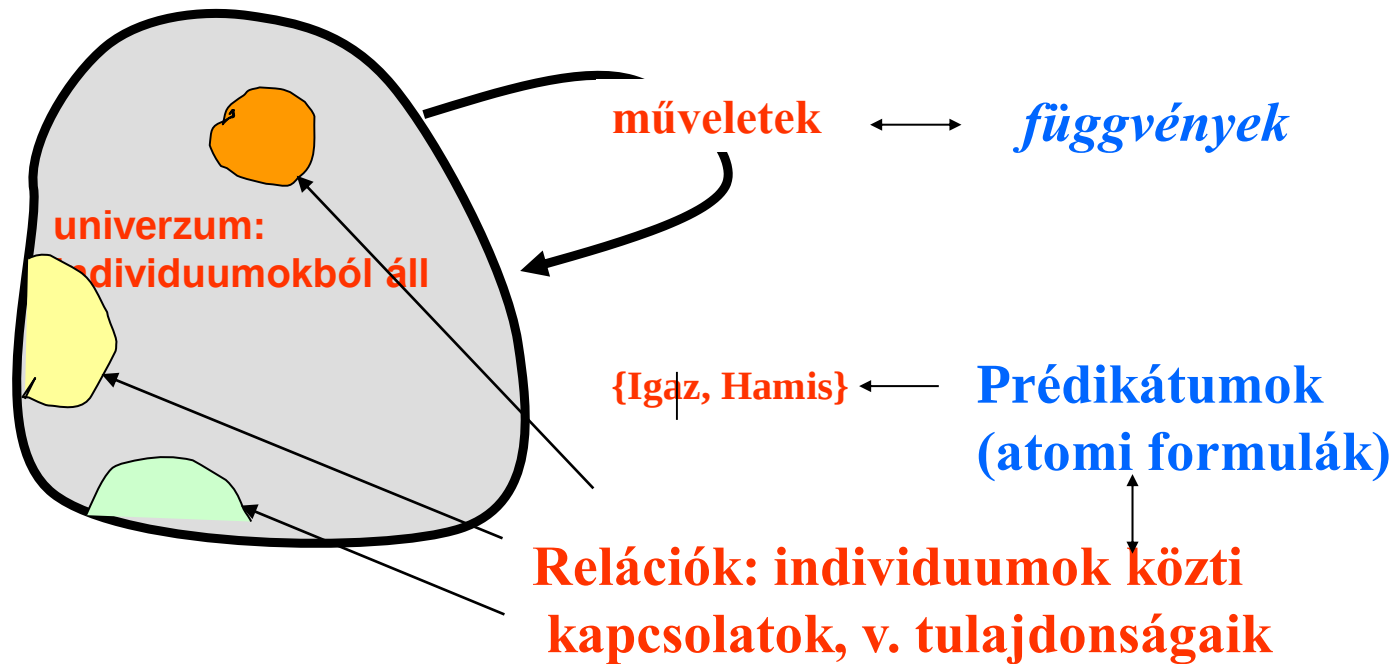
P mindkét($y < x$, $x < y$) interpretációjára a P reláció igaz

II. interpretáció: univerzum:= természetes számok halmaza
 $P(x, y) := y < x$, vagyis, igaz-e, hogy $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}$, hogy $y < x$?
Ez nem igaz, mert az $x=1$ -hez nincs ilyen y . Hamis

- 
- ▶ IV. **interpretáció:** univerzum:= Racionális számok $x, y \in \mathbb{Q}$
 - ▶ P prédikátum jelentése: $P(x,y) \sim x \cdot y = 1$ (azaz $P(x,y)$ igaz, ha $x \cdot y = 1$)
 - ▶ Ez hamis, mert $0 \in \mathbb{Q}$ -ra nincs ilyen y .
-
- ▶ V. **interpretáció:** univerzum:= Emberek halmaza
 - ▶ P predikátum jelentése: $P(x,y) \sim x$ -nek y az édesanyja.
 - ▶ Igaz-e, hogy $(\exists x \forall y P(x,y))$, vagyis, hogy (minden) embernek (létezik) édesanyja?
 - ▶ Ez igaz.

Elsőrendű logika:

Interpretáció és nyelv (formula)



PREDIKÁTUMKALKULUS – ELSŐRENDŰ NYELV SZINTAXIS

Jelkészlet

- ▶ elválasztó jelek: , ()
- ▶ logikai műveleti jelek: $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$
- ▶ kvantorok: $\forall$ $\exists$
- ▶ objektumváltozók, változók: $x, y, z, \dots$
- ▶ objektumkonstansok, konstansok: $a, b, c, \dots$
- ▶ függvényszimbólumok: $f, g, h, \dots$
- ▶ ítéletváltozók (logikai változók): $p, q, r, \dots$
- ▶ ítéletkonstansok: T, F
- ▶ predikátumszimbólumok: $P, Q, R, \dots$

SZINTAXIS: ATOM(I FORMULA)

Atomi formulák:

Ha a P „ n ” argumentumú prédikátumszimbólum, és $t_1, t_2, \dots, t_n$ termek, akkor $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ atomi formula.

A nulla argumentumos prédikátumszimbólumot az ítéletváltozóknak feleltetjük meg. Ily módon az elsőrendű logika a nulladrendű kiterjesztése.

Kifejezés (Term):

Minden individumváltozó és konstans kifejezés.

Ha $t_1, t_2, \dots, t_n$ kifejezés, és f „ n ” változós függvény szimbólum, akkor

$f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ is kifejezés.

Szintaxis: Formula

Formula (szintaxis): Minden atom formula

► **Jelentése (szemantika):**

Pl.. $P(x, y)$: x és y változókat konstansokkal helyettesítjük az univerzumból. Ezáltal nulladrendű kijelentést kapunk. A helyettesítéstől függően értéke igaz vagy hamis. Hogy melyik éppen, az az adott interpretációban RÖGZÍTVE VAN! (Csak a predikátumszimbólumok használatával kapunk atomi formulát!)

► **Formula (szintaxis):**

Ha α és β formulák, akkor $\neg\alpha$, $\beta \wedge \alpha$, $\beta \vee \alpha$, $\beta \rightarrow \alpha$, $\beta \leftrightarrow \alpha$ is formulák

► **Jelentése (szemantika):**

A nulladrendben megadott szemantika szerint

SZEMANTIKA:INTERPERTÁCIÓ

- ▶ **Elsőrendű formula szemantikája: INTERPRETÁCIÓ + KIÉRTÉKELÉS**
- ▶ **Interpretáció:**
- ▶ - univerzum megadása – **VÉGTELEN SOK VAN-TAUTOLÓGIÁNAK MI FELEL MEG?**
- ▶ - műveletek megadása-ez felel meg a függvényeknek, a függvényértékek ennek alapján adhatók meg
- ▶ - relációk konkrét értelmezése - ez felel meg a prédikátumoknak, ennek alapján mondjuk meg az atomi formulák igazságértékeit. Az igazságérték megadása csak a változók értékadása után lehetséges, tehát az értékadás is hozzátartozik az interpretációhoz.

SZEMANTIKA: KIÉRTÉKELÉS

Kiértékelés:

Ugyanazok a szabályok a szabályok mint a L0-ban, ehhez hozzávesszük a $\forall x \alpha(x)$

kiértékelését: $\alpha(x)$ -be az univerzum összes elemét behelyettesítve ha $\alpha(x)$ mindig igaz, akkor a formula igaz.

Hasonlóan az egzisztenciális kvantorra is:

$\alpha(x)$ -be az univerzum összes elemét behelyettesítve ha találunk egy $x = \dots$ -t, akkor a formula igaz.

PREDIKÁTUMKALKULUS - SZEMANTIKA

► interpretáció

- értelmezés alaphalmazának megválasztása ($U \neq \emptyset$)
- hozzárendelések:
 - minden konstans szimbólumnak egy elem megfeleltetése U -ból
 - minden n -argumentumú függvényszimbólumhoz egy $U^n \rightarrow U$ leképezés rendelése
 - minden n -argumentumú predikátumszimbólumnak egy $U^n \rightarrow \{T, F\}$ leképezés megfeleltetése

Példa: $\forall x [P(f(x,x),a) \rightarrow P(x,a)]$

U_1 : természetes számok **Mi a helyzet ha U_2 =egész számok?**

$a: 1$ $f(x,x): x^2$ $P(x,y): x=y$ $\forall x [(x^2=1) \rightarrow (x=1)]$

U_1 -ben: igaz vagy hamis?

U_2 -ben igaz vagy hamis?

SZEMANTIKA

Kielégíthető formula: **van modellje.**

$$\forall x [(x^2 = 1) \rightarrow (x = 1)]$$

U: természetes számok $\Rightarrow$ modellje

U: egész számok $\Rightarrow$ nem modellje

Érvényes formula (tautológia): **minden interpretációban igaz**, minden interpretáció a modellje. A **tautológia** megfelelője.

$$\forall x p(x) \vee \exists y \neg p(y)$$

Kontradikció-ellentmondás(os) formula: **nincs modellje.**

$$\forall x p(x) \wedge \exists y \neg p(y)$$

Hogyan lehetséges a formulák kiértékelése az összes lehetséges interpretációban??? **SKÓLEM NF ÉS REZOLÚCIÓ!**

FORMULÁK EKVIVALENCIÁJA

Logikai törvények

6. $A \vee F = A$

$$A \wedge T = A$$

7. $A \vee T = T$

$$A \wedge F = F$$

8. $A \vee \neg A = T$

$$A \wedge \neg A = F$$

9. $\neg(\neg A) = A$ kettős tagadás

10. $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \quad \text{deMorgan}$$

11. $A \wedge (A \vee B) = A$

$$A \vee (A \wedge B) = A \quad \text{abszorpció, elnyelés}$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A \quad \text{idempotencia}$$

FORMULÁK EKVIVALENCIÁJA

$$12. Qx A(x) \vee B = Qx (A(x) \vee B) \quad Q: \forall \text{ vagy } \exists$$

$$Qx A(x) \wedge B = Qx (A(x) \wedge B)$$

$$13. \neg(\forall x A(x)) = \exists x \neg A(x)$$

$$\neg(\exists x A(x)) = \forall x \neg A(x)$$

$$14. \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) = \forall x (A(x) \wedge B(x))$$

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) = \exists x (A(x) \vee B(x))$$

$$15. Qx A(x) \vee Qx B(x) = Qx Qy (A(x) \vee B(y))$$

$$Qx A(x) \wedge Qx B(x) = Qx Qy (A(x) \wedge B(y))$$

$$(14) \quad \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \neq \forall x (A(x) \vee B(x)) !!$$

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) = \forall x A(x) \vee \forall y B(y) = \forall x \forall y (A(x) \vee B(y)) \quad - (15)$$

$$\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \neq \exists x (A(x) \wedge B(x)) !!$$

$$\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) = \exists x A(x) \wedge \exists y B(y) = \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y)) \quad - (15)$$

LOGIKAI KÖVETKEZMÉNY

F1: $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

F2: $P(a)$

F3: $Q(a)$

F1 és F2 formulákból következik-e F3?

► Logikai következmény definíciója alapján:

A következmény legalább azokban az interpretációkban igaz, ahol a feltételek:

- F1 igaz minden x -re, speciálisan a -ra is
- F2 igaz
- $\Rightarrow$ F3 is igaz (implikáció)

Rezolúcióhoz szükséges helyes következtetések, HA MINDEN VÁLTOZÓ (x,y,z) UNIVERZÁLISAN KVANTÁLT

a, b konstansok

$$\frac{\neg \neg P(x)}{P(x)} \quad \text{Ezt értjük 😊}$$

$$\frac{P(x) \vee Q(x), \neg P(A)}{Q(A)} \quad \text{Itt x-et helyettesítettük A-val –
általánosabban ld. később}$$

$$\frac{P(x) \vee Q(y), \neg Q(x) \vee R(z)}{?? P(x) \vee R(x) ??} \quad \text{Itt y,z-t helyettesíthetjük x-
szel, kapjuk:}$$

$$\frac{P(x) \vee Q(x), \neg Q(x) \vee R(x)}{P(x) \vee R(x)}$$

Rezolúcióhoz szükséges helyes következtetések, HA MINDEN VÁLTOZÓ (x) UNIVERZÁLISAN KVANTÁLT

a, b konstansok

$$\frac{P(x) \vee Q(a) , \neg Q(x) \vee R(x)}{P(x) \vee R(x)}$$

a-t helyettesítve, láttuk:

$$\frac{P(a) \vee Q(a) , \neg Q(a) \vee R(a)}{P(a) \vee R(a)}$$

$$\frac{P(x) \vee Q(a) , \neg Q(b) \vee R(x)}{??????}$$

DE: ha $a \neq b$, **akkor NEM**
tudunk rezolválni!!

TÉTELBIZONYÍTÁS REZOLÚCIÓVAL ISMÉTLÉS

GI
KA
24

minden formula átalakítható **konjunktív normálformára**

Transzformációs szabályok:

- a) $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ ($\leftrightarrow$ kiküszöbölése)
- b) $A \rightarrow B = \neg A \vee B$ ($\rightarrow$ kiküszöbölése)
- c) $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ ($\neg$ hatáskörének redukálása)
- d) $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ ($\neg$ hatáskörének redukálása)
- e) $\neg\neg A = A$ ($\neg$ hatáskörének redukálása)
- f) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (klózek konjunkciójának létrehozása)

PÉLDA:

$$\neg(((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg(s \wedge r)) \rightarrow (p \rightarrow \neg s))$$

$$\neg(\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg(s \wedge r)) \vee (\neg p \vee \neg s)) \quad \text{b.)}$$

$$\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee r) \vee (s \wedge r) \vee (\neg p \vee \neg s)) \quad \text{d.)}$$

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg(s \wedge r) \wedge \neg(\neg p \vee \neg s) \quad \text{c.) e.)}$$

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg s \vee \neg r) \wedge p \wedge s \quad \text{c.) d.) e.)}$$

ISM.: TÉTELBIZONYÍTÁS REZOLÚCIÓVAL

$\alpha \models \beta \Leftrightarrow \alpha \rightarrow \beta$ TAUTOLÓGIA $\Leftrightarrow \alpha \wedge \neg \beta$ KONTRADIKCIÓ

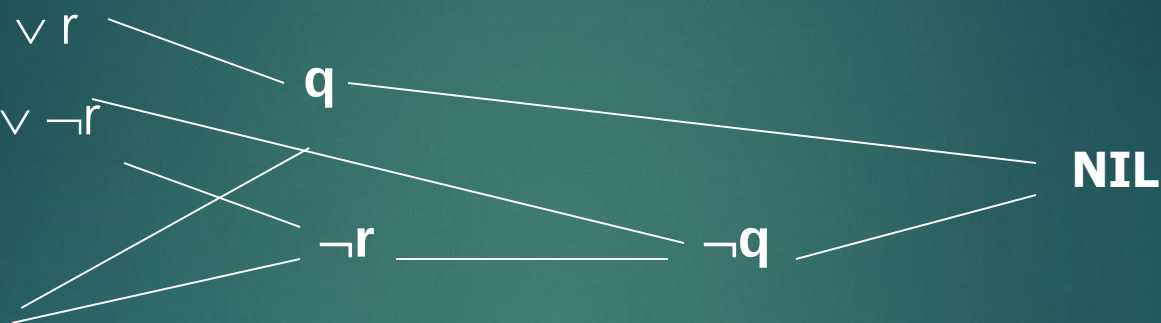
C1: $\neg p \vee q$

C2: $\neg q \vee r$

C3: $\neg s \vee \neg r$

C4: p

C5: s



új klóz előállítása: rezolúció alaplépése- helyes következtetési forma

$\neg p \vee q$

$\neg s \vee \neg r$

$\neg q \vee r$

q

p

s

$\neg r$

$\neg q$

q

$\neg r$

$\neg q$

NIL

MELYIK A CÉLÁLLÍTÁS? MIT BIZONYÍTOTTUNK?

TÉTELBIZONYÍTÁS REZOLÚCIÓVAL

rezolválható klózok: **komplemens** literálpárt tartalmaznak

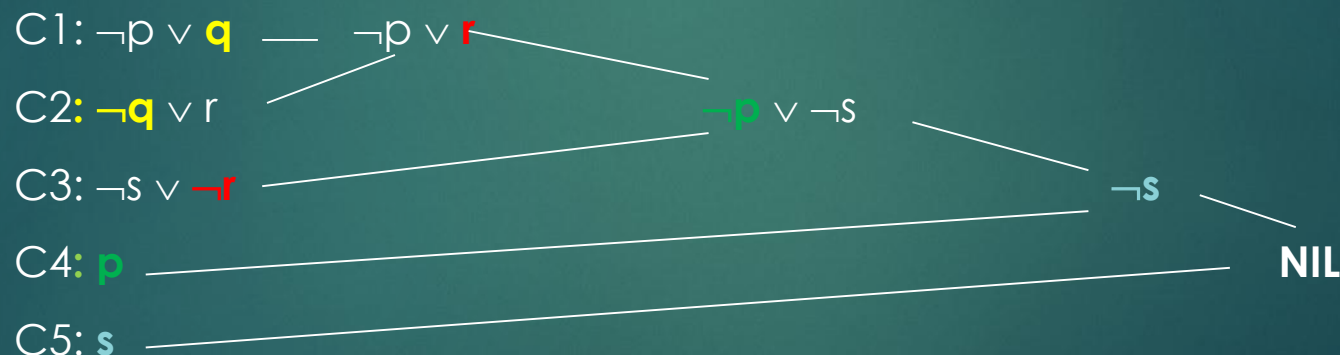
komplemens literálpár: egy logikai változó és a negáltja együtt

rezolvens klóz: komplemens literálok elhagyása után maradó részek
diszjunkcióval összekapcsolva

üres klóz: NIL, minden reprezentációban hamis

rezolúció tulajdonságai:

- ▶ „algorithmusa” nemdeterminisztikus



- ▶ helyes (valóban logikai következmény)
- ▶ teljes (HORN klózokra: minden logikai következmény belátható rezolúcióval)

VISSZA: PREDIKÁTUMKALKULUS - PÉLDA

állítások:

A1: Van olyan páciens, aki minden doktorban megbízik.

A2: A kuruzslókban egyetlen páciens sem bíz meg.

A3: Egyetlen doktor sem kuruzsló.

A1 és A2 állításokból következik-e A3?

predikátumok:

$P(x)$: x egy páciens

$D(y)$: y egy doktor

$K(z)$: z egy kuruzsló

$M(x,y)$: x megbízik y -ban

formulák:

F1: $\exists x \{P(x) \wedge \forall y [D(y) \rightarrow M(x,y)]\}$

F2: $\forall x \{P(x) \rightarrow \forall y [K(y) \rightarrow \neg M(x, y)]\}$

vagy

F2: $\forall x \forall y \{[P(x) \wedge K(y)] \rightarrow \neg M(x, y)\}$

F3: $\forall x [D(x) \rightarrow \neg K(x)]$

PRENEX KONJUNKTÍV NORMÁLFORMÁRA HOZÁS

a) $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ ($\leftrightarrow$ kiküszöbölése)

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$ ($\rightarrow$ kiküszöbölése)

b) $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ ($\neg$ hatáskörének redukálása)

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ $\neg\neg A = A$

$\neg\forall x A(x) = \exists x \neg A(x)$

$\neg\exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$

c) változók **standardizálása**

- változók **átnevezése**, hogy az egyes kvantorok által lekötött változók különbözzenek (nem csak egy rész formulán belül!)

$\forall x (P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$

$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(y))$

SKÓLEM (PRENEX) NORMÁLFORMÁRA HOZÁS

d) egzisztenciális kvantorok kiküszöbölése

$\exists x P(x) \models P(a)$ Skolem konstans

$\forall x \exists y P(x,y)$

$\forall x P(x, g(x))$

$\forall x_1, \dots, x_n \exists y P(y)$ nem jó, mert y függvénye az x -eknek

$\forall x_1, \dots, x_n P(g(x_1, \dots, x_n))$

Skolem függvény

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \dots$ (kvantormentes konjunktív normálforma Skólem konstansokkal, Skólem függvényekkel)

SKÓLEM NORMÁLFORMÁRA HOZÁS

e) **prenex** formára hozás

csak $\forall$ -k maradtak (a változókat átneveztük (standardizáltuk) ezért a $\forall$ kvantor előre hozható (kiemelhető)).

$$\forall x_1 \dots \forall x_n A(x_1, \dots, x_n)$$

KÉSZ A SKÓLEM NORMÁLFORMA!!!

**REZOLVÁLÁSHOZ KÉNYELMESEBB FORMÁLISAN FOLYTATNI,
KLÓZHALMAZT KIALAKÍTANI:**

f) univerzális kvantorok elhagyása

g) klózok kialakítása - csak $\wedge$ és $\vee$ műveletek

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

klózok konjunkciójának létrehozása

h) **konjunkciók** elhagyása $\rightarrow$ klózhalmaz

Példa SNF alakra hozásra:

$$\forall x (P(x) \rightarrow \{ \forall y [P(y) \rightarrow P(f(x,y))] \wedge \sim \forall y [Q(x,y) \rightarrow P(y)] \})$$

$\rightarrow$ KIKÜSZÖBÖLÉSE $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$, $\sim \forall y$ ÁTÍRÁSA:

$$\forall x (\neg P(x) \vee \{ \forall y [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \exists y \neg [\neg Q(x,y) \vee P(y)] \})$$

$$\forall x (\neg P(x) \vee \{ \forall y [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \exists y \neg [\neg Q(x,y) \vee P(y)] \})$$

Skólemizálás – Skólem függvény bevezetése: MINDEN x -hez létezik y , y az x -től függ, ezért $y=g(x)$:

$$\forall x (\neg P(x) \vee \{ \forall y [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg [\neg Q(x, g(x)) \vee P(g(x))] \})$$

$g(x)$: y MINDEN ELŐFORDULÁSÁT ÁT KELL ÍRNI!!

Példa SNF alakra hozásra:

$$\forall x (\neg P(x) \vee \{ \forall y [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg [\neg Q(x,g(x)) \vee P(g(x))] \})$$

► Kvantorkiemelés:

$$\text{► } \forall x (\neg P(x) \vee \{ \forall y [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg [\neg Q(x,g(x)) \vee P(g(x))] \})$$

$$\text{► } \forall x \forall y (\neg P(x) \vee \{ [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg [\neg Q(x,g(x)) \vee P(g(x))] \})$$

► Disztributivitás:

$$\text{► } \forall x \forall y (\neg P(x) \vee \{ [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg [\neg Q(x,g(x)) \vee P(g(x))] \})$$

$$\text{► } \forall x \forall y \{ \neg P(x) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \} \wedge \{ \neg P(x) \vee \neg [\neg Q(x,g(x)) \vee P(g(x))] \}$$

Példa **SNF** és **KLÓZHALMAZ** alakra hozásra:

FOLYTATÁS (utolsó klóz: **negációk** után **disztributivitás** még egyszer):

$$\forall x \forall y \{ \neg P(x) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \} \wedge \{ \neg P(x) \vee \neg [\neg Q(x,g(x)) \vee P(g(x))] \}$$

$$\forall x \forall y \{ \neg P(x) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \} \wedge \{ \neg P(x) \vee [Q(x,g(x)) \wedge \neg P(g(x))] \}$$

$$\forall x \forall y \{ \neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y)) \} \wedge \{ \neg P(x) \vee Q(x,g(x)) \} \wedge \{ \neg P(x) \vee \neg P(g(x)) \}$$

Klóz alakra írva kapjuk a formula **SKÓLEM NORMÁL FORMÁJÁT**:

$$\forall x \forall y \{ \neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y)) \} \wedge \{ \neg P(x) \vee Q(x,g(x)) \} \wedge \{ \neg P(x) \vee \neg P(g(x)) \}$$

Ebből a klózokat a rezolúcióhoz különválasztva, **klózhalmazként** kezeljük:

► c1: $\neg P(x) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x,y))]$

► c2: $\neg P(x) \vee Q(x,g(x))$

► c3: $\neg P(x) \vee \neg P(g(x))$

KLÓZHALMAZ

EREDETI:

- ▶ $c1: \neg P(x) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x,y))]$
- ▶ $c2: \neg P(x) \vee Q(x,g(x))$
- ▶ $c3: \{\neg P(x) \vee \neg P(g(x))\}$

A rezolúcióhoz az azonos nevű individuum változókat átnevezzük:

ÚJ:

- ▶ $c1: \neg P(x1) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x1,y))]$
- ▶ $c2: \neg P(x2) \vee Q(x2,g(x2))$
- ▶ $c3: \{\neg P(x3) \vee \neg P(g(x3))\}$

Ebben az alakban kezdünk rezolválni, alkalmazva az **egységesítést (ld. később).**

Rezolúcióhoz szükséges helyes következtetések

$$\frac{\neg \neg P(x)}{P(x)}$$

$$\frac{P(x) \vee Q(x) , \neg P(A)}{Q(A)}$$

$$\frac{P(x) \vee Q(x) , \neg Q(x) \vee R(x)}{P(x) \vee R(x)}$$

REZOLVÁLÁS ALAPLÉPÉSÉHEZ KELL: EGYESÍTÉS/UNIFIKÁCIÓ

$\forall x \text{ szereti}(\text{Fifi}, x)$
 $\exists y \text{ szereti}(y, \text{alma})$
 $\text{szereti}(\text{Fifi}, \text{alma})$

kötési/helyettesítési lista:

véges σ halmaz, amelyben minden v_i változó, minden t_i term és v_i -k különbözőek

$$\sigma = \{v_1|t_1, \dots, v_n|t_n\}$$

$$\sigma = \{x|\text{alma}, y|\text{Fifi}\}$$

kötés/helyettesítés:

$p|_\sigma$ p formula helyettesítése σ -val

$$S(x, g(x, y))|_{\{x|1, z|345\}} = S(1, g(1, y))$$

p és q egyesíthető σ -val:

$$p|_\sigma = q|_\sigma$$

REZOLVÁLÁS ALAPLÉPÉSÉHEZ KELL: EGYESÍTÉS/UNIFIKÁCIÓ - PÉLDA

$H = \{ P(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f(g(x))}), P(\mathbf{a}, \mathbf{y}, \mathbf{f(y)}) \}$ (balról jobbra haladva összehasonlítjuk a szimbólumokat, az első különbözőséget beírjuk a D halmazba m.s.í.t.)

x, y, u : változók, a : konstans,

f, g : függvény szimbólum, P : predikátum szimbólum

különbségi halmaz: D

1. $D = \{ \mathbf{x}, \mathbf{a} \}$ $\sigma = \{ x|a \}$ (x univerzálisan kvantált, ezért x lehet $=a$)
 $H = \{ P(a, u, f(g(a))), P(a, y, f(y)) \}$
2. $D = \{ \mathbf{u}, \mathbf{y} \}$ $\sigma = \{ x|a, u|y \}$ (u is, y is univ. kvantált, ford. is ok lenne)
 $H = \{ P(a, y, f(g(a))), P(a, y, f(y)) \}$
2. $D = \{ \mathbf{g(a)}, \mathbf{y} \}$ $\sigma = \{ x|a, u|y, y|g(a) \}$ ($g(a)$ konstans, y lehet $g(a)$)
 $H = \{ P(a, g(a), f(g(a))), P(a, g(a), f(g(a))) \}$

TÉTELBIZONYÍTÁS ELSŐRENDŰ REZOLÚCIÓVAL

GI
KA
38

A_1 : Van olyan páciens, aki minden doktorban megbízik.

A_2 : A kuruzslókban egyetlen páciens sem bíz meg.

A_3 : Egyetlen doktor sem kuruzsló.

F_1 : $\exists x \{P(x) \wedge \forall y [D(y) \rightarrow M(x,y)]\}$ – itt bevezetjük az a Skólem konst.: $P(a)$

F_2 : $\forall x \{P(x) \rightarrow \forall y [K(y) \rightarrow \neg M(x, y)]\}$

F_3 : $\forall x [D(x) \rightarrow \neg K(x)]$

F_3 negáltja: $\neg \forall x [D(x) \rightarrow \neg K(x)]$

klóz forma:

K_1 : $P(a)$

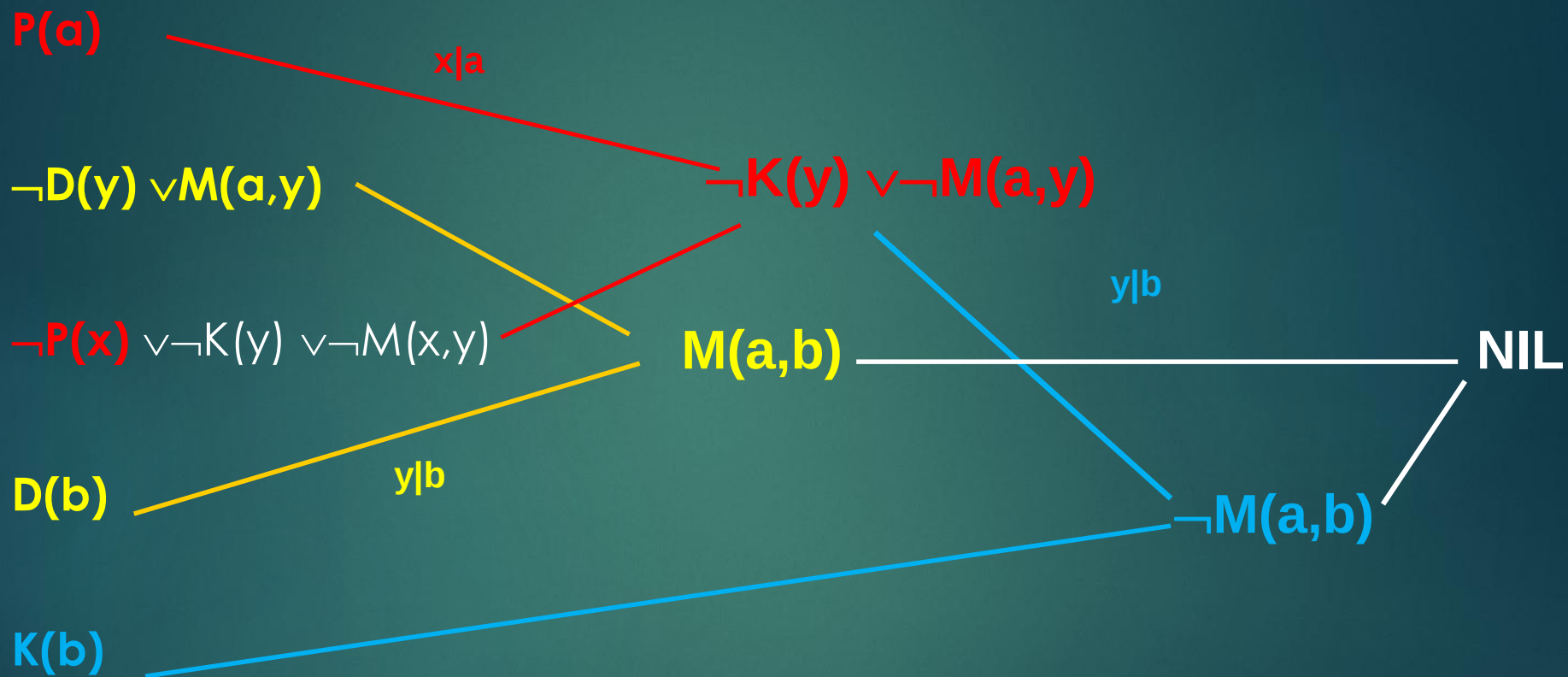
K_2 : $\neg D(y) \vee M(a, y)$ F_1 -ből, a: skolem konstans

K_3 : $\neg P(x) \vee \neg K(y) \vee \neg M(x, y)$
..... F_2 -ből

K_4 : $D(b)$

K_5 : $K(b)$ $\neg F_3$ -ból, b: skolem konstans

TÉTELBIZONYÍTÁS REZOLÚCIÓVAL



REZOLÚCIÓ - PÉLDA

V-t meggyilkolták

gyanúsítottak: X, Y, Z

X: "ártatlan vagyok"	$\text{ártatlan}(X) \rightarrow \text{ártatlan}(X)$	
"Y barátja V-nek"	$\text{ártatlan}(X) \rightarrow \text{barát}(Y, V)$	(1)
"Z gyűlölte V-t"	$\text{ártatlan}(X) \rightarrow \neg \text{szereti}(Z, V)$	(2)

Y: "nem voltam a városban"	$\text{ártatlan}(Y) \rightarrow \neg \text{városban}(Y)$	(3)
"nem ismerem V-t"	$\text{ártatlan}(Y) \rightarrow \neg \text{ismeri}(Y, V)$	(4)

Z: "ártatlan vagyok,,	$\text{ártatlan}(Z) \rightarrow \text{ártatlan}(Z)$	
"X és Y V-vel volt"	$\text{ártatlan}(Z) \rightarrow \text{vele}(X, V)$	(5)
	$\text{ártatlan}(Z) \rightarrow \text{vele}(Y, V)$	(6)

REZOLÚCIÓ – PÉLDA **VÁLASZADÁSRA**

"V-t a városban ölték meg" $\text{vele}(\text{gy}, V) \rightarrow \text{városban}(\text{gy})$ (7)

"barát $\rightarrow$ ismeri" $\text{barát}(i, j) \rightarrow \text{ismeri}(i, j)$ (8)

"szereti $\rightarrow$ ismeri" $\text{szereti}(i, j) \rightarrow \text{ismeri}(i, j)$ (9)

mindenki igazat mond

a gyilkos hazudhat

$\text{ártatlan}(X) \vee \text{ártatlan}(Y)$ (10)

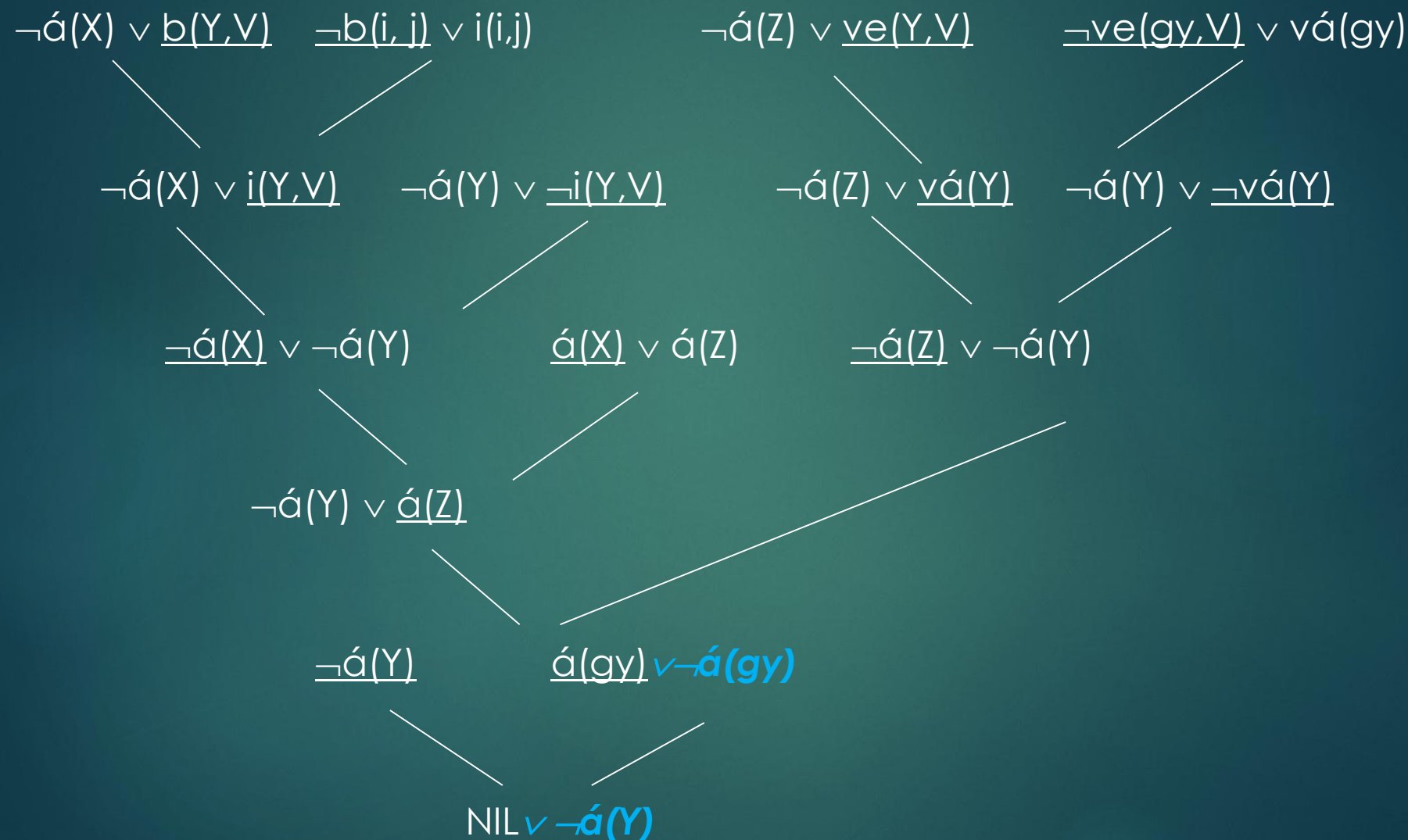
$\text{ártatlan}(X) \vee \text{ártatlan}(Z)$ (11)

$\text{ártatlan}(Y) \vee \text{ártatlan}(Z)$ (12)

Kérdés: $\neg \text{ártatlan}(\text{gy})$

$\text{ártatlan}(\text{gy}) \vee \neg \text{ártatlan}(\text{gy})$ (13)

REZOLÚCIÓ – PÉLDA VÁLASZADÁSRA



Magasabb rendű logikák

- ▶ Az elsőrendű logikában a kvantorok csak a változókra vonatkoztak, a változók az értékei univerzum elemeiből álltak.
- ▶ A magasabb rendű logikákban a kvantálás nemcsak változókra, hanem függvényekre, prédikátumokra is lehetséges.
- ▶ Példa: Két függvény akkor és csak akkor egyenlő, ha minden helyettesítési értékre ugyanaz a függvényérték.

$$\forall f \forall g (f = g) \leftrightarrow (\forall x f(x) = g(x))$$

- ▶ Példa: Ha egy reláció tranzitív, akkor ha x, y és y, z relációban vannak, akkor x és z is:

$$\forall r \text{ tranzitív}(r) \rightarrow (\forall xyz) r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z)$$

(a nyelvi elemeket is kvantálhatjuk)