

Elsőrendű logika gyakorló feladatok

1. Formalizáld az alábbi mondatokat:

- a) Bármely két racionális szám között található irracionális szám.
(U=valós számok)
- b) Minden 2-nél nagyobb páros szám felírható két prímszám összegeként.
(U=valós számok)
- c) Minden lében van két kanál. (U= minden dolgok halmaza)
- d) Van olyan kalap, mi minden zoknihoz illik. (U= minden dolgok halmaza)
- e) Egy, csak egy legény van talpon a vidéken. (U=emberek)
- f) Minden racionális szám estén létezik nála nagyobb irracionális szám.
(Univerzum: R)
- g) Minden egész szám páros vagy páratlan. (U = R)
- h) Minden arany, ami fénylik.
- i) Van olyan cápa, amelyik dorombol.
- j) Vannak repülő és futómadarak.
- k) Minden egész számnál létezik nagyobb egész szám. (U = R)
- l) Malacka mindenkinél kisebb, aki idősebb Zsebi babánál (U = Százholdas pagony)
- m) Szaffinak van egy fekete macskája. (U = élőlények)
- n) Minden kutya teát iszik, ha álmos. (U = élőlények)
- o) Az intelligens delfinek között van, amelyik tud labdát egyensúlyozni az orrán.
(U=élőlények)
- p) A páros számok oszthatók a 2 valamelyik hatványával. (U = R)
- q) Van olyan kutya, amelyik megugatja a postást. (U = élőlények)
- r) Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár. (U = élőlények)

2. Hozd Prenex konjunktív normál formára, majd Skólem normálformára.

- a) $\exists x[\exists y(B(x, y) \wedge P(y)) \rightarrow \forall y\exists z(G(x, y, z))]$
- b) $\exists x K(x) \vee \neg \forall x[((R(x) \wedge T(x)) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \neg \forall y(\neg Q(y) \rightarrow P(x, y))]$
- c) $\forall x(\exists y Q(x, y) \wedge (P(x) \rightarrow R(x, y)) \wedge \neg \forall z(P(z) \rightarrow Q(z, x)))$
- d) $\neg[\forall x\exists y(P(x, y) \vee Q(x, y))] \wedge [\exists x\forall y(S(x, y) \rightarrow T(x, y))]$
- e) $\forall x\exists y A(x, y) \rightarrow \neg \forall x(\neg B(x) \rightarrow C(x))$
- f) $\forall x P(x) \vee \neg \exists x\forall y[Q(x, y) \vee \neg R(c, y)]$
- g) $\forall x(A(x) \rightarrow \neg B(x)) \rightarrow \neg \forall x\exists y C(x, y)$
- h) $\forall x[\forall y(A(y) \rightarrow B(x, y)) \rightarrow \exists y C(y)]$

3. Rezolúció

a) Igazolja rezolúcióval, hogy helyes az alábbi következtetési séma:

$$\forall x((A(x, Ernő) \wedge N(x)) \rightarrow B(x))$$

$$\forall x((T(x) \vee S(x)) \rightarrow \forall y A(x, y))$$

$$\neg T(Lajos) \wedge S(Lajos)$$

$$\forall x(S(x) \rightarrow N(x))$$

$$\Rightarrow B(Lajos)$$

b) Döntse el elsőrendű rezolúcióval, hogy helyes-e az alábbi következtetés!

$$\forall x[A(x) \rightarrow (B(x) \wedge C(x))]$$

$$\forall x[B(x) \rightarrow (D(x) \wedge E(x))]$$

$$\forall x[E(x) \rightarrow (F(x) \vee \neg C(x))]$$

$$A(Kati)$$

$$F(Kati)$$

c)

$$\forall x[(T(x) \vee F(x)) \rightarrow R(x)]$$
$$\forall x[C(x) \rightarrow (\neg O(x) \wedge F(x))]$$
$$C(Gábor)$$

Fogalmazza meg a mondatok jelentését, ha az univerzum a góték halmaza, és adottak a következők:

$$T(x) = \text{Tüskés}$$

$$F(x) = \text{Tud füttyülni} \quad R(x) = \text{Szereti a répatortát}$$

$$C(x) = \text{Csíkos}$$

$$O(x) = \text{Okos}$$

Rezolúció segítségével bizonyítsa be, hogy Gábor a gőte szereti a répatortát!

d)

$$\forall x[Z(x) \rightarrow (\neg L(x) \wedge P(x))]$$

$$\forall x[(P(x) \vee T(x)) \rightarrow M(x)]$$

$$Z(Dumbó)$$

Fogalmazza meg a mondatok jelentését, ha az univerzum az elefántok halmaza, és adottak a következők:

$$Z(x) = \text{Zöld}$$

$$L(x) = \text{Lila fülű}$$

$$P(x) = \text{Pöttyös fülű}$$

$$T(x) = \text{Látott már zebrát}$$

$$M(x) = \text{Szereti Mozartot}$$

Rezolúció segítségével bizonyítsa be, hogy Dumbó a kiselefánt szereti Mozartot!

- e) Formalizálja az alábbi mondatokat! Az alábbi jelöléseket használja:
 $P(x)$: x puli, $K(x)$: x kutya, $U(x)$: x ugat, $H(x)$: x harap.

Bogáncs puli.

A pulik kutyák.

Amelyik kutya ugat, az nem harap.

Bogáncs mindig ugat.

Bizonyítsa rezolúcióval, hogy van olyan puli, amelyik nem harap!

- f) Rezolúció segítségével igazolja, hogy az első három állítás logikai következménye a negyedik!

$$1. \forall x[\neg A(x) \rightarrow (B(x) \wedge C(x))]$$

$$2. \forall x[(B(x) \wedge C(x)) \rightarrow \neg D(x)]$$

$$3. D(Marci)$$

$$4. A(Marci)$$

- g) Az univerzum legyen a komplex számok halmaza, kivéve a 0 ($0+0i$) számot.
A prédikátumok és függvények a következők:

$V(x)$ – x tisztán valós szám

$P(x)$ – x pozitív szám

$N(x)$ – x negatív szám

$f(x) = x^2$

Fogalmazza meg szöveggel az alábbi formulák jelentését!

$$(1) \quad \forall x(V(x) \rightarrow (P(x) \vee N(x)))$$

$$(2) \quad \forall x(N(x) \rightarrow P(f(x))) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow P(f(x)))$$

$$(3) \quad \neg P(f(i))$$

Bizonyítsa be rezolúcióval, hogy a fenti (1),(2) és (3) állítások logikai következménye, hogy az i nem valós szám!

Megoldások:

$$1. a) \quad \forall x \forall y [(R(x) \wedge R(y) \wedge N(y, x)) \rightarrow \exists z (I(z) \wedge N(z, x) \wedge N(y, z))]$$

$R(x)$: racionális,

$I(y)$: irracionális

$N(x, y)$: x nagyobb y

$$f) \quad \forall x (R(x) \rightarrow \exists y (I(y) \wedge N(y, x)))$$

$R(x)$: racionális,

$I(y)$: irracionális

$N(x, y)$: x nagyobb y

$$g) \quad \forall x (Z(x) \rightarrow (P(x) \vee T(x)))$$

$Z()$: egész; $P()$: páros; $T()$: páratlan

- h) $\forall x(F(x) \rightarrow A(x))$
i) $\exists x(C(x) \wedge D(x))$
j) $\exists x(M(x) \wedge R(x)) \wedge \exists y(M(y) \wedge F(y))$
k) $\forall x(E(x) \rightarrow \exists y(E(y) \wedge N(y, x)))$

2.

- a) $\exists x[\neg \exists y(B(x, y) \wedge P(y)) \vee \forall y \exists z(G(x, y, z))]$
 $\exists x[\forall y \neg(B(x, y) \wedge P(y)) \vee \forall y \exists z(G(x, y, z))]$
 $\exists x[\forall y(\neg B(x, y) \vee \neg P(y)) \vee \forall y \exists z(G(x, y, z))]$
 $\forall y$ nem emelhető ki ezért új ismeretlenek kellenek:
 $\exists x[\forall y_1(\neg B(x, y_1) \vee \neg P(y_1)) \vee \forall y_2 \exists z(G(x, y_2, z))]$
 $\exists x \forall y_1 \forall y_2 \exists z[(\neg B(x, y_1) \vee \neg P(y_1)) \vee (G(x, y_2, z))]$
 $\exists x \forall y_1 \forall y_2 \exists z[\neg B(x, y_1) \vee \neg P(y_1) \vee G(x, y_2, z)]$ Prenex KNF
Skólemizálás: $x \leftarrow c; z \leftarrow f(y_1, y_2)$
 $\forall y_1 \forall y_2[(\neg B(c, y_1) \vee \neg P(y_1)) \vee (G(c, y_2, f(y_1, y_2)))]$
- b) $\exists x K(x) \vee \neg \forall x[\neg(\neg(R(x) \wedge T(x)) \vee Q(x)) \vee \neg \forall y(Q(y) \vee P(x, y))]$
 $\exists x K(x) \vee \exists x \neg[((R(x) \wedge T(x)) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists y \neg(Q(y) \vee P(x, y))]$
 $\exists x K(x) \vee \exists x[\neg(R(x) \wedge T(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \neg \exists y \neg(Q(y) \vee P(x, y))]$
 $\exists x K(x) \vee \exists x[(\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y(Q(y) \vee P(x, y))]$
 $\exists x$ kiemelhető itt, ezért nem kell új ismeretlen:
 $\exists x \forall y[K(x) \vee ((\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge (Q(y) \vee P(x, y)))]$
Ez Prenex, de nem KNF, ezért disztributív szabályt használunk:
 $\exists x \forall y[(K(x) \vee \neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge (K(x) \vee Q(y) \vee P(x, y))]$ Prenex KNF
Skólemizálás: $x \leftarrow c$
 $\forall y[(K(c) \vee \neg R(c) \vee \neg T(c) \vee Q(c)) \wedge (K(c) \vee Q(y) \vee P(c, y))]$
- c) $\forall x(\exists y Q(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y))) \wedge \neg \forall z(\neg P(z) \vee Q(z, x))$
 $\forall x(\exists y Q(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y))) \wedge \exists z \neg(\neg P(z) \vee Q(z, x))$
 $\forall x(\exists y Q(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y))) \wedge \exists z(P(z) \wedge \neg Q(z, x))$
 $\forall x \exists y \exists z(Q(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y)) \wedge (P(z) \wedge \neg Q(z, x)))$
 $\forall x \exists y \exists z(Q(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y)) \wedge P(z) \wedge \neg Q(z, x))$ Prenex KNF
Skólemizálás: $y \leftarrow f(x); z \leftarrow g(x)$
 $\forall x(Q(x, f(x)) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, f(x))) \wedge P(g(x)) \wedge \neg Q(g(x), x))$