

Logika

Gyakorló feladatok

Nulladrendű logikával kapcsolatos feladatot nem írtam, mert ezt úgyis tudni kell ahhoz, hogy valaki az elsőrendűt megértse. Aki pedig az elsőrendű logikai feladatokat meg tudja oldani, annak nem lehet gondja a nulladrendűvel sem.

1. Oldjuk meg rezolúcióval az alábbi feladatokat!

- a)
 - 1. Minden 2-nél nagyobb prímszám páratlan.
 - 2. Páratlan szám négyzete páratlan.
 - 3. A 7 prímszám.
 - 4. A 7 nagyobb, mint 2.

Ez alapján döntsük el, hogy a 7^2 páratlan szám-e.

- b)
 - 1. Sára Ferivel együtt tanul.
 - 2. Feri Debrecenben lakik.
 - 3. Ha valaki együtt tanul valaki mással egy adott helyen, akkor ő is az adott helyen van.
 - 4. Ha valaki egy adott helyen van, akkor elérhető az adott hely telefonján keresztül.

Ez alapján döntsük el, hogy elérhető-e Sára valamilyen telefonszámon.

2. Mutassuk meg, hogy a következő következtetési szabályok helyesek.

- a) $\exists x \forall y R(x, y) \models \forall y \exists x R(x, y)$
- b) $\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \forall x [Q(x) \rightarrow \neg R(x)]\} \models \forall x [P(x) \rightarrow \neg R(x)]$

3. Hozzuk Skólem normálalakra a következő formulát:

$$\forall x \{P(x) \rightarrow [\forall y (P(y) \rightarrow P(f(x, y))) \wedge \neg \forall y (Q(x, y) \rightarrow P(y))]\}$$

4. Formalizáljuk az alábbi mondatokat:

- a) Van olyan páciens, aki minden doktorban bízik.
- b) A kuruzslóban egyetlen beteg sem bízik meg.
- c) Egyetlen doktor sem kuruzsló.

5. Formalizáljuk az alábbi mondatokat, és döntsük el a kérdést rezolúcióval!

- 1. Mindenki, aki átment a DM vizsgán, és nyert a alattón, boldog.

2. Mindenki, aki tanult vagy szerencsés, átmegy az összes vizsgán.
3. Lus Tamara nem tanult, de szerencsés.
4. Mindenki, aki szerencsés, nyert a lottón.

Boldog-e Lus Tamara?

6. Adjunk olyan interpretációkat a következő formulára, amelyben igaz illetve hamis a mondat értéke:

$$\forall x \exists y \forall z [K(a, z, y) \rightarrow K(f(a), f(z), x)]$$

7. Ha az a feladat, hogy két formula ekvivalenciáját lássuk be, akkor általában az az eljárás, hogy az egyikre rezolúcióval következtetünk a másiktól, majd fordítva. Ha azonban annyira egyszerű a két formula, hogy józan ésszel belátható az ekvivalenciájuk, akkor a kétirányú következtetést elég úgy véghezvinni, hogy kimutatjuk, hogy ha az egyik formula igaz, akkor a másik is, és megfordítva. Pl. lássuk be a következő formulákról, hogy ekvivalensek:

$$\text{a) } \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \equiv \forall x \forall y [P(x) \vee Q(y)]$$

$$\text{b) } \exists x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \exists x \exists y [P(x) \wedge Q(y)]$$

$$\text{c) } \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \equiv \exists x [P(x) \rightarrow Q(x)]$$

Megoldások

1. a) Az univerzum legyen a természetes számok halmaza. A formalizált mondatok a következők (a predikátumok és függvények jelentésének megfejtését rátok bízom):

1. $\forall x [N(x, 2) \wedge P(x) \rightarrow PT(x)]$, 2. $\forall y [PT(y) \rightarrow PT(f(x))]$, 3. $P(7)$, 4. $N(7, 2)$, 5. konklúzió megfogalmazása: $PT(f(7))$.

Skólemizáció itt nem is kell, nincs egzisztenciális kvantor. Az egységesítő behelyettesítés lépései:

$$x, y \leftarrow 7.$$

A végén megkapjuk, hogy a 7^2 páratlan szám.

1. b) Az univerzum legyen az emberek, helyek és telefonszámok halmaza. A formalizált mondatok a következők:

1. $ET(\text{Sára}, \text{Feri})$, 2. $H(\text{Feri}, \text{Debrecen})$, 3. $\forall x \forall y \forall z \{ [ET(x, y) \wedge H(y, z)] \rightarrow H(x, z) \}$, 4. $\forall u \forall v [H(u, v) \rightarrow EL(u, tel(v))]$, 5. A konklúzió megfogalmazása: $\exists w EL(\text{Sára}, w)$.

A rezolúció ezen formalizált mondatok és a konklúzió tagadásának „összeélesésével” indul, miután SNF alakra hoztuk. Az egzisztenciális faktor kiküszöbölése jelen esetben nem probléma, mivel a negáció során amúgy is univerzális kvantorrá változik. Az egységesítő behelyettesítés lépései:

$$x \leftarrow \text{Sára}, y \leftarrow \text{Feri}, z \leftarrow \text{Debrecen}, u \leftarrow \text{Sára}, v \leftarrow \text{Debrecen}, w \leftarrow tel(v)$$

A végén persze kijön, hogy Sára elérhető egy megfelelő telefonszámon. (Nyilván a debrecenién.)

2. a) Közvetlenül, szóban is megindokolható, hiszen ha létezik olyan x , amely mellett minden y -ra igaz $R(x, y)$, akkor legyen pl, ez $x=a$, azaz ekkor tetszőleges y -ra igaz, hogy $R(a, y)$. De

ekkor az is teljesül, hogy minden y -ra létezik megfelelő x , hiszen épp az imént láttuk, hogy az $x=a$ választás bármely y -ra jó, tehát a következtetés igaz.

Ez a bizonyítás egyébként azon alapul, hogy átláthatóan $\alpha \models \beta$ pontosan akkor, ha $\alpha \rightarrow \beta$ tautológia. Mivel az implikáció igazságtáblájában csak ott van „H”, amikor igazból hamisra következtetünk, ezért most egyszerűen csak azt kell belátni, hogy ez nem fordulhat elő, vagyis ha $\exists x \forall y R(x, y)$ igaz, akkor $\forall y \exists x R(x, y)$ is az. Ezt tettük meg az előbb szóban.

2. b) Ezt egyszerűbb rezolúcióval megoldani. Ha kijön az eredmény, akkor a következtetési séma helyes ugyanúgy, mint nulladrendben.

3. A második $\forall y$ előtti negációt a univerzális kvantoron átemelve egzisztenciális kvantor jön be, amely csak a formula legelején található $\forall x$ -től függ, ezért a legutolsó részformulában a skólemizáció során a $P(y)$ -ban y helyére egy $g(x)$ -et helyettesítünk. A másik univerzális kvantor kivihető a formula elejére, s a disztributivitási szabály többszöri alkalmazásával adódik, hogy a formula SNF alakja:

$$\forall x \forall y \{ [\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x, y))] \wedge [\neg P(x) \vee Q(x, g(x))] \wedge [\neg P(x) \vee \neg P(g(x))] \}$$

4. $P(x)$: x egy páciens, $D(y)$: y egy doktor, $K(y)$: y egy kuruzsló, $M(x, y)$: x megbízik y -ban. Ezek fölhasználásával a mondatok:

- a) $\exists x \{ P(x) \wedge \forall y [D(y) \rightarrow M(x, y)] \}$
- b) $\forall x \{ P(x) \rightarrow \forall y [K(y) \rightarrow \neg M(x, y)] \}$
- c) $\forall x [D(x) \rightarrow \neg K(x)]$

5. A mondatok formálisan:

- 1. $\forall x \{ [ATMEGY(x, dm) \wedge NY(x)] \rightarrow B(x) \}$
- 2. $\forall x \{ T(x) \vee SZ(x) \rightarrow \forall y ATMEGY(x, y) \}$
- 3. $\neg T(LusTamara) \wedge SZ(LusTamara)$
- 4. $\forall x [SZ(x) \rightarrow NY(x)]$
- 5. A konklúzió megfogalmazása: $B(LusTamara)$, de ezt tagadva kell hozzáésselni a premisz-szákhoz!

Elsőrendű rezolúcióval kijön, hogy Lus Tamara boldog.

6. IGAZ: Legyen az univerzum a pozitív valós számok halmaza, $K(a, z, y)$ predikátum jelentse azt, hogy $|a - z| < y$, az f függvény pedig legyen a pozitív valós számokon értelmezett, a -ban folytonos, valós értékű függvény. Ekkor a mondat éppen az a pontbeli folytonosságot definiálja.

HAMIS: Minden ugyanaz, kivéve, hogy f ne legyen folytonos a -ban.

(Általában, ha már találtunk egy olyan interpretációt, amelyben egy formula igaz, akkor elég könnyű egy minimális változtatással hamissá tenni.)

7. Pl. az a) esetben ha a bal oldal igaz, akkor ez azt jelenti, hogy a $P(x)$ és $Q(x)$ kijelentések közül legalább az egyiknek minden x értékek mellett igaznak kell lennie. Ebből következik, hogy a $P(x) \vee Q(y)$ kijelentés is igaz, ha x és y tetszőleges lehet. Ez pedig pont a jobb oldali formulát jelenti. A gondolat menet a fordított irányban és a többi feladatban hasonló ehhez.