

Elsőrendű logika konzi #1

Különbség a kétfajta logika közt:

nulladrendű: állításokat kezel (pl süt a nap)

→ elsőrendű: részletesebb, pontosabb leírása a valóságnak

Fogalmak:

- **univerzum:** legbővebb halmaz, amiben vizsgálódunk, aminek az elemeire az állítások igazak.
 - Az univerzumot úgy kell megválasztani, hogy ne kelljen új relációkat bevezetni, de ne is tűnjenek el állítások. Pl: A fiatalok szeretik a sört. Ha itt az univerzumnak az egyetemistákat választok, akkor a mondat ezen része „eltűnik” a formalizált kifejezésből. De az is hiba, ha túl bő az univerzum, mert pl, ha az élőlényeket veszem univerzumnak, akkor azt is bele kéne vennem, hogy emberekről van szó (mert mondjuk a kiskutya is lehet fiatal, mégse szeretni a sört).
- **objektumok:** változók, konstansok >> ezek az univerzum elemei
- **relációk:** egy vagy több objektum és a $\{I, H\}$ halmaz közt való leképezések
 - Egyváltozós: $R:U \rightarrow \{I, H\}$
 - Kétváltozós: $R:U \times U \rightarrow \{I, H\}$ stb.
 - Pl: $B(x,y)$ jelentése: x barátja-e y . DE $B(x)$ jelentheti ezt is: x barátja-e Józsinak. A relációk lényegében eldöntendő kérdések, melyek a paramétereikre vonatkoznak.
- **függvények:** Egy vagy több objektum és egy másik objektum közti leképezés
 - Egyváltozós: $f:U \rightarrow U$
 - Kétváltozós: $f:U \times U \rightarrow U$ stb.
 - Pl: $A(x)$: ennek a kifejezésnek az értéke egy olyan U -beli elem lesz, melyre igaz, hogy x apja.
- **kvantorok:**
 - Univezális: $\forall$ (minden...)
 - Egzisztenciális: $\exists$ (létezik/keressük/van olyan...)
 - Nyílt/zárt mondat: ha kötött minden változó, akkor zárt egy mondat, egyébként nyitott

Példák:

- 1) Minden ember halandó és szokott tévedni.
 - **Univerzum választásának fontossága** (1.eset: univerzum=élőlények, 2.eset: univerzum=emberek $\rightarrow$ Bár elvileg a második is helyes, az első megoldás a szerencsés).
 - univerzum: élőlények
 - Jelölések: $E(x)$: x ember-e, $H(x)$: x halandó-e, $T(x)$: x szokott-e tévedni
 - Megoldás: $\forall x(E(x) \rightarrow (H(x) \wedge T(x)))$
- 2) Mindenki, aki átment a DM vizsgán és nyert a lottón az boldog.
 - Az **univerzális kvantoros** kifejezésekben szinte mindig **implikáció** szerepel.
 - univerzum: emberek
 - Jelölések: $\hat{A}(x)$: x átment-e a DM vizsgán, $Ny(x)$: x nyert-e a lottón, $B(x)$: x boldog-e
 - Megoldás: $\forall x((\hat{A}(x) \wedge Ny(x)) \rightarrow B(x))$
- 3) Van olyan gomba, amelyik mérgező.
 - **FONTOS!** Az **egzisztenciális kvantoros** mondatokban szinte mindig **konjugáció** szerepel, implikáció szinte soha.
 - univerzum: élőlények
 - Jelölések: $G(x)$: x gomba-e, $M(x)$: x mérgező-e
 - megoldás: $\exists x (G(x) \wedge M(x))$
- 4) Létezik olyan állat amelyik nem halandó.
 - A nulladrendű logikához hasonlóan itt is igaz, hogy az **állítások/relációk pozitívak legyenek**, ne tagadások (pl: **nem** halandó)!
 - univerzum: élőlények
 - Jelölések: $\hat{A}(x)$: x állat-e, $H(x)$: x halandó-e
 - Megoldás: $\exists x (\hat{A}(x) \wedge \neg H(x))$
- 5) **Ekvivalens formulák:** Ez a skólemizálás lényege. Van egy bonyolult mondatunk, és szeretnénk átalakítani egy olyan formába, amilyenre szükségünk van (pl rezolúciónál)
 - Nincs olyan ló, amelyik nem négylábú. $\equiv$ Minden ló négylábú.
 - a) Nincs olyan ló, amelyik nem négylábú.
 - univerzum: állatok (érezzük, hogy az, hogy a lábak számáról van szó, az evidenssé teszi, hogy állatokról fog szólni az állítás, de az se hiba, ha az univerzumnak az élőlények halmazát választjuk, sőt az a biztos).
 - Jelölések: $L(x)$: x ló-e, $N(x)$: x négylábú-e
 - Megoldás: $\exists x (\neg L(x) \wedge \neg N(x))$
 - b) Minden ló négylábú.
 - Megoldás: $\forall x (L(x) \rightarrow N(x))$
- 6) Ki korán kel, aranyat lel.
 - Lehet ám **trükkösen** is **megfogalmazni** a mondatokat, nem mindig fog az szerepelni, hogy „mindig”, vagy hogy „létezik”...
 - univerzum: emberek
 - Jelölések: $K(x)$: x korán kel-e, $A(x)$: x lel-e aranyat
 - Megoldás: $\forall x (K(x) \rightarrow A(x))$

- 7) Ezek egyazon példa variációi, az **egzisztenciális-univerzális kvantorok közti különbséget** és az **implikáció elemeinek sorrendjét** szemlélteti.
- a) Az univerzum végig az emberek halmaza lesz.
- b) Jelölések: $F(x)$: x fiatal-e, $B(x,y)$: x és y barátkozik-e vagy $B(x)$: x barátkozik-e Ödönnel (és itt feltehetjük, hogy a barátkozás egy kölcsönös dolog, tehát szimmetrikus a relációnk).
- Ödön fiatal.
 - Bevezetünk egy konstanst: „ $\ddot{o}$ ”. Ez mindig az univerzum egy adott elemét fogja jelenteni, esetünkben Ödönt.
 - Megoldás: $F(\ddot{o})$
 - Ödön barátkozik fiatalokkal
 - A "barátkozik" relációt felvehetjük egy- és kétváltozós-ként is, érdemes végiggondolni, mi a különbség a kettő közt.
 - Megoldás: $\exists x (F(x) \rightarrow B(\ddot{o},x))$ vagy $\exists x (F(x) \rightarrow B(x))$
 - Ödön csak fiatalokkal barátkozik
 - Vedd észre: Előzőhöz képest az implikáció elemeinek sorrendje fordított.
 - Megoldás: $\forall x (B(\ddot{o},x) \rightarrow F(x))$
 - Az idősebbek nem barátkoznak Ödönnel.
 - Megoldás: $\forall x (\text{nem } F(x) \rightarrow \text{nem } B(x,\ddot{o}))$
 - Ödön mindenkivel barátkozik, aki fiatal.
 - Vedd észre: b) mondathoz képest csak annyi a különbség, itt univerzális kvantor szerepel.
 - Megoldás: $\forall x (F(x) \rightarrow B(\ddot{o},x))$
 - Aki fiatal nem barátkozik Ödönnel, aki pedig idős, azzal Ödön nem barátkozik.
 - Megoldás: $\forall x (F(x) \rightarrow \text{nem } B(x,\ddot{o})) \wedge \forall y (B(y,\ddot{o}) \rightarrow \text{nem } F(y))$
 - Megjegyzés: A mondat második felében nyugodtan lecserélhetnénk y -t x -re (a skólemizálásnál le is cseréljük), mivel a kvantorok érvényességi köre miatt amúgy is két különböző változóról van szó.
- 8) Minden kikapcsolt állapotú fénysorompó esetén minden autós ha észreveszi a fénysorompót, akkor körülnéz és a következő időpillanatban vagy áthalad, vagy megáll.
- **Összetett példa** két kvantorral. Ilyenekre lehet számítani ZH-ban is.
 - Jelölések: $F(x)$: x fénysorompó-e, $K(x)$: x ki van-e kapcsolva $A(x)$: x autós-e, $N(x)$: x körülnéz-e, $H(x)$: x áthalad-e, $M(x)$: x megáll-e, $\acute{E}(x,y)$: x észreveszi-e y -t
 - Megoldás: $\forall x \{(F(x) \wedge K(x)) \rightarrow \forall y [(A(y) \wedge \acute{E}(y,x)) \rightarrow (N(y) \wedge (H(y) \vee M(y)))]\}$

Függvények bevezetése:

- 9) A Józsi mellett álló férfi Józsi apja.
- Itt az $A(x)$ egy reláció lesz, jelentése: x apja-e Józsinak
 - Jelölések: $A(x)$: x apja-e Józsinak, $F(x)$: x férfi-e, $M(x)$: x Józsi mellett áll-e
 - Megoldás: $\forall x ((F(x) \wedge M(x)) \rightarrow A(x))$
- 10) Ha Józsi eljön a nyílt napra, találkozunk az apjával is.
- Itt viszont az $a(x)$ egy függvény lesz, és az " $a(x)$ " kifejezés értéke nem egy logikai érték lesz, hanem az univerzum egy másik eleme, pontosan x apja. Itt érdemes megint bevezetni egy konstanst Józsi-ra.
 - Jelölések: j : Józsi, $E(x)$: x eljön-e a nyílt napra, $T(x)$: találkozunk-e x -szel, $a(x)$: x apja
 - Megoldás: $E(j) \rightarrow T(a(j))$
 - Megjegyzés: Ebben a mondatban nincs változó, csak konstans, emiatt kvantorra sem volt szükség.