

ELSŐRENDŰ LOGIKA:

Elméleti összefoglalás:

- Feltétel 1 Minden madár gerinces.
- Feltétel 2 Minden veréb madár.
- Következmény Minden veréb gerinces.
- **Szintaxis:**
 - Jelkészlet: változók ($x, y, z, \dots$), konstansok ($a, b, c, \dots$), predikátumok (=állítások, $P, Q, R, S, \dots$), függvény ($f, g, \dots$), logikai műveletek ($\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$), kvantorok ($\exists, \forall$), zárójelek
 - Univerzum: nem üres halmaz, a változók ennek elemein futnak végig
 - Predikátum: univerzum elemei közötti kapcsolatot fejezi ki,
pl: minden embernek létezik édesanyja: $\forall x \exists y P(x, y)$,
interpretáció: univerzum = {emberek}, $P(x, y)$ = x y-nak édesanyja
 - Kvantorok hatásköre: pl: $\exists x P(x, y) \vee Q(x)$, x P-ben kötött és Q-ban szabad
 - Zárt formula=mondat: amikor minden változó kötött(=kvantált)
 - Nyelv és típusa: $L(P_1, P_2, \dots, P_k; f_1, f_2, \dots, f_i)$ argumentumok számát adja meg,
pl: $L(P_1, P_2; -)$, típusa: $(2, 0; -)$, $P_1(x, y)$, $P_2()$
 - Term=kifejezés: $P(_, _)$ predikátumok argumentumaiban szerepel,
pl: $P(f(x, y), z)$
 - Formula:
 - atomi: $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 - minden atom formula
 - ha α és β formula, akkor $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ is formula
 - ha α és β formula, akkor $\forall x \alpha(x)$, $\exists x \alpha(x)$ is formula
 - Példa: csoportaxiómák: $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$; $f(e, a) = a$; $f(b, i(b)) = e$
- **Szemantika:** értéket adunk a változóknak
 - Kiértékelés: az univerzum minden elemét behelyettesítem változókba,
pl: $P(x, y)$, x-t és y-t konstansokkal helyettesítjük, értéke: I v H
 - Tautológia: ha minden interpretációban minden értékadásra igaz

- Kontradikció: ha minden interpretációban minden értékadásra hamis (nincs olyan, amire igaz)

- Egy változó kvantálása:
 - $\forall x \alpha(x)$: minden, bármely, tetszőleges x -re $\alpha(x)$
 - $\forall x \alpha(x)$ igaz: x értékét végigfuttatva az univerzum elemein mindig rendelkezik α formulában megadott tulajdonsággal
 - $\forall x \alpha(x)$ hamis: x értékét végigfuttatva az univerzum elemein legalább egy értéket találunk, ami nem rendelkezik α formulában megadott tulajdonsággal
 - $\exists x \alpha(x)$: létezik, van olyan, található x -re $\alpha(x)$
 - $\exists x \alpha(x)$ igaz: x értékét végigfuttatva az univerzum elemein, találunk legalább egy olyan értéket, ami rendelkezik α formulában megadott tulajdonsággal
 - $\exists x \alpha(x)$ hamis: x értékét végigfuttatva az univerzum elemein, nem találunk egyetlen olyan értéket sem, ami rendelkezik α formulában megadott tulajdonsággal

- Két változó kvantálása:
 - $\forall x \forall y A(x,y)$ igaz: x -et rögzítve y -t végigfuttatjuk az univerzum elemein, majd x -et megváltoztatjuk és megint végigfuttatjuk y -t, ezt minden lehetséges x értékre meg tesszük és mindegyikre igazat kapunk
 - $\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$ hamis: van olyan x,y pár, amire nem igaz
 - $\forall x \exists y A(x,y)$ igaz: minden x -hez található olyan y , ami x -től függ (azaz más x -hez más y tartozhat), pl: $x+y=0$
 - $\forall x \exists y A(x,y)$ hamis: van olyan y , amelyhez nem tartozik x , ami tőle függ, pl: $x*y=1$ ($x=0$ -hoz nincs y)
 - $\exists x \forall y A(x,y)$ igaz: egy adott x érték jó az összes y -hoz, tehát ez az x nem függ y -től (lehet több x is, de az mindegy, mert már találtunk egyet), pl: $y+x=y$ ($x=0$ minden y -ra jó)
 - $\exists x \forall y A(x,y)$ hamis: van olyan y , amelyre az x érték hamis

- **Ekvivalens formulák:** igazságértékük minden interpretációban azonos

$$\begin{array}{ll}
\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) & \exists x \exists y (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \\
\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) & \exists x (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \\
\neg \exists x \neg P(x) \equiv \forall x P(x) & \forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x (A(x) \wedge \forall x B(x)) \\
\neg \forall x \neg P(x) \equiv \exists x P(x) & \forall x \forall y (A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall y B(y)
\end{array}$$

- **Prenex Normál Forma (=PNF):**

- Logikai jelek átírása $\wedge, \vee, \neg$ -ra
- De Morgan azonosságok alkalmazása, amíg $\neg$ hatásköre atomi nem lesz
- Kvantor-kiemelési szabályok alkalmazása, amíg kvantormentes nem lesz
- ha PNF: KNF-ben van, akkor Prenex Konjunktív Formula
ha PNF: DNF-ben van, akkor Prenex Diszjunktív Formula
ha PNF: csak univerzális kvantorok szerepelnek, akkor **Skólem Normál Forma (=SNF)**, pl: $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k (K_1 \wedge K_2 \wedge \dots \wedge K_n)$

- **Skólemizálás:** egzisztenciális kvantorok kiküszöbölése

- $\forall x \exists y A(x, y) \equiv \forall x A(x, f(x))$ – y függ x -től, ezért lesz x -nek függvénye
- $\forall x \forall y \exists z A(x, y, z) \equiv \forall x \forall y A(x, y, f(x, y))$ – x és y együtt határozzák meg z értékét (annyi változós fv, ahány univerzális kvantor szerepel az egzisztenciális előtt!)
- $\exists y \forall x R(x, y) \equiv \forall x R(x, c)$ – általánosan használható y érték, ami minden x -hez jó

- **Következmény:** $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \leq \beta$ – β legalább ott igaz, ahol α -k

- $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \rightarrow \beta$ érvényes, azaz minden interpretációban igaz (tudjuk: $\alpha \rightarrow \beta = \neg \alpha \vee \beta$)
- $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \wedge \neg \beta$ kontradikció vagy kielégíthetetlen, azaz minden interpretációban hamis (tudjuk: $\neg(\alpha \rightarrow \beta) = \neg(\neg \alpha \vee \beta) = \alpha \wedge \neg \beta$)

- **Rezolúció:**

- tfh SNF, mivel a változók univerzálisan kvantáltak, ezért a formula minden helyettesítésre igaz $\rightarrow$ alkalmazhatjuk az **egységesítő helyettesítést**
- alapelvei:
 - változóba konstanst vagy változót helyettesítünk
 - változóba függvényt is helyettesíthetünk

Feladatok:

1. Formalizáljuk!

Feltétel 1	Minden madár gerinces.	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
Feltétel 2	A veréb madár.	$P(v)$
Következmény	A veréb gerinces.	$Q(v)$

Jelölés: $P(x)$... madár, $Q(x)$... gerinces, v ... veréb

Nyelv: $L(P, Q; -)$, típusa: $(1, 1; -)$, $U = \{\text{madarak}\}$

2. Példa egységesítő helyettesítésre: $P(a, x, h(g(z)))$ és $\neg P(z, h(y), h(y))$

(tudjuk: a ... konstans, x, z ... változó, g, h ... függvények)

a) helyettesítés: $z=a, x=h(y), y=g(a)$

b) rezolúció: $P(a, h(g(a)), h(g(a))) \quad \square \square$

$\neg P(a, h(g(a)), h(g(a))) \quad \square$

3. Alakítsd PNF-re az alábbi mondatot: „Nem mind arany, ami fénylik.”

a) formalizálás: $A(x)$... arany, $F(x)$... fénylik, $L(A, F; -)$, típusa: $(1, 1; -)$

$\neg \forall x (F(x) \rightarrow A(x))$

b) PNF-re alakítás: $\exists x \neg (F(x) \rightarrow A(x))$

$\exists x \neg (\neg F(x) \vee A(x))$

$\exists x (F(x) \wedge \neg A(x))$

4. Alakítsd normál formára!

$\neg (\forall x \exists y P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge (\exists x \forall y S(x, y) \rightarrow T(x, y))$

a : $\neg (\forall x \exists y P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge (\exists x \forall y \neg S(x, y) \vee T(x, y))$ – Logikai jelek átírása

b : $(\exists x \forall y \neg (P(x, y) \vee Q(x, y))) \wedge (\exists x \forall y \neg S(x, y) \vee T(x, y))$ – De Morgan

c : $(\exists x \forall y \neg P(x, y) \wedge \neg Q(x, y)) \wedge (\exists x \forall y \neg S(x, y) \vee T(x, y))$

d : $(\exists x \forall y \neg P(x, y) \wedge \neg Q(x, y)) \wedge (\exists v \forall w \neg S(v, w) \vee T(v, w))$ – Kvantor-kiemelési

e : $\exists x \forall y \exists v \forall w \neg P(x, y) \wedge \neg Q(x, y) \wedge (\neg S(v, w) \vee T(v, w))$ szabályok alkalmazása

f : $\forall y \forall w \neg P(a, y) \wedge \neg Q(a, y) \wedge (\neg S(b, w) \vee T(b, w))$ – Skólemizálás

g : $\neg P(a, y) \wedge \neg Q(a, y) \wedge (\neg S(b, w) \vee T(b, w))$

$(\exists y \forall x R(x, y) \equiv \forall x R(x, c))$

5. Egységesítsd!

$P(f(g(x,a)),x)$ és $P(z,b)$

a) helyettesítés: $z = f(g(x,a))$, $x = b$

b) egységesítés: $P(f(g(b,a)),b)$ és $P(f(g(b,a)),b)$

6. Egységesítsd!

A bárány egy állat. A farkas megeszi a bárányt. Az az állat, amelyik megeszi a másikat, az húsevő.

a) formalizálás:
 $\text{állat}(\text{bárány})$
 $\text{megeszi}(\text{farkas}, \text{bárány})$
 $\text{megeszi}(x,y) \wedge \text{állat}(y) \rightarrow \text{húsevő}(x)$

b) egyszerűsítés: az első két mondat összevonása:

$\text{megeszi}(\text{farkas}, \text{bárány}) \wedge \text{állat}(\text{bárány}) \rightarrow \text{IGAZ}$

c) helyettesítés: $x = \text{farkas}$, $y = \text{bárány}$

d) egységesítés: $\text{megeszi}(\text{farkas}, \text{bárány}) \wedge \text{állat}(\text{bárány}) \rightarrow \text{húsevő}(\text{farkas})$

7. Egységesítsd!

$P(x,\text{kutya}) \wedge Q(\text{ember},y) \rightarrow R(z) \vee S(t,\text{ló},v)$

$P(\text{macska},x) \wedge Q(y,\text{asztal}) \rightarrow R(\text{tehén}) \vee S(t,u,v)$

a) helyettesítés: a 2. mondatban $x = \text{kutya}$, $y = \text{ember}$, $u = \text{ló}$

b) egységesítés: $P(\text{macska},\text{kutya}) \wedge Q(\text{ember},\text{asztal}) \rightarrow R(\text{tehén}) \vee S(t,\text{ló},v)$

8. Oldd meg rezolúcióval!

Jánosnak van egy kutyája. Minden kutyatulajdonos állatimádó. Egy állatimádó nem öl állatot. Az Ebi nevű macskát vagy János, vagy Bodri ölte meg.

Kérdés: Bodri ölte meg a macskát?

a) formalizálás:
 $\exists x \text{Kutya}(x) \wedge \text{Birtokol}(\text{János}, x)$
 $\forall x (\exists y \text{Kutya}(y) \wedge \text{Birtokol}(x, y)) \rightarrow \text{Állatimádó}(x)$
 $\forall x \text{Állatimádó}(x) \wedge \forall y \text{Állat}(y) \rightarrow \neg \text{Megöl}(x, y)$
 $\text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi}) \vee \text{Megöl}(\text{Bodri}, \text{Ebi})$
 $\text{Macska}(\text{Ebi})$
 $\forall x \text{Macska}(x) \rightarrow \text{Állat}(x)$

b) PNF-re alakítás: kérdés negáltját is hozzávesszük (tudjuk: $\neg(\alpha \rightarrow \beta) = \neg(\neg\alpha \vee \beta) = \alpha \wedge \neg\beta$)

Kutya(D)

Birtokol(János,D)

$\neg\text{Kutya}(y) \vee \neg\text{Birtokol}(x,y) \vee \text{Állatimádó}(x)$

$\neg\text{Állatimádó}(x) \vee \neg\text{Állat}(y) \vee \neg\text{Megöl}(x,y)$

$\text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi}) \vee \text{Megöl}(\text{Bodri}, \text{Ebi})$

Macska(Ebi)

$\neg\text{Macska}(x) \vee \text{Állat}(x)$

$\neg\text{Megöl}(\text{Bodri}, \text{Ebi})$

c) helyettesítés: 3. mondat: $x = \text{János}, y = D$,

4. mondat: $x = \text{János}, y = \text{Ebi}$,

7. mondat: $x = \text{Ebi}$

d) egységesítés és rezolúció:

Kutya(D)

Birtokol(János,D)

□

$\neg\text{Kutya}(D) \vee \neg\text{Birtokol}(\text{János}, D) \vee \text{Állatimádó}(\text{János})$ □ $\neg\text{Kutya}(D) \vee \text{Ái}(\text{János})$

$\neg\text{Állatimádó}(\text{János}) \vee \neg\text{Állat}(\text{Ebi}) \vee \neg\text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi})$

$\text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi}) \vee \text{Megöl}(\text{Bodri}, \text{Ebi})$

□ $\text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi})$

Macska(Ebi)

□

$\neg\text{Macska}(\text{Ebi}) \vee \text{Állat}(\text{Ebi})$ □ $\text{Állat}(\text{Ebi})$

$\neg\text{Megöl}(\text{Bodri}, \text{Ebi})$

□

Kutya(D)

□

$\neg\text{Kutya}(D) \vee \text{Ái}(\text{János})$ □ $\text{Ái}(\text{János})$

$\neg\text{Ái}(\text{János}) \vee \neg\text{Állat}(\text{Ebi}) \vee \neg\text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi})$ □ $\neg\text{Ái}(\text{János}) \vee \neg\text{Állat}(\text{Ebi})$

$\text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi})$

□

$\text{Állat}(\text{Ebi})$

$\text{Ái}(\text{János})$

□

$\neg\text{Ái}(\text{János}) \vee \neg\text{Állat}(\text{Ebi})$ □ $\neg\text{Állat}(\text{Ebi})$ □ □

$\acute{A}llat(Ebi)$

□

9. Tudjuk azt, hogy a boszorkányok elégnek, a vádlottunk pedig könnyebb, mint egy kacsa.

A feladat az, hogy bebizonyítsuk, hogy a vádlott boszorkány néhány háttér-információ felhasználásával (pl. hogy a fa úszik a vízben).

a) formalizálás:

$$\text{Ég}(x) \rightarrow \text{Boszorkány}(x)$$

$$\text{Fa}(x) \rightarrow \text{Ég}(x)$$

$$\text{Úszik}(x) \rightarrow \text{Fa}(x)$$

$$\text{Könnyebb}(x,y) \wedge \text{Úszik}(y) \rightarrow \text{Úszik}(x)$$

$$\text{Úszik}(\text{kacsa})$$

$$\text{Könnyebb}(\text{vádlott}, \text{kacsa})$$

következik, hogy: Boszorkány(vádlott) tautológia, tehát ellentettje kontradikció

$$(\text{tudjuk: } \neg(\alpha \rightarrow \beta) = \neg(\neg\alpha \vee \beta) = \alpha \wedge \neg\beta)$$

b) PNF-re alakítás:

$$\neg\text{Ég}(x) \vee \text{Boszorkány}(x)$$

$$\neg\text{Fa}(x) \vee \text{Ég}(x)$$

$$\neg\text{Úszik}(x) \vee \text{Fa}(x)$$

$$\neg\text{Könnyebb}(x,y) \vee \neg\text{Úszik}(y) \vee \text{Úszik}(y)$$

$$\text{Úszik}(\text{kacsa})$$

$$\text{Könnyebb}(\text{vádlott}, \text{kacsa})$$

$$\neg\text{Boszorkány}(\text{vádlott})$$

c) helyettesítés: $x = \text{vádlott}$, $y = \text{kacsa}$

d) egységesítés és rezolúció:

$$\neg\text{Ég}(\text{vádlott}) \vee \text{Boszorkány}(\text{vádlott}) \quad \square$$

$$\neg\text{Fa}(\text{vádlott}) \vee \text{Ég}(\text{vádlott}) \quad \square \quad \neg\text{Fa}(\text{vádlott}) \vee \text{Boszorkány}(\text{vádlott})$$

$$\neg\text{Úszik}(\text{vádlott}) \vee \text{Fa}(\text{vádlott})$$

$$\neg\text{Könnyebb}(\text{vádlott}, \text{kacsa}) \vee \neg\text{Úszik}(\text{kacsa}) \vee \text{Úszik}(\text{kacsa}) \rightarrow \neg\text{K}(\text{vádlott}, \text{kacsa})$$

$$\text{Úszik}(\text{kacsa})$$

$$\text{Könnyebb}(\text{vádlott}, \text{kacsa})$$

$$\neg\text{Boszorkány}(\text{vádlott})$$

$$\begin{aligned}
&\neg Fa(\text{vádlott}) \vee \text{Boszorkány}(\text{vádlott}) \quad \square \\
&\neg \dot{U}szik(\text{vádlott}) \vee Fa(\text{vádlott}) \quad \square \quad \neg \dot{U}szik(\text{vádlott}) \vee \text{Boszorkány}(\text{vádlott}) \\
&\neg \text{Könnyebb}(\text{vádlott}, \text{kacsa}) \quad \square \\
&\dot{U}szik(\text{kacsa}) \quad \quad \quad / \text{kiesik} / \\
&\text{Könnyebb}(\text{vádlott}, \text{kacsa}) \quad \square \\
&\neg \text{Boszorkány}(\text{vádlott}) \\
\\
&\neg \dot{U}szik(\text{vádlott}) \vee \text{Boszorkány}(\text{vádlott}) \quad \square \\
&\dot{U}szik(\text{kacsa}) \quad \quad \quad \square \quad \text{Boszorkány}(\text{vádlott}) \quad \square \quad \square \\
&\neg \text{Boszorkány}(\text{vádlott}) \quad \quad \quad \square
\end{aligned}$$

A fenti következtetés valójában nem tűnik túl logikusnak. Mivel a rezolúciós eljárás helyes és teljes, a probléma csak a kiindulási információkkal lehet. Így is van: az első mondat feltételezi, hogy minden, ami elég, az boszorkány, a harmadik pedig, hogy minden, ami úszik a vízen az fából van.

Esztergár-Kiss Domokos (3. évfolyam)