

Elsőrendű Logika

Volt (a helyes következtetéseknél):

Minden veréb madár.	Feltétel1
Minden madár gerinces.	Feltétel2
Minden veréb gerinces.	Következmény

„Érezzük”, hogy a leírt következtetés helyes. Azonban a nulladrendű logika eszköztárával nem tudjuk formalizálni a következtetési sémát. A $\{A, B\} \models C$ séma nem fejezi ki a következtetés tartalmát, hiszen A, B, C „független” ítéletváltozók. Az egyes ítéletek belső szerkezetét ily módon nem tudjuk kifejezni, és az állítások kapcsolatát sem. Szükség van az általános osztály (madár, gerinces) és annak elemei közötti különbség (veréb, madár) jelölésére. Ennek egyik módja az ún. prédikátumok és kvantorok bevezetése. Ezekkel egy lehetséges formalizálás:

$$\forall x (V(x) \rightarrow M(x))$$

$$\forall x (M(x) \rightarrow G(x))$$

$$\forall x (V(x) \rightarrow G(x))$$

A feltételek és a következmény is ún. elsőrendű formulák. V, M, G predikátumok, a $\forall$ jel az ún. univerzális kvantor. Az 'x' változószimbólum. A formulák értelmezéséhez azokat „interpretálni” kell. Az interpretálás azt jelenti, hogy megmondjuk, mi a jelentése a formulában használt predikátumszimbólumoknak, a változók milyen értékeket vehetnek fel, stb. Pl. a változók az értékeiket valamely előre megadott halmazból, az ún. univerzumból vehetik fel, ezt az univerzumot meg kell adni. Itt pl. ehhez a verebeket kellene alkalmas módon „azonosítani”, és ezek az azonosítók alkotnák az univerzumot.

Ahhoz, hogy el tudjuk dönteni, igaz-e vagy sem egy formula, hasonlóan a nulladrendű formulákhoz, interpretálni kell a formulát. Az interpretáció azonban itt nemcsak a konkrét igaz – hamis értékek hozzárendelését jelenti az alapformulákhoz, atomokhoz, hanem, mivel változókat is használunk, azoknak is értéket kell adni, ennek függvényében „kiosztani” az igazságértékeket, majd kiértékelni a formulát. A kiértékelési szabályok a nulladrendű szabályokon alapulnak, a negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció értelmezése ugyanaz elsőrendben is. Konkrét igazságértéke azonban csak akkor lesz a formulának, ha vagy minden szereplő változója „kvantált”, vagy minden változó helyén konstans szerepel. Egyébként pedig a formula igazságértéke nemcsak az interpretációtól, hanem a változók felvett értékeitől is függ. Ezekkel foglalkozunk az alábbiakban.

Először egy egyszerű példán bevezetjük az alapvető fogalmakat.

Meg kell modanunk, mikre vonatkoznak az állításaink, vagyis meg kell adni egy **ún. univerzum-ot**. **Az univerzum** nemüres halmaz, a változók (x,y) ennek elemein futnak végig. Ezek az ún. individuumváltozók, másfajta változó nincs is.

Példa: Univerzum: Kiss, Nagy, Gauss, Bolyai

PPKE_ITK_első_évfolyamos(x)-mikor lesz igaz az értéke?

PPKE_ITK_első_évfolyamos(x)-mikor lesz hamis az értéke?

$\forall x$ PPKE_ITK_első_évfolyamos(x) -mikor lesz igaz az értéke?

Az igazságérték itt is, akárcsak nulladrendben, függ az interpretációtól, egyrészt attól, mi az univerzum, másrészt a változó felvett értékeitől.

Prédikátumok jelentése: az univerzum elemei közötti kapcsolatot, relációt fejez ki

Példák:

P prédikátum, $P(x,y)$ jelentheti pl. azt, hogy $x < y$. Önmagában a $P(x,y)$ jelsorozat csak annyit jelent, hogy az univerzum elemei között egy kétargumentumos reláció van értelmezve. A kétargumentumos predikátumokat, illetve az interpretálásukkor a relációkat sokféleképpen lehet jelölni, mi az ún. prefix jelölést használjuk.

Jelölések :	$x < y$, xPy	infix (közben jelölt)
	$< x, y$	prefix (elől jelölt)
	$P(x,y)$ vagy Pxy	prefix
	$(x,y)P$ vagy xyP	postfix (hátral jelölt)

Hogyan számítható ki egy formula igazságértéke? Igaz-e, hogy $(\forall x \exists y P(x,y))$?

Ezt így önmagában nem tudjuk eldönteni, az előzőek értelmében meg kell mondanunk az interpretációt is, vagyis azt, hogy milyen értékeket vehet fel az x és y változó, és mi a jelentése a P prédikátumnak. A minden: $\forall$ és a létezik, van olyan: $\exists$ kvantorok jelentése tehát a következő:

$\forall P(x)$ formula olvasása: minden x -re $P(x)$, bármely x -re $P(x)$, tetszőleges x -re $P(x)$.

És ezt jelentheti: minden (bármely, tetszőleges) x -re, ami a megadott univerzumból veheti fel az értékeit, igaz az, hogy a P -vel jelölt tulajdonsággal rendelkezik.

$\exists x P(x)$ formula olvasása: van olyan (létezik) x , amelyre $P(x)$.

És ezt jelentheti: van olyan (létezik legalább egy) x -re, ami a megadott univerzumból veheti fel az értékeit, igaz az, hogy a P -vel jelölt tulajdonsággal rendelkezik. Természetesen több ilyen x individuum érték is lehet.

I. interpretáció:

Legyen az univerzum a természetes számok halmaza, és $P(x, y)$ jelentse azt, hogy $x < y$. Ekkor a $\forall x \exists y P(x,y)$ formula jelentése, interpretációja:

$\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} x < y$. Vagyis, minden x természetes számhoz létezik egy nálánál nagyobb y természetes szám. Ebben az interpretációban tehát a formula igaz.

II. interpretáció: univerzum:= természetes számok halmaza

$P(x,y) := y < x$, vagyis, igaz-e, hogy $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}$, hogy $y < x$?

Ez nem igaz, mert az $x=1$ -hez nincs ilyen y . $\Rightarrow$ Hamis

II. interpretáció: univerzum:= racionális számok

P mindkét($y < x$, $x < y$) interpretációjára a P reláció igaz.

IV. **interpretáció:** univerzum:= Racionális számok $x, y \in \mathbf{Q}$

P predikátum jelentése: $P(x,y) \sim x \cdot y = 1$ (azaz $P(x,y)$ igaz, ha $x \cdot y = 1$)

Ez hamis, mert $0 \in \mathbf{Q}$ -ra nincs ilyen y .

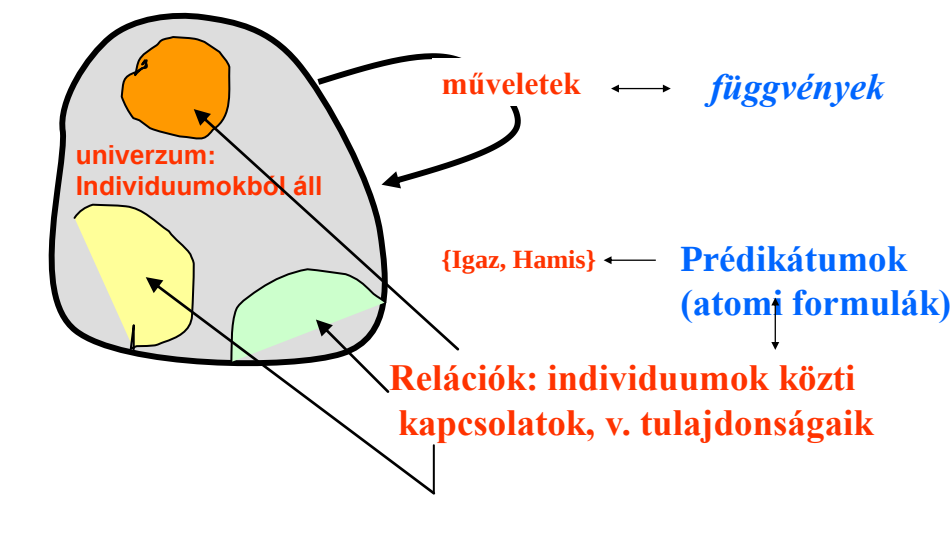
V. **interpretáció:** univerzum:= Emberek halmaza

P predikátum jelentése: $P(x,y) \sim x$ -nek y az édesanyja.

Igaz-e, hogy $(\forall x \exists y P(x,y))$, vagyis, hogy $\forall$ (minden) embernek $\exists$ (létezik) édesanyja?

Ez igaz.

Elsőrendű logika: Interpretáció és nyelv (formula)



ELSŐRENDŰ NYELVEK

Ahogy a nulladrendű logikában is, meg kell adni, milyen jelkészletet használunk, és ezen jeleket milyen szabályok szerint írhatjuk egymás után. Az így keletkező jelsorozat a formula. ez alkotja az elsőrendű nyelv szintaxisát, mely jóval összetettebb, mint a nulladrendű volt.

Szintaxis:

Egy lehetséges jelkészlet:

változószimbólumok: $x, y, z, \dots$

konstansszimbólumok: $a, b, c,$

prédikátumszimbólumok (állítás) – Jel: $P, Q, S \dots$

függvényszimbólumok: f, g

logikai összekötő jelek (logikai műveletek jelei): $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$

kvantorok: $\forall, \exists$

zárójelek: $(,)$

Formulaképzés szabályai

A formulákban a fenti jelek nem sorolhatók fel tetszőlegesen. A formula képzésének szabályaihoz fontos megkülönböztetünk a formula két legegyszerűbb alkotóelemét, a kifejezés-t (term), és az atomi formulát. Ezekből alkotjuk a bonyolultabb formulákat. Fontos különbség van a kettő között: a

kifejezés nem formula, hanem függvényszimbólumok, változók és konstansok jeleiből alkotott olyan „valami”, aminek segítségével az univerzumban navigálhatunk: ugyanis a függvény mindig az univerzum elemein, vagy rendezett n -esein értelmezett, és univerzumbeli elem az értéke. tehát univerzumbeli elem(ek)ből kiindulva univerzumbeli elemhez (pontosan egyhez) jutunk.

Ezeket a kifejezéseket, idegen szóval term-eket írhatjuk akár más vagy ugyanazon termbe, rekurzív módon, s a termeket az atomi formulák argumentumaiba. A kifejezések nem kötelezően vannak meg az elsőrendű nyelvekben, ugyanis bizonyos mértékig helyettesíthetők, ha nem is egyenértékűen, atomi formulákkal.

Kifejezés (Term):

Minden individumváltozó és konstans kifejezés.

Ha $t_1, t_2, \dots, t_n$ kifejezés, és f „ n ” változós függvény szimbólum, akkor $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ is kifejezés.

A fentiek szerint a függvény argumentumaiba írhatunk változókat, konstansokat, de beágyazhatók más, vagy saját függvényértékek is. A kifejezések vagy prédikátumszimbólumok argumentumaiban, vagy függvények argumentumaiban fordulhatnak elő, önállóan nem.

Példa: Legyen x változó, a 2 szimbólum egy konstans (interpretálható a 2 számként is, de nem kötelező), f és g egy, illetve kétargumentumos függvények. Ekkor $f(2)$, $f(x)$, x , 2, $f(g(x,2))$, $g(x,x)$, $g(x,2)$, $g(2,2)$, $g(f(2))$, $g(g(2),f(x))$ mindegyike kifejezés, de nem formula.

A formulaképzés szabályai

Atomi formulák:

Ha a P „ n ” argumentumú prédikátumszimbólum, és $t_1, t_2, \dots, t_n$ termek, akkor $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ atomi formula.

A nulla argumentumos prédikátumszimbólumot az ítéletváltozóknak feleltetjük meg. Ily módon az elsőrendű logika a nulladrendű kiterjesztése.

Példa: Legyenek P, Q, R rendre nulla, egy és kettő argumentumos prédikátumszimbólumok, x változó, 2 konstans, f és g egy, illetve kétargumentumos függvények.

Feladat:

Melyek atomi formulák az alábbiak közül?

$P(g(x,2))$, $Q(P)$, $Q(g(2,x))$, $R(g(2,2))$, $g(f(2))$, $g(g(2))$, $R(x,2)$, P .

Formula:

1. minden atomi formula formula

Ha α és β formulák, akkor

2. $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta, \neg \alpha$ is formulák
3. $\forall x \alpha(x), \exists x \alpha(x)$ is formula
4. Minden formula 1.-3. véges sokszori alkalmazásával kapható.

Kvantorok hatásköre

Fontos, hogy összetett formula esetén meddig terjed valamely kvantor hatásköre. Megállapodunk abban, hogy kvantor hatásköre a mögötte álló változó utáni atomi formula vagy zárójelben megadott formula. Az ezekben szereplő változó előfordulásokat kötöttnek nevezzük, a változó egyéb előfordulásait szabadnak.

Példa: $\exists x P(x, y) \vee Q(x)$

x „kötött” $P(x, y)$ -ban, de x „szabad” $Q(x)$ -ben. Az y szabad.

Azt a formulát, amelyben minden változó kötött, **mondat**nak nevezzük. A mondat igazságértéke csak az interpretációtól függ, a változók helyettesítésétől nem. Zárt formula=mondat=minden változó kötött.

Egyszerűbb megadni a nyelvet további elemi fogalmak bevezetésével.

Nyelv típusa:

$L(P, F): L_1(P_1, P_2, \dots, P_k; f_1, f_2, \dots, f_j)$

P : Prédikátumok halmaza; F : függvények halmaza

Típusa: $(a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_k}; a_{f_1}, a_{f_2}, \dots, a_{f_j})$

$a_{p_i} = P_i$ – argumentum száma

$a_{f_i} = f_j$ – argumentum száma

Példa:

$L_1(P_1; -)$

Típusa: $(2; -)$. ebből azonnal tudjuk, hogy a nyelvben egyetlen, kétargumentumos prédikátum van, függvény pedig nincs.

Feladat:

Értelmezze az alábbiakat:

$L_2(H; J; -)$

Típusa: $(1, 2; -)$

Az elsőrendű nyelvben is valamely formula igazságértékét csak úgy tudjuk megmondani, ha interpretáljuk a formulát. Az interpretáció több részből áll. Meg kell adni az alaphalmazt, aminek elemeire vonatkoznak a formulák. Ahogyan nulladrendben is tettük, itt is meg kell mondani az atomi formulák igazságértékét. Ezen túlmenően, a függvényeket is interpretálni kell, meg kell mondani, hogy az egyes individuumokon mi a felvett függvényérték (ami szintén az univerzum egy eleme, vagyis egy individuum).

Ezután az elsőrendben tanult kvantorok jelentése, és a műveletek nulladrendben tanult jelentése alapján kiértékelhető a formula.

Példa:

Interpretáljuk a $P_1(f_1(f_1(f_0)),x) \vee \forall x (P_2(f(x)) \rightarrow P_3(x,y))$ elsőrendű formulát.

Tudjuk előre, hiszen nem minden változó előfordulás van kvantálva, hogy a formula igazságértéke a helyettesítéstől is függ.

$L_1((P_1, P_2, P_3; f_0, f_1)$

Típus: (2,1,2;0,1)

Interpretáció: univerzum megadása, majd atomi formulák igazságértékeinek „kiosztása”

Első interpretáció

I_1 interpretáció:

Univerzum $\{0,1\}$

P_1 értelmezése: egyrészt valamilyen relációval azonosítjuk, ha egy meglévő struktúráról van szó (ez itt az új névben nyilvánul csak meg). Másrészt, a struktúra tulajdonságainak megfelelően az igazságértékeket rögzíteni kell, minden lehetséges argumentumra (mivel nem adtunk meg „igazi struktúrát, ezért ez most tetszőleges”, de pl. fejezze ki az atomok azonosságát).

$P(0,1)=H$ $P(0,0)=I$ $P(1,1)=I$ $P(1,0)=H$

(Ha ugyanaz az individuum szerepel a P mindkét argumentumában, akkor igaz a P , egyébként pedig hamis. Ha P -ről szerepelne olyan mondat, ami a szimmetriát, tranzitivitást is megadja, akkor akár az egyenlőség reláció is lehetne)

P_2 értelmezése: P_2 -nek feleltessük meg a Q relációt. Rögzítsük a Q igazságértékeit (most tetszőleges):

$Q(0)=H$ $Q(1)=I$

P_3 értelmezése: P_3 -nak feleltessük meg az S relációt. Rögzítsük az S igazságértékeit (most tetszőlegesen meghatározhatjuk, mert nem kötöttük valós struktúrához):

$S(0,1)=I$ $S(0,0)=H$ $S(1,1)=H$ $S(1,0)=H$ (ha $<$ akkor igaz)

A függvényeket is interpretálni kell, most az egyszerűség kedvéért ugyanazt a nevet használjuk:

($\leftrightarrow$: egy-egyértelmű hozzárendelések)

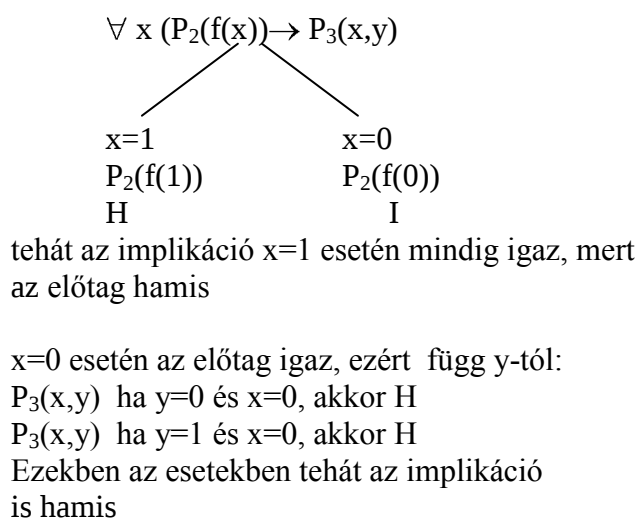
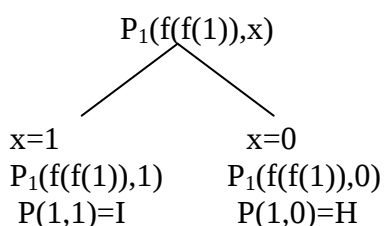
$f_0 \leftrightarrow 1$

$f(0) \leftrightarrow 1$

$f(1) \leftrightarrow 0$

A formula kiértékelése:

$P_1(f_1(f_1(f_0)),x)$ (L_1 -beli formula), a kiértékelés mindig az adott interpretációra vonatkozik.



Tehát $x=1$ esetén a formula igaz, $x=0$ esetén hamis, hiszen minden diszjunkciós tag hamis, akár 0 az y , akár 1.

Feladatok:

1.

Döntse el, mi az igazságértéke az alábbi formuláknak, a fenti interpretációt feltételezve?

$$\forall x (P_1(f_1(f_1(f_0)),x)) \vee \forall x \exists y (P_2(f(x)) \rightarrow P_3(x,y))$$

$$\exists x (P_1(f_1(f_1(f_0)),x)) \vee \forall x \exists y (P_2(f(x)) \rightarrow P_3(x,y))$$

2. Adjon meg egy másik interpretációt a $P_1(f_1(f_1(f_0)),x) \vee \forall x (P_2(f(x)) \rightarrow P_3(x,y))$ formulára, és értékelje ki! Értékelje ki az előző feladatban szereplő formulát is ebben az új interpretációban!

Példa: Tekintsük a következő elsőrendű nyelvet:

Predikátum: az egyenlőség, jele: $=$

Függvények: e , i , f . Az e változóinak száma legyen 0, az i függvényé 1, az f függvényé pedig 2.

Ezzel a nyelvvel a csoport definíciója megadható:

Az e választja ki az adott nemüres halmazból az egységelemet, i a baloldali inverzet, f pedig az a csoportművelet, amely az adott H nemüres halmaz minden a , b eleméhez hozzárendel egy másik H -beli elemet, c -t. Ez utóbbit így jelöljük: $f(a,b) = c$.

A csoportelmélet axiómái ezen az elsőrendű nyelven megfogalmazva:

$$1./ f(a, b, c) = f(a, f(b, c)) \quad (\text{asszociativitás})$$

$$2./ f(a, e) = a \quad (\text{bal egység})$$

$$3./ f(a, i) = e \quad (\text{bal inverz})$$

Feladat: Egészítse ki a fenti axiómákat a kommutatív tulajdonság megadásával!

Az elsőrendű nyelv szokásos használata

Az elsőrendű nyelv tulajdonképpen matematikai struktúrák leírására jött létre. Használata kétirányú: Lehet, hogy adott formulának keresünk modellt. Ekkor a 4. oldalon látott példa alapján járhatunk el.

Lehet azonban, hogy meglévő elméletet vagy matematikai struktúrát szeretnénk formalizálni. Ekkor fel kell tárnunk a struktúrában használt műveletek (őket függvényekkel írjuk le) és relációk (őket prédikátumokkal írjuk le) tulajdonságait, és ezeket az elsőrendű nyelven megfogalmazni.

Az elsőrendű nyelv és a nulladrendű nyelv kapcsolata

Az elsőrendű nyelvben a nulla argumentumos predikációk azonosak a nulladrendű nyelv ítéletváltozóival. Tehát a nulladrendű formulák a szűkített szintaxissal leírhatók: csak nulla argumentumos predikátumszimbólumokat, zárójeleket és a logikai összekötő jeleket engedjük meg.

Elsőrendű formula szemantikája: INTERPRETÁCIÓ + KIÉRTÉKELÉS

Interpretáció:

- univerzum megadása
- műveletek megadása - ez felel meg a függvényeknek, a függvényértékek ennek alapján adhatók meg
- relációk konkrét értelmezése - ez felel meg a prédikátumoknak, ennek alapján mondjuk meg az atomi formulák igazságértékeit. Az igazságérték megadása csak a változók értékadása után lehetséges, tehát az értékadás is hozzátartozik az interpretációhoz.

Kiértékelés:

Ugyanazok a szabályok a szabályok mint a L_0 -ban, ehhez hozzávesszük a $\forall x \alpha(x)$ kiértékelését: x -be az univerzum összes elemét behelyettesítve ha $\alpha(x)$ mindig igaz, akkor a formula igaz. (Hasonlóan az egzisztenciális kvantorra is)

Jelölések:

$$\models \varphi[x \leftarrow 1]$$

$$I_1 \models \varphi[x \leftarrow 1]$$

$$\models_{I_1} \varphi[S]$$

I_2 -ben φ hamis

Értékadás (konkretizáció): a termék változóinak helyébe a lehetséges univerzumbeli elemeket helyettesítjük.

A φ formula érvényes (tautológia) az „I” interpretációban, ha minden értékadásra értéke igaz. Jel: $\models_{\text{I}} \varphi$

A φ formula kontradikció „I”-ben, ha nincs olyan értékadás, amiben igaz.

Érvényes formula (nulladrendben: tautológia): minden interpretáció minden értékadására igaz.

Azonosan hamis formula: minden interpretáció minden értékadására hamis.

Mondat: zárt formula, minden változó kvantált $\Rightarrow$ igazságérték csak az interpretációtól függ, a változók feltett értékektől nem.

Részletesebben a szemantikáról:

Ebben a részben megadjuk a szintaktikai leírást, és a hozzá tartozó szemantikát.

Formula (szintaxis): Minden atom formula

Jelentése (szemantika):

Pl.. $P(x, y)$: x és y változókat konstansokkal helyettesítjük az univerzumból. Ezáltal nulladrendű kijelentést kapunk. A helyettesítéstől függően értéke igaz vagy hamis. Hogy melyik éppen, az az adott interpretációban RÖGZÍTVE VAN! (Csak a predikátumszimbólumok használatával kapunk atomi formulát!)

Formula (szintaxis):

Ha α és β formulák, akkor $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\neg \alpha$ is formulák

Jelentése (szemantika):

A nulladrendben megadott szemantika szerint

Formula (szintaxis):

$\forall x \alpha(x)$, $\exists x \alpha(x)$ is formula

Jelentések (szemantika):

$\forall x \alpha(x)$: minden x -re $\alpha(x)$, bármely x -re $\alpha(x)$, tetszőleges x -re $\alpha(x)$

$\forall x \alpha(x)$ **IGAZ**, ha az x értékét (gondolatban) végigfuttatva az interpretációban megadott univerzum elemein, **MINDEGYIK** rendelkezik az α formulában megfogalmazott „tulajdonsággal”.

$\forall x \alpha(x)$ **HAMIS**, ha az x értékét (gondolatban) végigfuttatva az interpretációban megadott univerzum elemein, találunk **legalább egy** olyan értéket, ami **NEM** rendelkezik az α formulában megfogalmazott „tulajdonsággal”.

$\exists x \alpha(x)$: létezik x $\exists \alpha(x)$, van olyan x $\alpha(x)$, található x $\alpha(x)$

$\exists x \alpha(x)$ **IGAZ**, ha az x értékét (gondolatban) végigfuttatva az interpretációban megadott univerzum elemein, **találunk LEGALÁBB EGY** olyan értéket, amely rendelkezik az α formulában megfogalmazott „tulajdonsággal”.

$\exists x \alpha(x)$ **HAMIS**, ha az x értékét (gondolatban) végigfuttatva az interpretációban megadott univerzum elemein, **NEM találunk EGY** olyan értéket **SEM**, amely rendelkezne az α formulában megfogalmazott „tulajdonsággal”.

Példa:

Mi az igazságértéke a $\forall x Q(x)$ formulának, ha $Q(x)$ jelenti azt, hogy $x^2 < 10$?

Legyen az univerzum az 1, 2, 3 számok halmaza. Ekkor x értéke 1, 2, 3 lehet csak, ezek négyzete legfeljebb 10, így a formula ezen interpretációban igaz. E példa kapcsán könnyen látható, hogy **VÉGES** univerzum esetén a $\forall x Q(x)$ formula **ekvivalens a $Q(1) \wedge Q(2) \wedge Q(3)$ -hoz hasonló formulával. Tehát az univerzális kvantor értelmezésekor hasznos, ha gondolatban az x változót végigfuttatjuk az univerzum elemein, és minden lehetséges értékre átgondoljuk, igaz-e a prédikátum.**

Mi az igazságértéke a $\exists x Q(x)$ formulának, ha $Q(x)$ jelenti azt, hogy $10 < x^2$?

Legyen az univerzum az 1, 2, 3, 4 számok halmaza. Ekkor x értéke 1, 2, 3, 4 lehet csak, ezek közül a 4 négyzete 16, így a formula ezen interpretációban igaz. E példa kapcsán könnyen látható, hogy **VÉGES** univerzum esetén a $\exists x Q(x)$ formula **ekvivalens a $Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3) \vee Q(4)$ -hoz hasonló formulával. Tehát az egzisztenciális kvantor értelmezésekor is hasznos, ha gondolatban az x változót végigfuttatjuk az univerzum elemein, és minden lehetséges értékre ellenőrizzük, igaz-e a prédikátum. Ha találunk egyet, amelyre igaz, tovább nem kell folytatni az ellenőrzést, hiszen ekkor ezzel az értékkel a formula igaz.**

Fontos, hogy minden formula 1.-3. véges sokszori alkalmazásával kapható.

Két változó kvantálása:

$\forall x \forall y A(x, y)$ **IGAZ:**

ha az univerzumból kiválasztott bármely párra igaz. Gondolatban x -et rögzítve futtassuk y értékeit az univerzum összes elemein, és ellenőrizzük, igaz-e az állítás. Aztán x értékét változtassuk egy másik univerzum elemre, rögzítsük, majd y értékeit megint futtassuk végig a lehetséges értékeken. Ezt végezzük el minden lehetséges x értékre.

$\forall x \forall y A(x, y)$ **HAMIS:**

ha az univerzumból kiválasztható egy olyan pár, amelyre $A(x, y)$ hamis.

Fentiek miatt, hiszen az értelmezésből adódóan mindegy, milyen sorrendben választjuk ki x -et és y -t, a $\forall x \forall y A(x, y)$ jelentése egyenértékű (ekvivalens) $\forall y \forall x A(x, y)$ jelentésével.

$\forall x \exists y A(x, y)$ **IGAZ:**

minden x értékhez található olyan y , amely az x értékkel párt alkotva $A(x, y)$ igaz. Ez tehát x értékétől függő, más x értékekhez más y érték tartozhat. Például a valós számok esetében ha $A(x, y)$ jelenti azt, hogy x ellentettje y -nak, vagyis $x + y = 0$, akkor ez minden számpárra igaz, bármely valós számhoz található egy másik valós szám, hogy összegük 0. Ebben az interpretációban ha x különbözik, y is különbözik, tehát az y függ az x értékétől.

$\forall x \exists y A(x, y)$ **HAMIS:**

Ha van olyan x , amelyhez nem találunk olyan y értéket, ami az $A(x,y)$ -t igazná teszi. Pl. ha $A(x,y)$ azt jelenti, hogy a valós számok körében $x \cdot y = 1$, akkor ez hamis, mert az $x=0$ valós számhoz nem található ilyen tulajdonsággal rendelkező másik valós szám.

$\exists x \forall y A(x,y)$ IGAZ:

Van egy olyan x érték, amelyet az összes y értékkel párba állítva az $A(x, y)$ igaz. Itt x **egy** adott értéke jó az **összes** y értékkel kombinálva. Ilyen értelemben ez az x érték nem függ az y értékektől. Lehet persze több ilyen tulajdonságú x érték is, de a formula már akkor igaz ha egy ilyet találunk. Például $A(x,y)$ azokat a valós számpárokat jelenti, amelyekre $y+x=y$, akkor az $x=0$ nyilván jó minden y valós számra.

$\exists x \forall y A(x,y)$ HAMIS:

Van egy olyan y , amelyre a kiszemelt x érték „nem működik”, ezzel az y értékkel párba állítva $A(x,y)$ hamis.

Ekvivalens formulák: minden interpretációban igazságértékük azonos.

Fontosabb elsőrendű ekvivalens formulák:

De Morgan:

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x \neg P(x) \equiv \forall x P(x)$$

$$\neg \forall x \neg P(x) \equiv \exists x P(x)$$

$$\exists x_i \exists x_j A(x_i, x_j, \dots) \equiv \exists x_j \exists x_i A(x_i, x_j, \dots)$$

$\exists x (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ (mivel igaz lesz egyik teljesülése esetén is, nem fontos „egyszerre” igaznak lenni. De éppen emmiatt $\wedge$ -re nem igaz!)

$\exists x \exists y (A(x) \vee B(y)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists y B(y)$ kvantor kiemelési szabály: különböző változóra von. kvantor akkor emelhető ki, ha a másikonban nem szerepel.

$$\forall x_i \forall x_j A(x_i, x_j, \dots) \equiv \forall x_j \forall x_i A(x_i, x_j, \dots)$$

$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x (A(x) \wedge \forall x B(x))$ mindkét tulajdonságnak („egyszerre”) teljesülnie kell, $\vee$ -ra ezért nem igaz!

$\forall x \forall y (A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall y B(y)$ kvantor kiemelési szabály: különböző változóra von. kvantor akkor emelhető ki, ha a másikonban nem szerepel.

Átnevezés : Q1 és Q2 a $\forall$ vagy $\exists$ kvantorok valamelyike

$$Q1x A(x) \wedge Q2y B(y) \equiv Q1x Q2y (A(x) \wedge B(y))$$

$$Q1x A(x) \vee Q2y B(y) \equiv Q1x Q2y (A(x) \vee B(y))$$

KONJUNKTÍV NORMÁLFORMA KIALAKÍTÁSA (KLÓZ alak) (A prenex formába való átírás algoritmusa.)

1. A logikai összekötőjelek átírása $\neg$, $\wedge$, $\vee$ -ra.
 2. A DeMorgan szabályok alkalmazása addig amíg a $\neg$ hatásköre atomi formula nem lesz.
 3. A változók standardizálása (kvantonkénti átnevezése).
- Például a $\forall x (P(x) \vee \exists x Q(x))$ formulából $\forall x (P(x) \vee \exists y Q(y))$

A kvantorkiemelési szabályok alkalmazása addig, amíg minden kvantor a formula elejére nem kerül. A kvantorok és az azokat közvetlenül követő változó sorrendjét meg kell tartani.

4. A formula konjunktív normálformára hozása disztributív törvények alkalmazásával

Példa

$$\forall x (\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg (Q(y) \rightarrow P(x,a))) \rightarrow \neg \forall x \exists y (\neg P(x,y) \rightarrow R(x,y))$$

1. lépés

$$\neg \forall x (\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg (Q(y) \vee P(x,a))) \vee \neg \forall x \exists y (\neg P(x,y) \vee R(x,y))$$

2. lépés.

$$\begin{aligned} & \exists x \neg (\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg (Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \neg \exists y (\neg P(x,y) \vee R(x,y)) \\ & \exists x (\neg \forall y P(x,y) \vee \neg \exists y \neg (Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \forall y \neg (\neg P(x,y) \vee R(x,y)) \\ & \exists x (\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y \neg \neg (Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \forall y (P(x,y) \wedge \neg R(x,y)) \\ & \exists x (\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y (Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \forall y (P(x,y) \wedge \neg R(x,y)) \end{aligned}$$

3. lépés. kvantorkiemelési szabályok

$\exists x$ -re

$$\exists x (\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y (Q(y) \vee P(x,a)) \vee \forall y (P(x,y) \wedge \neg R(x,y)))$$

$\exists y$ -re először végrehajtjuk az y/y_1 helyettesítést a $\forall y$ -al kezdődő első részformulában és az y/y_2 helyettesítést a $\forall y$ al kezdődő második részformulában

$$\begin{aligned} & \exists x (\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y_1 (\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee \forall y_2 (P(x,y_2) \wedge \neg R(x,y_2))) \\ & \exists x \exists y (\neg P(x,y) \vee \forall y_1 (\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee \forall y_2 (P(x,y_2) \wedge \neg R(x,y_2))) \end{aligned}$$

és végül a formula elejére mozgatjuk a kvantorokat:

$$\exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2 (\neg P(x,y) \vee (\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee (P(x,y_2) \wedge \neg R(x,y_2)))$$

Megkaptuk a **prenex** formulát.

4. lépés: KNF-re hozás a **törzsön** belül - disztributív szabályok -HF

Ha a prenex formula törzse KNF-ben vagy DNF-ben van, akkor a **formula prenex konjunktív / prenex diszjunktív formula**.

SKÓLEM NORMÁLFORMA

A másik speciális (normál) formula egy 1. rendű formula **Skolem formája**.

A $\forall x_1, \forall x_2, \dots, \forall x_n A$ formulát, ahol a prefixumban csak univerzális kvantorok vannak Skolem formulának nevezzük.

Először átírjuk a formulát prenex formába, az előzőekben már ismertetett módon. Az egzisztenciális kvantorokat az ún. Skolem konstansok, illetve Skolem függvények segítségével kiküszöböljük.

Tekintsük az első egzisztenciális kvantort a prefixumban, legyen ez $\exists x_j$. Ha a formula igaz, akkor az előtte álló, **univerzálisan kvantált** $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ változók minden érték kombinációjához létezik legalább egy értéke az x_j változónak amelyre a formula értéke i. Ezt a tényt az

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}) = x_j$$

függvénnyel fejezzük ki. Ha az első kvantor éppen egzisztenciális, akkor ez a függvény nulla változós, vagyis konstans.

Ez az f függvény formálisan megadja, melyik az az x_j objektum az univerzumban, ami a formulát igazzá teszi.

Ezt a formális függvény képzést végrehajtjuk a soron következő egzisztenciális kvantorra is. Addig folytatjuk, amíg minden egzisztenciális kvantort nem elimináltunk. Természetesen ügyelni kell arra, hogy a függvény szimbólumok különbözők legyenek.

Az így kapott formulák az eredeti formula **logikai következményei**. Azonban az átalakítás **NEM ekvivalens**, hiszen visszafelé nem jutunk el az eredeti formulához. A gyakorlati alkalmazások szempontjából azonban ez elegendő, hiszen mi csak azt akarjuk eldönteni, lehetséges-e a formulát igazzá tenni, vagyis, más szavakkal: Kielégíthető-e a formula.

Két- és háromargumentumos prédikátumokra a skolemizálás a következőképpen végezhető el.

„Skolemizálás” – függvények bevezetése

Skolem konstans

Példa:

Ha az univerzális kvantor az egzisztenciális UTÁN áll, akkor az értelmezés szerint van egy olyan általánosan használható y érték, amely minden x -hez „jó”, vagyis valójában nem függ az x lehetséges értékeitől, ekkor ún. Skolem konstans, az univerzumban egy rögzített eleme írható az egzisztenciálisan kötött változó helyett:

$$\exists y \forall x R(x, y) \models \forall x R(x, c)$$

Ha például az univerzum a valós számok halmaza, és R azokat a számpárokat jelöli, amelyekre igaz, hogy $x+y=x$, akkor a fenti formula jelentése: található egy olyan y valós szám, amelyet bármely valós x számhoz hozzáadva a kapott érték az x . Ez ebben az interpretációban igaz, hiszen az $y=0$ ezt teljesíti.

Megjegyzés: Általában a konstansokat, mivel nem függnek változótól, szokás nulla változós függvényeknek tekinteni.

Példa:

$\forall x \exists y Q(x, y)$ jelentése: **Igaz**, ha (gondolatban) végigfutva x lehetséges univerzumbeli értékein (mintha egy külső ciklusváltozó lenne), egy rögzített x -hez végigfutunk y lehetséges univerzumbeli

értékein (mintha y belső ciklusváltozó lenne), **találunk egy** olyan y -t, amire $Q(x,y)$ igaz értéket vesz fel. (Az nem baj, ha több ilyen is van, de elegendő az első ilyenél megállni.) Nyilván, ez az y függ az x -től, más x értékekre különböző y értékek lehetnek alkalmasak. Megegyezhetünk pl. abban, hogy az első talált értéket fogjuk mindig használni.

Ha a $Q(x,y)$ -t az emberek halmazán interpretáljuk, és rögzítjük, hogy jelentése: x az y szülője, akkor a formula jelentése: minden embernek van szülője. Nyilván, a Q prédikátumnak megfelelő (anya_neve, gyerek_neve) pár a prédikátumnak megfelelő relációban a prédikátumot igazzá teszi, és ugyanígy az (apa_neve, gyerek_neve) pár is. Sokszor elég csak egy ilyen eset megtalálása. Az is igaz, hogy a gyerek_neve konstanshoz egyértelműen hozzárendelhető az apa_neve vagy az anya_neve. Ezt pl. a következőképpen jelölhetjük a rögzített elsőrendű nyelvünkben:

$$\forall x \exists y Q(x,y) \models \forall x Q(x, f(x))$$

Az $f(x)$ az egzisztenciális kvantor helyett bevezetett Skólem függvény.

Példa:

A fenti példához hasonlóan, ha több változó is van, attól függően, hogy a kvantorok milyen sorrendben helyezkednek el, függvényeket vezethetünk be:

$$\forall x \forall y \exists z A(x,y,z) \models \forall x \forall y A(x,y, f(x,y))$$

Itt, mivel az univerzális kvantor mind az x , mind az y változóra vonatkozik, ezért e két érték együttesen határozza meg azt a z értéket, amelyre a formula igazzá válik, így kétváltozós függvényt kell bevezetni. Általában a bevezetett függvény annyi változós, ahány univerzálisan kvantált változó szerepel az egzisztenciálisan kvantált változó ELŐTT. Ekkor az egzisztenciálisan kvantált változó(kat) alkalmas függvények bevezetésével ki lehet küszöbölni.

Példa:

De ha például a

$$\forall x \exists z \forall y A(x,y,z) \models \forall x \forall y A(x,y, f(x))$$

Logikai következményt tekintjük, akkor, ahogyan a jobboldalon látható, az f Skólem függvény csak az egzisztenciális kvantort megelőző változótól -jelen esetben x -től- függ.

Elsőrendben is osztályozhatjuk a mondatokat aszerint, hogy igazságértékük minden interpretációban igaz, vagy van, amelyikben igaz, van, amelyikben nem, ill. nincsen olyan interpretáció, amelyikben igaz lenn.

Tétel: Minden elsőrendű formulához található olyan Skolem normál formában lévő formula, amely az eredeti formula logikai következménye.

Bizonyítás:

A Skolem normálformára hozás lépései:

1. implikációk, ekvivalenciák kiküszöbölése, hogy csak $\neg$, $\wedge$, $\vee$ műveletek szerepeljenek
2. negációk hatáskörének atomra való csökkentése a De Morgan-azonosságok segítségével
3. standardizálás: a kvantorok előrevitele előtt az azonos nevű változókat átnevezzük úgy, hogy minden egyes kvantor hatáskörében más nevű változó szerepeljen
4. minden kvantor mondat elejére mozgatása
5. disztributív szabályok alkalmazása a zárójelek felbontására
6. Skolemizáció: az egzisztenciális kvantor kiküszöbölése konstans- vagy függvénybevezetéssel (5 és 6 felcserélhető)

Definíció. A φ elsőrendű mondat *kielégíthető*, ha van olyan interpretáció, amelyikben igaz. Ezt az interpretációt a formula *modelljének* nevezzük.

A φ elsőrendű mondat *értékes*, ha minden interpretációban igaz.

A φ elsőrendű mondat *kontradikció/kielégíthetetlen*, ha minden interpretációban hamis.

Az előzőekben már láttunk példát kielégíthető, de nem értékes formulára.

Az alábbi formula **értékes**:

$$\forall x P(x) \vee \exists y \neg P(y)$$

Az alábbi formula nyilván **kielégíthetetlen**:

$$\forall x P(x) \wedge \exists y \neg P(y).$$

Következményfogalom elsőrendű nyelvben

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta$, ha $\models_I \alpha_i$ akkor $\models_I \beta \quad \forall I$ interpretációban.

Modell: Az az I interpretáció, amelyre $\models_I \alpha$ (α modellje I).

Következmény: $\text{Mod}(\alpha) \subseteq \text{Mod}(\beta)$, ha $\alpha \models \beta$

β legalább ott igaz, ahol α , uu. mint nulladrendben

A nulladrendű esethez hasonló tételek igazak:

Tételek:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta \Leftrightarrow \underbrace{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n}_{\alpha} \models \beta$$

$\alpha \models \beta \Leftrightarrow \models \alpha \rightarrow \beta$ Értékes

(nulladrendben tautológia)

$$\alpha \models \beta \Leftrightarrow \models \alpha \vee \neg \beta \text{ Kontradikció}$$

Út a PROLOG-hoz

PROgramming in **LOG**ic rövidítése. Elsőrendű, lineáris input rezolúcióval működik. Csak HORN-klózkodra teljes.

Horn-klóz: legfeljebb egy nem negált literált tartalmaz: $\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee Z$, ami ekképpen is írható: $(\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \vee Z = \neg(P \wedge Q \wedge R) \vee Z = (P \wedge Q \wedge R) \rightarrow Z$. Vagyis, a Prolog program nem más, mint ha...akkor szabályok gyűjteménye. P, Q, R, Z elsőrendű predikátumok (itt az argumentumok az egyszerűség kedvéért nincsenek jelölve. Akárhány argumentum lehet.) Ezek a szabályok alkotják a programot. A tények (vagyis, hogy a szabályok feltétel része mikor igaz) is a program alkotórészei, ezek az igaz predikátumok felsorolásai.

A Prolog nyelvhez tartozik egy motor, következtető gép, amely a rezolúciót végrehajtja. Az elsőrendű rezolúció lényegében az alábbi szabályok alapján történik.

Az elsőrendű rezolúció alapjai

A Skólem normálformát feltételezve, prenex elhagyható, csak megjegyezzük, hogy valóban, minden változó univerzálisan kvantált volt. Tehát a maradék részre, az ún. a mátrixra lehet alkalmazni a rezolúciót. Azonban még két probléma áll elő, amely nulladrendben nem okozott gondot. Az egyik, hogy mikor rezolválható két literál? Nulladrendben egyértelműen valamely atomot és és tagadását, vagyis a komplement literálpárt tartalmazó klózkod rezolválhatók. Ha pl. $Q(x,y)$ és $\neg Q(f(a),z)$ alakú literálok szerepelnek - vagyis az argumentumok nem azonosak-vajon helyes-e, ha pl. a $P(x) \vee Q(x,y)$ és az $R(w) \vee \neg Q(f(a),z)$ klózkod rezolváltjának a $P(x) \vee R(w)$ klózt tekintjük?

$$\begin{array}{l} P(x) \vee Q(x,y) \\ R(w) \vee \neg Q(f(a),z) \end{array} \quad \rightarrow \quad P(x) \vee R(w)$$

Igen, ugyanis a változók univerzálisan kvantáltak, ezért a formula minden helyettesítésre igaz kell hogy legyen, például a helyettesítésre is.

$$\begin{array}{l} P(x) \vee Q(f(a),z) \\ R(w) \vee \neg Q(f(a),z) \end{array} \quad \rightarrow \quad P(x) \vee R(w)$$

Igy az alkalmazhatóság sikere az ún. **egységesítő helyettesítésen** múlik. Anélkül, hogy részletekbe bocsájtkoznánk, a fő elveket és néhány példát mutatunk.

EGYSÉGESÍTŐ HELYETTESÍTÉS

Feltételek:

1. Minden ember halandó.

2. Szókratész ember.

Következmény: 3. Szókratész halandó.

Formalizálva:

$\forall x(\text{Ember}(x) \rightarrow \text{Halandó}(x))$

$\text{Ember}(\text{Szókratész})$

$\text{Halandó}(\text{Szókratész})$

(Szókratész (görög filozófus, pedagógus, ie. 469-399, apolitikus filozófus, mégis börtönbe juttatták, ott halt meg. Jóra törekvés...))

Az 1. mondatnak megfelelő formula az univerzum minden elemére igaz kell legyen. Az univerzum itt legyen az összes valaha élt, jelenleg élő (jövőben élő) emberek halmaza. Ennek egy eleme

Szókratész. X-be Szókratészt helyettesítva NULLADRENDŰ állításokat kapunk:
Ember(Szókratész), Halandó(Szókratész), a nulladrendű modus ponens alkalmazható:

Ember(Szókratész)

Ember(Szókratész) $\rightarrow$ Halandó(Szókratész)

Halandó(Szókratész)

Ennek a nyelvenk a típusa (P, Q;-) (1,1;-), U= emberek halmaza

HELYETTESÍTÉS:

A változó/term rendezett párokat tartalmazó $\alpha = \{v_1/t_1, \dots, v_n/t_n\}$ halmazt helyettesítésnek nevezzük, ha $v_1, \dots, v_n$ egymástól különböző változókat jelölnek, és $t_i \neq v_i$ ($1 \leq i \leq n$).

Példák helyettesítésre:

- $A = P(x, f(x), y)$ $\alpha = \{x/y, y/f(y)\}$ $A\alpha = P(y, f(y), f(y))$

- $A = P(x, f(x), y)$ $\beta = \{x/b, y/h(c)\}$ $A\beta = P(b, f(b), h(c))$

Legáltalánosabb egységesítő helyettesítésnek nevezzük az $A_1, A_2, \dots, A_n$ kifejezéseknek egy δ **egységesítő helyettesítését**, ha bármely α egységesítő helyettesítés előállítható $\alpha = \alpha' \delta$ formában. (α' egy alkalmas helyettesítés)

Bonyolultabb nyelvnél, különösen azoknál, amelyek függvényt is tartalmaznak, nehéz megtalálni az alkalmas helyettesítést, ez meg is haladja e tárgy (időbeli :) kereteit, csak utalunk a főbb szabályokra.

(Legáltalánosabb) egységesítő helyettesítés alapelvei:

Változóba szabad konstanst vagy másik változót helyettesíteni.

Változóba szabad olyan függvényt is helyettesíteni, amelynek argumentumában más változó, vagy konstansok szerepelnek. (függvénybe is, a termék képzésének szabályai szerint helyettesíthetők változók, illetve konstansok, illetve újabb függvények.)

Példák egységesítő helyettesítésre:

1. Tegyük fel, hogy a rezolválandó pár:

$P(a, x, h(g(z)))$ és $\neg P(z, h(y), h(y))$.

Hasonlítsuk össze a P argumentumában szereplő termeket balról jobbra, és álljunk meg azon a pozíción, ahol eltérést tapasztalunk :

$(a, x, h(g(z)))$

$(z, h(y), h(y))$

Az első ilyen: a és z. Így a z változóba az a konstans behelyettesíthető. A z változó mindegyik előfordulásába be kell helyettesíteni, ezért a kapott literálok:

$P(a, x, h(g(a)))$ és $\neg P(a, h(y), h(y))$.

Most a következő szimbólumokat, x-et és h(y)-t összehasonlítva azt találjuk, hogy x-be h(y) beírható. Ennek oka, hogy a h(y) az y univerzumbeli elemhez hozzárendelt másik univerzumbeli

elem. Mivel x végigfut az összes elemen (minden változó univerzálisan kvantált!), speciel ezt a $h(y)$ elemet is felveszi. Ezért ez x -be beírható. A kapott literálok:

$P(a, h(y), h(g(a)))$ és $\neg P(a, h(y), h(y))$.

Az utolsó helyeken álló szimbólumok: $h(g(a))$ és $h(y)$. Az előbbi gondolatmenetet most $g(a)$ -ra és y -ra alkalmazva, érthető, hogy az univerzálisan kvantált y változóba a $g(a)$ behelyettesíthető. Itt is minden előfordulásába az y változónak be kell írni a $g(a)$ konstans, így a következőt kapjuk:

$P(a, h(g(a)), h(g(a)))$ és $\neg P(a, h(g(a)), h(g(a)))$. Így valóban ellentett literálpárt kaptunk, amiken a rezolúció elvégezhető.

2. Tegyük fel, hogy a rezolvens pár:

$P(f(a), g(x))$ és $\neg P(y, y)$.

Hasonlítsuk össze a P argumentumában szereplő első termeket: $f(a)$ és y . Az elsőbe semmit sem lehet helyettesíteni, hiszen a konstans, f függvényszimbólum. De y változó, ezért az $y \leftarrow f(a)$ helyettesítés elvégezhető.

Az így kapott literálok: $P(f(a), g(x))$, $\neg P(f(a), f(a))$. Továbbhaladva a második argumentumokat hasonlítjuk: $g(x)$ és $f(a)$. Mivel g és f különböző szimbólumok, ugyan az x -be behelyettesíthető az $f(a)$, de g sosem lesz ugyanolyan alakú, mint f , hiszen más a nevük. Ez a két literál **NEM EGYSÉGESÍTHETŐ!**

3. Tegyük fel, hogy a rezolvens pár:

$P(f(g(x, A)), x)$ és $\neg P(z, B)$

Megpróbáljuk őket egységesíteni. Kezdjük balról az első argumentummal. Itt a 2.-ban egy változó szerepel, ebbe behelyettesíthetjük az 1.-ben szereplő függvényt:

$z \leftarrow f(g(x, A))$

A második argumentumban a 1.-ben szerepel változó, ennek a helyére behelyettesíthetjük a 2.-ban lévő konstans:

$x \leftarrow B$

Természetesen ezt a változó összes előfordulási helyén meg kell tenni, a többi argumentumban is:

$f(g(B, A))$

Így a helyettesítés: $w = \{ x \leftarrow B, z \leftarrow f(g(B, A)) \}$

A két atom egységesítése pedig: $P(f(g(B, A)), B)$

REZOLÚCIÓ ELSŐRENDENBEN

A formulát és a következmény tagadását Skólem normálformára alakítjuk. Praktikus, ha az univerzális kvantorokat elhagyjuk, és a konjunkciós jeleket is (ahogyan nulladrendben is), és csak a klózalmazt írjuk le.

Nevezzük át a változókat úgy, hogy a változónevek különbözőek legyenek a klózokban – ez megkönnyíti a helyettesítést (elvi oka is van, melyre itt nem térünk ki)

A rezolúció tehát csak akkor alkalmazható, ha az egységesítés elvégezhető. Ekkor pedig rezolúció alapelvét adó következtetési sémát alkalmazzuk:

$$\begin{array}{l} P(_, \dots) \vee Q(_, _, \dots, _) \\ R(_, \dots) \vee \neg Q(_, _, \dots, _) \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(_, \dots) \vee R(_, \dots)$$

Példa (Fekete és társai: Mesterséges intelligencia c. könyvből):

A1: Van olyan páciens, aki minden doktorban megbízik

A2: A kuruzslókban egyetlen páciens sem bíz meg.

Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy az A1 és A2 állításoknak logikai következménye a
B : Egyetlen doktor sem kuruzsló.

F1: $\exists x \{P(x) \wedge \forall y [D(y) \rightarrow M(x,y)]\}$

F2: $\forall x \{P(x) \rightarrow \forall y [K(y) \rightarrow \neg M(x, y)]\}$

F3: $\forall x [D(x) \rightarrow \neg K(x)]$

F3 negáltja: $\neg \forall x [D(x) \rightarrow \neg K(x)]$

klóz forma:

K1: $P(a)$

K2: $\neg D(y) \vee M(a, y)$

K3: $\neg P(x) \vee \neg K(z) \vee \neg M(x, z)$

K4: $D(b)$

K5: $K(b)$

Rezolúció:

K6: K1 és K3: $\neg K(u) \vee \neg M(a,u) \quad \{x|a\}$

K7: K2 és K4: $M(a, b) \quad \{y|b\}$

K8: K6 és K7: $\neg K(b) \quad \{u|b\}$

K9: K5 és K8: NIL

Példa klóz alakra hozásra:

$$\forall x (P(x) \rightarrow \{ \forall y [P(y) \rightarrow P(f(x,y))] \wedge \neg \forall y [Q(x,y) \rightarrow P(y)] \})$$

$$\forall x (\neg P(x) \vee \{ \forall y [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \exists y \neg [\neg Q(x,y) \vee P(y)] \})$$

$$\forall x (\neg P(x) \vee \{ \forall y [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \exists y \neg [\neg Q(x,y) \vee P(y)] \})$$

Skólemizálás:

$$\forall x (\neg P(x) \vee \{ \forall y [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg [\neg Q(x,g(x)) \vee P(g(x))] \})$$

Kvantorkiemelés:

$$\forall x (\neg P(x) \vee \{ \forall y [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg [\neg Q(x,g(x)) \vee P(g(x))] \})$$

$$\forall x \forall y (\neg P(x) \vee \{ [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg [\neg Q(x,g(x)) \vee P(g(x))] \})$$

Disztributivitás:

$$\forall x \forall y (\neg P(x) \vee \{ [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg [\neg Q(x,g(x)) \vee P(g(x))] \})$$

$$\forall x \forall y \{ \neg P(x) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \} \wedge \{ \neg P(x) \vee \neg [\neg Q(x,g(x)) \vee P(g(x))] \}$$

Disztributivitás még egyszer:

$$\forall x \forall y \{ \neg P(x) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \} \wedge \{ \neg P(x) \vee [Q(x,g(x)) \wedge \neg P(g(x))] \}$$

$$\forall x \forall y \{ \neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y)) \} \wedge \{ \neg P(x) \vee Q(x,g(x)) \} \wedge \{ \neg P(x) \vee \neg P(g(x)) \}$$

Klóz alakra írva:

$$\forall x \forall y \{ \neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y)) \} \wedge \{ \neg P(x) \vee Q(x,g(x)) \} \wedge \{ \neg P(x) \vee \neg P(g(x)) \}$$

$$c1: \neg P(x) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x,y))]$$

$$c2: \neg P(x) \vee Q(x,g(x))$$

$$c3: \{ \neg P(x) \vee \neg P(g(x)) \}$$

A rezolúcióhoz az azonos nevű individuum változókat átnevezzük:

$$c1: \neg P(x1) \vee [\neg P(y) \vee P(f(x1,y))]$$

$$c2: \neg P(x2) \vee Q(x2,g(x2))$$

$$c3: \{ \neg P(x3) \vee \neg P(g(x3)) \}$$

Példa formalizálásra és Skólem normálformára hozásra:

A nagy házakat nehéz rendben tartani, ha csak nincs bejárónő, és kertje sincs a háznak.

$$\forall h ((\text{Nagy}(h) \wedge \text{Ház}(h) \Rightarrow \text{Munkás}(h)) \vee (\exists b \text{Takarítja}(b,h) \wedge \neg \exists k \text{Kert}(k,h)))$$

1. Az implikáció kiküszöbölése

$$\forall h ((\neg(\text{Nagy}(h) \wedge \text{Ház}(h)) \vee \text{Munkás}(h)) \vee ((\exists b \text{Takarítja}(b,h) \wedge \neg \exists k \text{Kert}(k,h))))$$

2. De Morgan

$$\forall h ((\neg(\text{Nagy}(h) \wedge \text{Ház}(h)) \vee \text{Munkás}(h)) \vee ((\exists b \text{Takarítja}(b,h) \wedge \neg \exists k \text{Kert}(k,h))))$$

$$\forall h ((\neg \text{Nagy}(h) \vee \neg \text{Ház}(h) \vee \text{munkás}(h)) \vee ((\exists b \text{Takarítja}(b,h) \wedge \forall k \neg \text{Kert}(k,h))))$$

Változók átnevezése nem kell, mert mindegyik más betűvel van jelölve.

3. Egzisztenciális kvantor kiküszöbölése skólemizációval:

$$\forall h ((\neg \text{Nagy}(h) \vee \neg \text{Ház}(h) \vee \text{munkás}(h)) \vee ((\text{Takarítja}(t(h),h) \wedge \forall k \neg \text{Kert}(k,h))))$$

4. Kvantorok kiemelése

$$\forall k \forall h (\neg \text{Nagy}(h) \vee \neg \text{Ház}(h) \vee \text{Munkás}(h)) \vee ((\text{Takarítja}(t(h),h) \wedge \neg \text{Kert}(k,h))))$$

3. A kvantorokat így már nem kell leírni, csak emlékezni, hogy mindegyik univerzálisan volt kvantálva:

$$(\neg \text{Nagy}(h) \vee \neg \text{Ház}(h) \vee \text{Munkás}(h)) \vee ((\text{Takarítja}(t(h),h) \wedge \neg \text{Kert}(k,h))))$$

4. Disztributív szabály, hogy KNF legyen:

$$(\neg \text{Nagy}(h) \vee \neg \text{Ház}(h) \vee \text{Munkás}(h)) \vee ((\text{Takarítja}(t(h),h) \wedge \neg \text{Kert}(k,h))))$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$(\neg \text{Nagy}(h) \vee \neg \text{Ház}(h) \vee \text{Munkás}(h) \vee \text{Takarítja}(t(h),h))$$

$$\wedge ((\neg \text{Nagy}(h) \vee \neg \text{Ház}(h) \vee \text{Munkás}(h) \vee \neg \text{Kert}(k,h))$$

5. A klózok:

$$K1: \neg \text{Nagy}(h) \vee \neg \text{Ház}(h) \vee \text{Munkás}(h) \vee \text{Takarítja}(t(h),h)$$

$$K2: \neg \text{Nagy}(h) \vee \neg \text{Ház}(h) \vee \text{Munkás}(h) \vee \neg \text{Kert}(k,h)$$

Példa formalizálásra, Skólemizálásra és rezolúcióra

Aki valaha is olvasott, az írástudó. A delfinek nem írástudók. Vannak intelligens delfinek. Igaz-e, hogy vannak olyanok, akik intelligensek és nem tudnak olvasni?

$$1. \forall x (O(x) \rightarrow I(x))$$

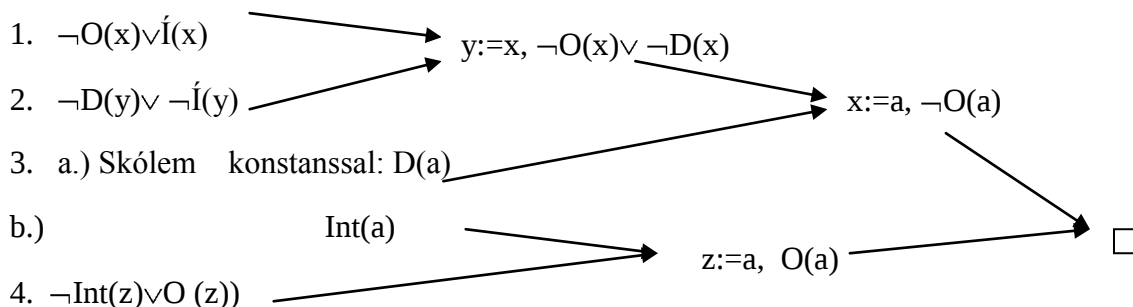
$$2. \forall x (D(x) \rightarrow \neg I(x))$$

$$3. \exists x (D(x) \wedge \text{Int}(x))$$

4. A kérdés: $\exists x(\text{Int}(x) \wedge \neg O(x))$, tagadása: $\neg \exists x (\text{Int}(x) \wedge \neg O(x)) = \forall x \neg (\text{Int}(x) \wedge \neg O(x)) =$

$\forall x \neg \text{Int}(x) \wedge O(x)$

Klóz alakban (kvantorokat elhagytuk):



Példa formalizálásra, Skólemizálásra és rezolúcióra

Kockavilág (robotika/MI kedvenc bevezető feladata)

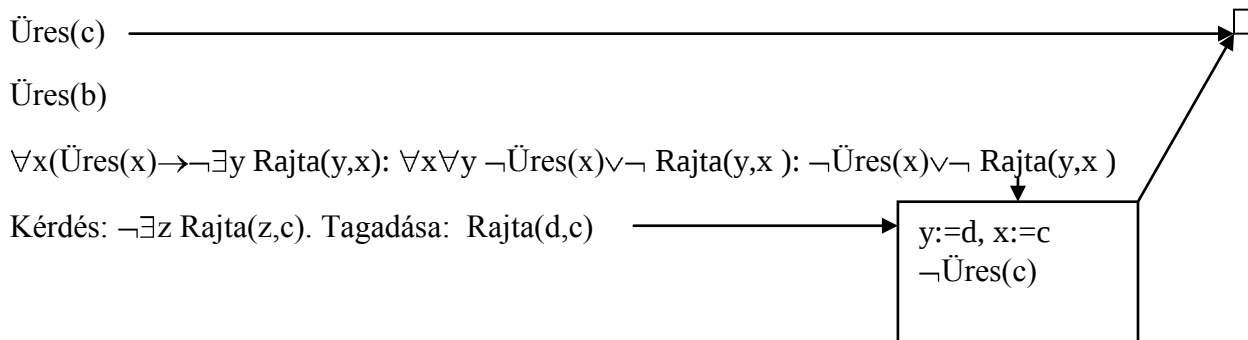
A c kocka az a kockán van. Az a kocka az asztalon van. A b kocka az asztalon van. A c kocka üres. A b kocka üres. Ha a kocka üres, akkor nincsen rajta másik kocka. A kérdés, igaz-e, hogy a c kockán nincsen másik kocka?

Formalizálás:

Rajta(c, a)

Asztalon (a)

Asztalon (b)



Példa formalizálásra, Skólemizálásra és rezolúcióra

Akik állatot esznek, azok húsevők. A bárány állat. A farkas megeszi a bárányt. Húsevő-e a farkas?

Állat(bárány)

Megoldás: Formalizálás: *Megeszi(farkas, bárány)*

Megeszi(x, y) ∧ Állat(y) ⇒ Húsevő(x)

Kérdés: *Húsevő(farkas)?*

1.

$Megeszi(x, y) \wedge \text{Állat}(y) \Rightarrow \text{Húsevő}(x)$ klóz formára hozása:

$$\neg(Megeszi(x, y) \wedge \text{Állat}(y)) \vee \text{Húsevő}(x)$$

$$\neg Megesi(x, y) \vee \neg \text{Állat}(y) \vee \text{Húsevő}(x)$$

2. Célállítás tagadása: $\neg \text{Húsevő}(\text{farkas})$

3. Rezolúció menete:

$\text{Állat}(\text{bárány})$

$Megeszi(\text{farkas}, \text{bárány})$

$$\begin{array}{l} \neg \text{Húsevő}(\text{farkas}) \\ \neg Megesi(x, y) \vee \neg \text{Állat}(y) \vee \text{Húsevő}(x) \end{array} \quad \begin{array}{l} \neg Megesi(\text{farkas}, y) \vee \neg \text{Állat}(y) \\ x \leftarrow \text{farkas} \end{array}$$

Hozzávéve a rezolvenst a klózhalmazhoz (hiszen MINDEN x -re, így erre az $x = \text{farkas}$ -értékre IS igaznak kell lennie):

$$\begin{array}{l} \text{Állat}(\text{bárány}) \\ Megesi(\text{farkas}, \text{bárány}) \\ \neg \text{Húsevő}(\text{farkas}) \\ \neg Megesi(x, y) \vee \neg \text{Állat}(y) \vee \text{Húsevő}(x) \\ \neg Megesi(\text{farkas}, y) \vee \neg \text{Állat}(y) \end{array} \quad \begin{array}{l} \neg Megesi(\text{farkas}, \text{bárány}) \\ y \leftarrow \text{bárány} \end{array}$$

Hozzávéve a rezolvenst a klózhalmazhoz :

$$\begin{array}{l} \text{Állat}(\text{bárány}) \\ Megesi(\text{farkas}, \text{bárány}) \\ \neg \text{Húsevő}(\text{farkas}) \\ \neg Megesi(x, y) \vee \neg \text{Állat}(y) \vee \text{Húsevő}(x) \\ \neg Megesi(\text{farkas}, y) \vee \neg \text{Állat}(y) \\ \neg Megesi(\text{farkas}, \text{bárány}) \end{array} \quad \text{NIL}$$

Tehát valóban, a $Megeszi(\text{farkas}, \text{bárány})$ logikai következménye a kiindulási klózhalmaznak.

Példa formalizálásra, Skólemizálásra és rezolúcióra

Jánosnak van egy kutyája. Minden kutyatulajdonos állatimádó. Egy állatimádó nem öl állatot. Az Ebi nevű macskát vagy János, vagy Bodri ölte meg.

Kérdés: Bodri ölte meg a macskát?

Az ismert mondatok és néhány háttérinformáció elsőrendű formalizmussal:

$$\begin{aligned} &\exists x \text{Kutya}(x) \wedge \text{Birtokol}(\text{János}, x) \\ &\forall x (\exists y \text{Kutya}(y) \wedge \text{Birtokol}(x, y)) \Rightarrow \text{Állatimáddá}(x) \\ &\forall x \text{Állatimáddá}(x) \wedge \forall y \text{Állat}(y) \Rightarrow \neg \text{Megöl}(x, y) \\ &\text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi}) \vee \text{Megöl}(\text{Bodri}, \text{Ebi}) \\ &\text{Macska}(\text{Ebi}) \\ &\forall x \text{Macska}(x) \Rightarrow \text{Állat}(x) \end{aligned}$$

A mondatokat konjunktív normálformára alakítjuk, és hozzávesszük a kérdés negáltját:

1. $\text{Kutya}(D)$
2. $\text{Birtokol}(\text{János}, D)$
3. $\neg \text{Kutya}(y) \vee \neg \text{Birtokol}(x, y) \vee \text{Állatimáddá}(x)$
4. $\neg \text{Állatimáddá}(x) \vee \neg \text{Állat}(y) \vee \neg \text{Megöl}(x, y)$
5. $\text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi}) \vee \text{Megöl}(\text{Bodri}, \text{Ebi})$
6. $\text{Macska}(\text{Ebi})$
7. $\neg \text{Macska}(x) \vee \text{Állat}(x)$
8. $\neg \text{Megöl}(\text{Bodri}, \text{Ebi})$

És alkalmazva a rezolúciót - másképpen leírva, mint előbb:

9. $(7 - \{x : \text{Ebi}\}). \neg \text{Macska}(\text{Ebi}) \vee \text{Állat}(\text{Ebi})$
10. $(9 - 6). \text{Állat}(\text{Ebi})$
11. $(3 - \{x : \text{János}, y : D\}). \neg \text{Kutya}(D) \vee \neg \text{Birtokol}(\text{János}, D) \vee \text{Állatimáddá}(\text{János})$
12. $(11 - 2 - 1). \text{Állatimáddá}(\text{János})$
13. $(4 - \{x : \text{János}, y : \text{Ebi}\}). \neg \text{Állatimáddá}(\text{János}) \vee \neg \text{Állat}(\text{Ebi}) \vee \neg \text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi})$
14. $(13 - 12 - 10). \neg \text{Megöl}(\text{János}, \text{Ebi})$
15. $(14 - 5). \text{Megöl}(\text{Bodri}, \text{Ebi})$
16. $(15 - 8). \text{ellentmondás}$

Példa formalizálásra, Skólemizálásra és rezolúcióra

Tamás, Sándor és Eszter az Alpesi Klub tagjai. Minden klubtag vagy síelő, vagy hegymászó, vagy mindkettő. A hegymászók nem szeretik az esőt, a síelők viszont szeretik a havat. Eszter mindent szeret, amit Tamás nem szeret, és semmit sem szeret, amit Tamás szeret. Tamás szereti az esőt és a havat.

Kérdés: Van olyan klubtag, aki hegymászó, de nem síelő?

Megjegyzés: ez esetben az univerzum magában foglalja a klubtagokat és a természeti jelenségeket, de a helyettesítéseknél érdemes az értelmes kombinációkra törekedni.

A tudásbázis formálisan, és a kérdés negáltja:

$\forall x \text{ Síel}(x) \vee \text{Mászik}(x)$
 $\neg \exists x \text{Mászik}(x) \wedge \text{Szereti}(x, \text{Eső})$
 $\forall x \text{ Síel}(x) \Rightarrow \text{Szereti}(x, \text{Hó})$
 $\forall x \text{ Szereti}(\text{Eszter}, x) \Rightarrow \neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, x)$
 $\forall x \neg \text{Szereti}(\text{Eszter}, x) \Rightarrow \text{Szereti}(\text{Tamás}, x)$
 $\text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Eső})$
 $\text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó})$
 $\neg \exists x \text{ Síel}(x) \wedge \text{Mászik}(x)$

A normálformájú mondatok:

1. $\text{Síel}(x) \vee \text{Mászik}(x)$
2. $\neg \text{Mászik}(x) \vee \neg \text{Szereti}(x, \text{Eső})$
3. $\neg \text{Síel}(x) \vee \text{Szereti}(x, \text{Hó})$
4. $\neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, x) \vee \neg \text{Szereti}(\text{Eszter}, x)$
5. $\text{Szereti}(\text{Tamás}, x) \vee \text{Szereti}(\text{Eszter}, x)$
6. $\text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Eső})$
7. $\text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó})$
8. $\neg \text{Mászik}(x) \vee \text{Síel}(x)$

A rezolvens mondatok:

- 9(1–8). $\text{Síel}(x)$
- 10(9–3). $\text{Szereti}(x, \text{Hó})$
- 11(10– $\{x : \text{Eszter}\}$). $\text{Szereti}(\text{Eszter}, \text{Hó})$
- 12(4– $\{x : \text{Hó}\}$). $\neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó}) \vee \neg \text{Szereti}(\text{Eszter}, \text{Hó})$
- 13(12–11). $\neg \text{Szereti}(\text{Tamás}, \text{Hó})$
- 14(13–7). *ellentmondás*

A rezolúció nem csak arra alkalmas, hogy eldöntendő kérdésekre válaszoljunk vele, hanem megadhatjuk a kérdést kielégítő konstansok halmazát is. Ehhez most formalizáljuk a következő mondatot is: Minden klubtag vagy síelő, vagy hegymászó, vagy mindkettő.

15. $\neg M\acute{a}szik(x) \vee S\acute{i}el(x) \vee (M\acute{a}szik(x) \wedge \neg S\acute{i}el(x))$
16(15 – 1). $S\acute{i}el(x) \vee (M\acute{a}szik(x) \wedge \neg S\acute{i}el(x))$
17(16 – 3). $Szereti(x, H\acute{o}) \vee (M\acute{a}szik(x) \wedge \neg S\acute{i}el(x))$
18(17 – $\{x : Eszter\}$). $Szereti(Eszter, H\acute{o}) \vee (M\acute{a}szik(Eszter) \wedge \neg S\acute{i}el(Eszter))$
19(4 – $\{x : H\acute{o}\}$). $\neg Szereti(Tam\acute{a}s, H\acute{o}) \vee \neg Szereti(Eszter, H\acute{o})$
20(18 – 19). $\neg Szereti(Tam\acute{a}s, H\acute{o}) \vee (M\acute{a}szik(Eszter) \wedge \neg S\acute{i}el(Eszter))$
21(20 – 7). $M\acute{a}szik(Eszter) \wedge \neg S\acute{i}el(Eszter)$

Megkaptuk, hogy Eszter biztosan válasz a kérdésre. A 18. mondat megalkotásakor végig lehet próbálni a tudásbázisban szereplő összes konstans, de a többinél nem jutunk használható eredményre. A választhalmaz tehát Eszter.

