Függvények növekedése

Elmélet:

<u>Definíció:</u> legyen f, g két függvény, amelyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy f(x) = O(g(x)) (f(x) nagy-Ordó g(x)), ha létezik olyan C,k pozitív konstans, amelyekre:

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)| \quad \forall\, x > k$$

Ekkor azt mondjuk, hogy g(x) aszimptotikus felső korlátja f(x) - nek.

<u>Definíció:</u> legyen f, g két függvény, amelyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy f(x) = Ω(g(x)) (f(x) nagy-Omega g(x)), ha létezik olyan C,k pozitív konstans, amelyekre:

$$|f(x)| \geq C \cdot |g(x)| \quad \forall\, x > k$$

Ekkor azt mondjuk, hogy f(x) aszimptotikus felső korlátja C·g(x) - nek.

<u>Megjegyzés:</u>
A nagy- O és nagy- Ω között szoros kapcsolat áll fenn:
f(x) = O(g(x)) ↔ g(x) = Ω(f(x))

<u>Definíció:</u> legyen f, g két függvény, amelyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós vagy az egész számok halmazába. Azt mondjuk, hogy f(x) = Θ(g(x)) (f(x) nagy-Theta g(x)), ha f(x) = Ω(g(x)) és f(x) = O(g(x).

<u>Megjegyzés:</u>
f(x) = Θ(g(x), ekkor g(x) = Θ(f(x))

Feladatok

1. Legyen $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = x^2$. Mutassuk meg, hogy $f(x) = O(g(x)$.

Mo.:

Ahhoz, hogy belássuk $f(x) = O(g(x))$, találnunk kell két konstanst (C, k), melyekre teljesül az $|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$ egyenlőtlenség.

$0 \leq x^2 + 2x + 1 \leq x^2 + 2\,x^2 + x^2 = 4x^2 \quad \forall x > 1$

$C = 4$

$k = 1$

2. $f(x) = 7x^2$, $g(x) = x^3$. Mutassuk meg, hogy $f(x) = O(g(x)$.

Mo.:

$7x^2 \leq x^3\ \forall x > 7$

$C = 1$

$k = 7$

3. Adjunk nagy- O becslést a faktoriális függvényre és annak logaritmusára. ($f(n) = n!$)

Mo.:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n \rightarrow n! = O(n^n)$

Tekintsük az egyenlőtlenség mindkét oldalának logaritmusát, ekkor:

$\log(n!) \leq \log(n^n) = n \cdot \log(n) \rightarrow \log(n!) = O(n \cdot \log(n))$

Milyen C, k esetén igazaak a fentiek?

4. $f(x) = 8x^3 + 5x^2 + 7$, $g(x) = x^3$. Mutassuk meg, hogy $f(x) = \Omega(g(x))$.

Mo.: $f(x) = 8x^3 + 5x^2 + 7 \geq 8x^3\ \forall x > 0$

$C = 8$

$k = 0$

5. Mutassuk meg, hogy $f(x) = O(g(x))$, ahol $f(x) = (x^2+1)/(x+1)$, $g(x) = x$.

Mo.: $f(x) = (x^2+1)/(x+1) = (x^2+1-1+1)/(x+1) = [(x-1) \cdot (x+1) + 2]/\,(x+1) = x - 1 + 2/(x+1) < x \quad \forall x>1$

$C = 1$

$k = 1$

6. Legyen $f(x) = x^2 + 4x + 17$, $g(x) = x^3$. Mutassuk meg, hogy $f(x) = O(g(x))$, de $g(x) \neq O(f(x))$

$f(x) = x^2 + 4x + 17 \leq 3 \cdot x^3 \quad \forall x > 17 \rightarrow f(x) = O(g(x))$, $C = 3$, $k = 17$

Tfh.: $g(x) = O(f(x))$, ekkor $x^3 \leq C(x^2 + 4x + 17) \leq 3 \cdot C x^2$ valamely pozitív C konstans mellett, elegendően nagy x esetén. Ebből az következik, hogy $C > x$ elegendően nagy x esetén, ami pedig ellentmondás.

7. Mutassuk meg, hogy $f(x) = \Theta(g(x))$, ahol $f(x) = x + {}^1/_2$, $g(x) = x$.

Mo.:
$g(x) = O(f(x))$ rögtön látható
$f(x) = x + {}^1/_2 \leq x + {}^1/_2\, x = {}^3/_2\, x \rightarrow f(x) = O(g(x))$ $C = {}^3/_2$, $k = 1$
azaz $f(x) = \Theta(g(x))$

8. $f(x) = 3x^2 + 8 \cdot x \cdot \log(x)$, $g(x) = x^2$. Mutassuk meg, hogy $f(x) = \Theta(g(x))$.

Mo.:
$8 \cdot x \cdot \log(x) \leq 8x^2 \rightarrow 3x^2 + 8 \cdot x \cdot \log(x) \leq 11\, x^2 \quad \forall x \geq 1 \quad \rightarrow \quad f(x) = O(g(x))$
$x^2 \leq 3x^2 + 8 \cdot x \cdot \log(x) \quad \rightarrow \quad g(x) = O(f(x))$
azaz $f(x) = \Theta(g(x))$

9. $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$, $g(x) = \log_2(x)$. Mutassuk meg, hogy $f(x) = \Theta(g(x))$.

Mo.:
$g(x) = O(f(x))$ rögtön látható.
$f(x) = \log_2(x^2 + 1) \leq \log_2(x^2 + x^2) = \log_2(2) + \log_2(x^2) = 1 + 2 \cdot \log_2(x) \leq \log_2(x) + 2 \cdot \log_2(x) =$
$= 3 \cdot \log_2(x) \quad \rightarrow \quad f(x) = O(g(x))$ $k = 2$, $C = 3$
azaz $f(x) = \Theta(g(x))$

Források:
Kenneth H. Rosen Discrete Mathematics and Its Application