

Síkba rajzolható gráfok

Elmélet

Definíció: egy G gráfot síkba rajzolható gráfnak nevezünk, ha az felrajzolható a síkra anélkül, hogy az élei metsszék egymást. Egy ilyen felrajzolását a G gráf síkbeli reprezentációjának is nevezzük.

(Ahhoz, hogy belássuk, egy G gráf síkba rajzolható, elegendő síkba rajzolni az élek keresztezése nélkül. Persze nem minden gráf síkba rajzolható, Kuratowski tétele mondja ki, hogy melyek ezek a gráfok)

Euler sík gráfokra vonatkozó tétele:

Legyen $G = G(V, E)$ egyszerű, összefüggő síkba rajzolható gráf, amelynek e db éle, v db szöge van és a síkbeli reprezentációja a gráfnak a síkot r db tartományra osztja (beleértve a végtelen nagyságú területet is). Ekkor

$$r = e - v + 2$$

A tétel következményei:

1. Ha az összefüggő, egyszerű síkba rajzolható gráf csúcsainak száma legalább 3, akkor

$$e \leq 3 \cdot v - 6$$

(Ebből következik az, hogy K_5 nem síkba rajzolható gráf.)

2. Ha az összefüggő egyszerű síkba rajzolható gráf csúcsainak a száma legalább 3 és nincs 3 hosszú köre, akkor

$$e \leq 2 \cdot v - 4$$

(Ebből következik az, hogy $K_{3,3}$ nem síkba rajzolható gráf.)

Tétel:

Ha G egyszerű síkba rajzolható gráf, akkor a minimális fokszáma legfeljebb 5 lehet.

Kuratowski tétel:

Egy G gráf akkor és csak akkor nem síkba rajzolható, ha tartalmaz K_5 -tel vagy $K_{3,3}$ -mal homeomorf részgráfot.

Homeomorf:

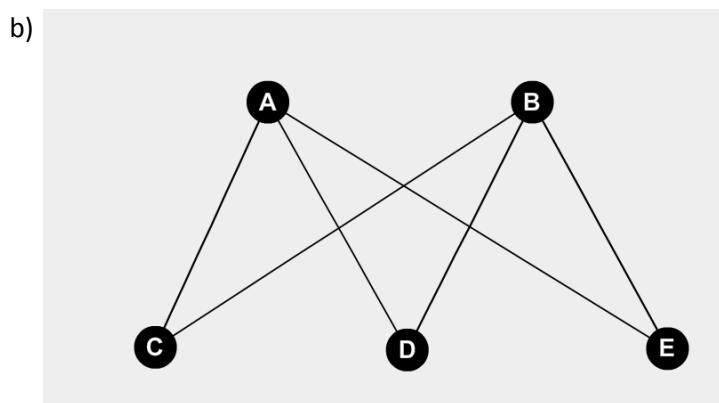
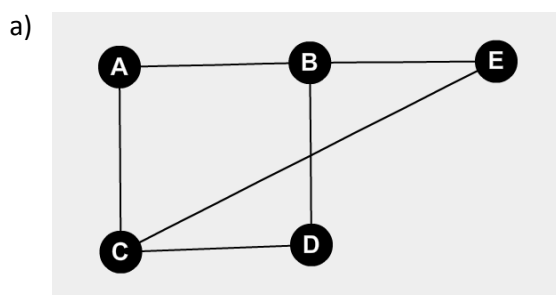
- az élekre beilleszthetünk új pontot
- ha a G gráfnak van olyan részgráfja, amelyben minden csúcspont fokszáma kettő, de nem alkotnak kört, akkor ezeket a pontokat törölhetjük

Fáry-Wagner tétel:

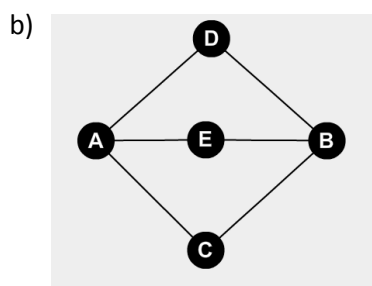
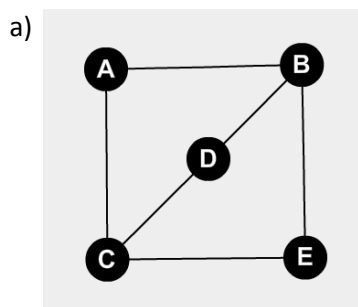
Ha G egyszerű, síkba rajzolható gráf, akkor van olyan rajza, ahol az élek egyenes szakaszok.

Feladatok:

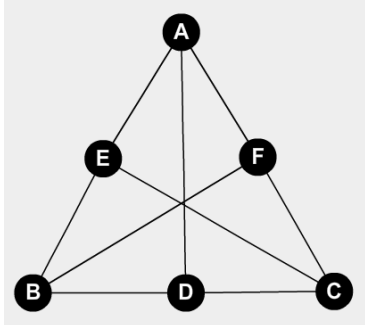
1. Mutassuk meg, hogy az alábbi gráfok síkba rajzolhatók:



Megoldás.:

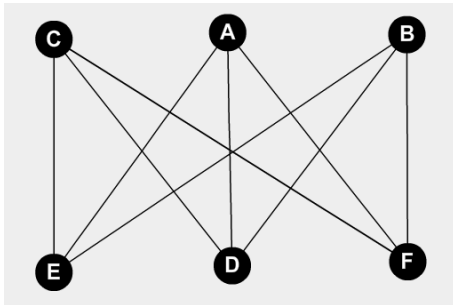


2. Síkba rajzolható-e az alábbi gráf?



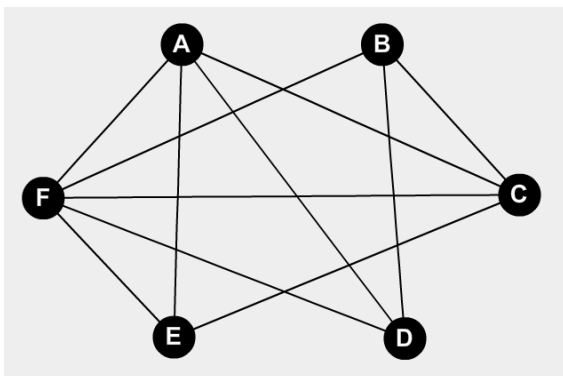
Megoldás.:

A gráf átrajzolható a következő módon:



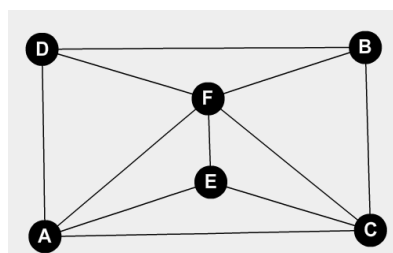
Ez pedig $K_{3,3}$, azaz az eredeti gráfunk izomorf $K_{3,3}$ -mal, azaz nem síkba rajzolható.

3. Síkba rajzolható-e az alábbi gráf?



Megoldás.:

Igen:



4. Legyen G egy egyszerű, összefüggő gráf, amelynek 6 csúcsa van és mindegyik csúcs foka 4. Tudjuk továbbá azt is, hogy G síkba rajzolható. Hány területre osztja a síkot a gráf síkbeli reprezentációja?

Megoldás.:

Minden gráfban a fokok összege az élek számának kétszeresével egyenlő: $6 \cdot 4 = 24 = 2 \cdot 12$.

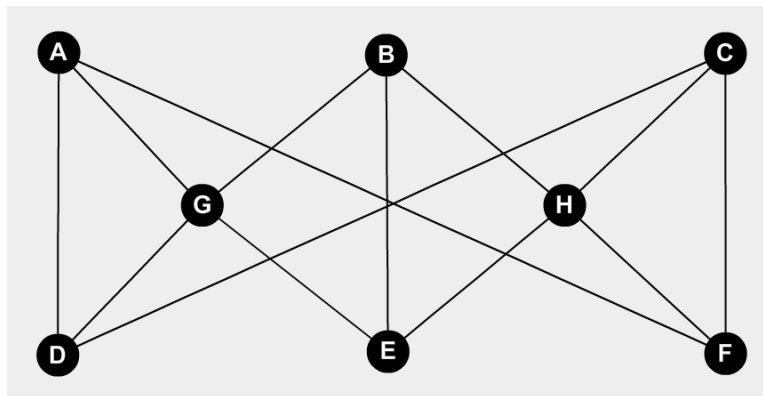
Azaz a gráfnak 12 éle van. Alkalmazzuk az Euler poliéder tételt a tartományok számának meghatározásához: $r = e - v + 2 = 12 - 6 + 2 = 8$ tartomány jön létre.

5. Tegyük fel, hogy egy G egyszerű, összefüggő síkba rajzolható gráfnak 30 éle van. Tudjuk továbbá, hogy a gráf síkbeli reprezentációja a síkot 20 tartományra osztja. Hány csúcsa van ennek a gráfnak?

Megoldás.:

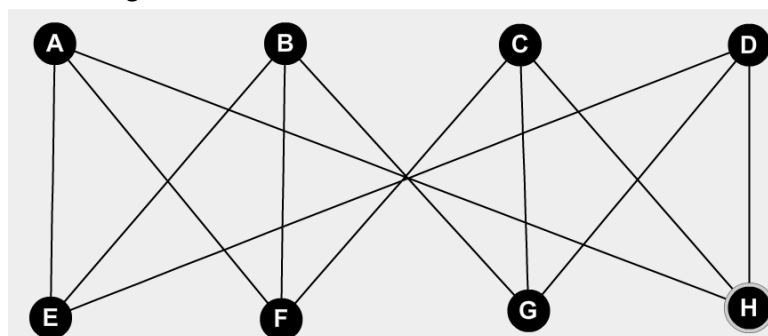
Behelyettesítve az Euler-féle poliéder tételbe: $20 = 30 - v + 2 \rightarrow v = 12$

6. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi gráf homeomorf-e $K_{3,3}$ -mal.



Megoldás.: Nem homeomorf $K_{3,3}$ -mal. A G és H csúcspontok foka 4, ezek nem hagyhatók el a gráfból.

7. Síkba rajzolható-e az alábbi gráf?



Megoldás.:

Az Euler tétel következményeit próbáljuk meg felhasználni.

$$v = 8$$

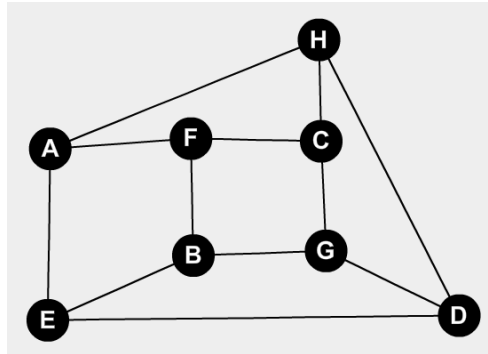
$$e = 12$$

$$e \leq 3 \cdot v - 6 \rightarrow 12 \leq 24 - 6 = 18 \text{ teljesül}$$

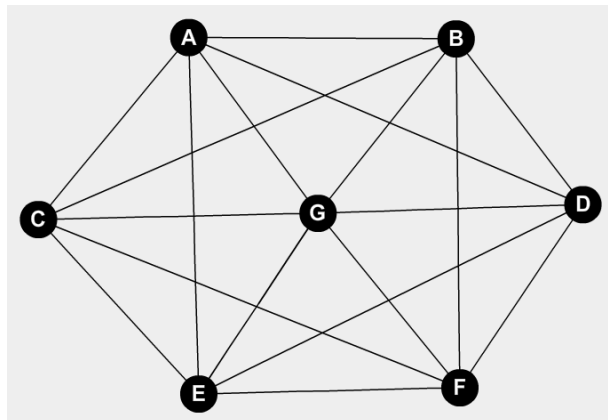
Látható, hogy a gráfunak nincs 3 hosszú köre, tehát alkalmazható az Euler tétel második

$$\text{következménye: } e \leq 2 \cdot v - 4 \rightarrow 12 \leq 16 - 4 = 12 \text{ teljesül}$$

Ahhoz viszont, hogy belássuk, hogy a gráfunk síkra rajzolható, nem elégséges a fenti két feltétel teljesülése. Ezek szükséges, de nem elégséges feltételek. Ehhez meg kell adnunk a gráf síkbeli reprezentációját:



8. Síkba rajzolható-e az alábbi gráf?

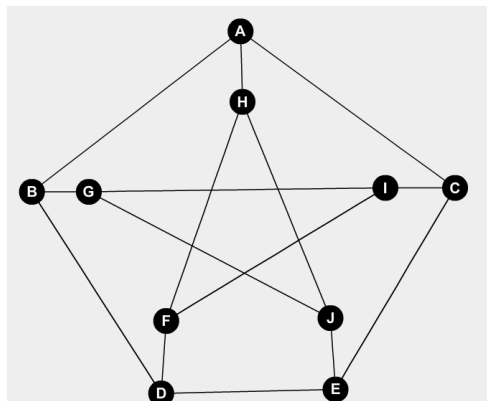


$$v = 7$$

$$e = 18$$

$e \leq 3 \cdot v - 6 \rightarrow 18 \leq 3 \cdot 7 - 6 = 15$ ellentmondásra jutottunk, nem teljesül egy szükséges feltétel, tehát a gráf nem síkba rajzolható

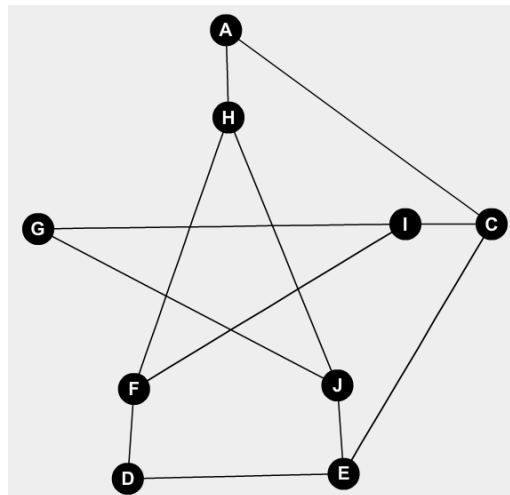
9. Alább az ún. Petersen gráf látható. A Kuratowski tétel segítségével igazoljuk, hogy ez a gráf nem síkba rajzolható.



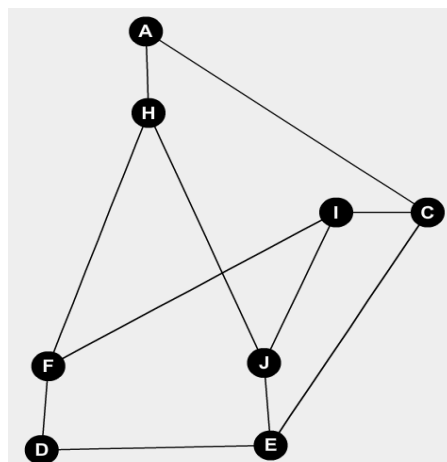
Megoldás.:

Keresnünk kell egy olyan részgráfot, amely K_5 -tel vagy $K_{3,3}$ -mal homeomorf.

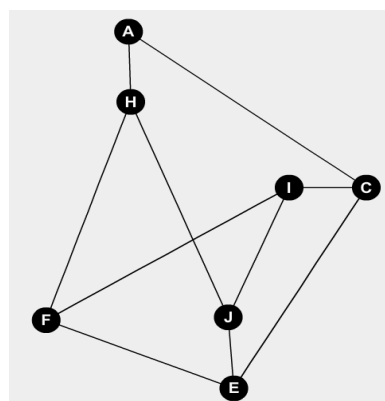
Képezzünk úgy egy részgráfot, hogy elhagyjuk a B csúcsot a rá illeszkedő élekkel együtt:



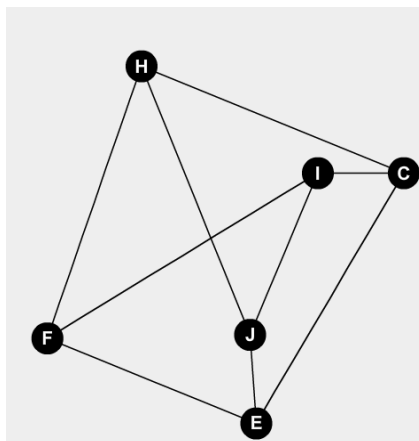
A G csúcsot elhagyva a fentivel homeomorf gráfot kapunk.



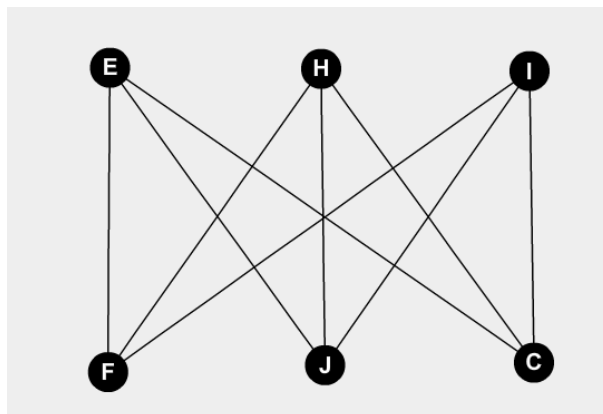
Hagyjuk el a D csúcsot:



Hagyjuk el az A csúcsot:

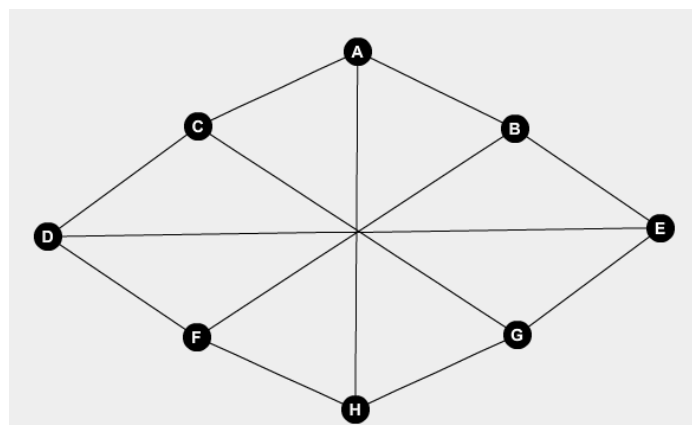


Ez pedig izomorf $K_{3,3}$ -mal:



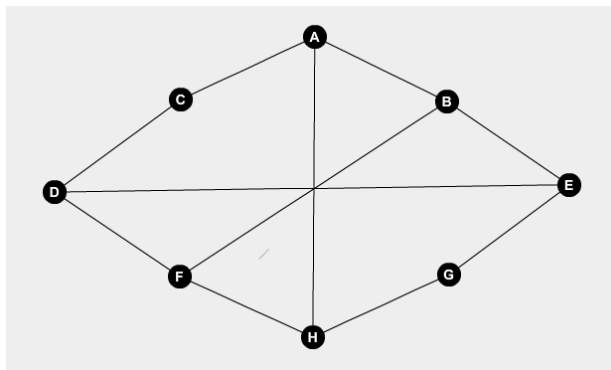
Tehát az eredeti gráfunkból egy él és a rá illeszkedő csúcsok elhagyásával kapott gráf homeomorf $K_{3,3}$ -mal, azaz a Petersen gráf nem síkba rajzolható.

10. A Kuratowski tétele segítségével igazoljuk, hogy az alábbi gráf nem síkba rajzolható.

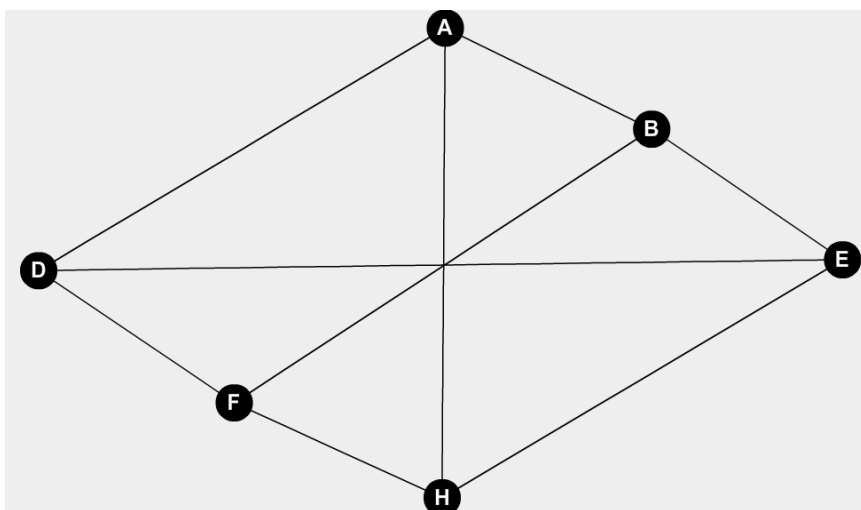


Megoldás.:

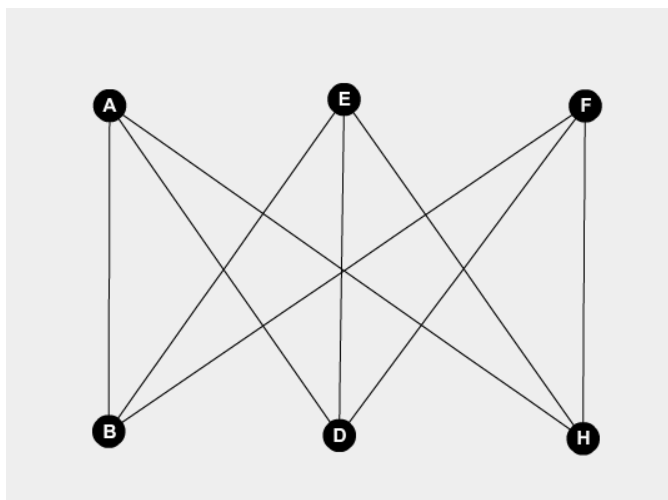
Hagyjuk el a $\{C, G\}$ élt:



A keletkezett részgráffal homeomorf gráfot kaphatunk, ha elhagyjuk a C és a G csúcsokat:



Ez pedig izomorf $K_{3,3}$ -mal:



Azaz az eredeti gráfunk nem síkba rajzolható.

Források:

Rosen Discrete Mathematics and Its Application