

Definíció	Egy gráfot <i>egyszerű gráfnak</i> nevezünk, ha sem hurokél, sem többszörös élt nem tartalmaz.
Definíció	Ha egy gráfban bármely két csúcs úttal elérhető, akkor a gráfot <i>összefüggőnek</i> nevezzük.
Tétel	(Handshaking tétel) Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.
Bizonyítás	Tegyük fel, hogy az e él az u és v csúcsokhoz illeszkedik, azaz u és v az e él két végpontja. Ekkor, ha $u \neq v$ akkor az e élt $\varphi(u)$ -nál és $\varphi(v)$ -nél is számoltuk. Ha pedig $u = v$, akkor az e él hurokél, és így $\varphi(u)$ -nál számoltuk kétszer. Tehát a gráf összes csúcsainak fokszámát összeadva az élek számának kétszeresét kapjuk.

Részgráfok, izomorfia

Definíció	Az R gráf egy G gráf <i>részgráfja</i> , ha R megkapható G -ből pontok és élek elhagyásával.
Definíció	Két gráf <i>izomorf</i> , ha egyikük pontjai és élei kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó módon megfeleltethetők a másik pontjainak és éleinek.
Definíció	Legyenek $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ gráfok. A két gráf <i>homeomorf</i> ha létezik $f: V \rightarrow V'$ függvény, melyre, ha $\{u, v\} \in E \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$, mindezt úgy, hogy ha két csúcs szomszédos G -ben, akkor f -szerinti képeik is szomszédosak G' -ben.

Fák

Definíció	Ha egy gráf összefüggő és nem tartalmaz kört, akkor azt <i>fágráfnak (fának)</i> nevezzük.
Tétel	Az n csúcsú, $n - 1$ élű összefüggő gráfok fák.

Prüfer kód

A Prüfer kód fák tárolására alkalmas. A fa n csúcsát $k = 1, 2, \dots, n$ számokkal tetszőlegesen címkézzük. A Prüfer kód alkalmazásához tudjuk, hogy minden legalább két csúcsú fában van legalább két csúcs, amelyek fokszáma 1.

Algoritmus	(A Prüfer kód előállítás) Kiindulásként meg van adva egy fa (ábrával, mátrixszal stb.) Első lépésként sorszámozzuk a csúcsokat 1-től n -ig. A következő lépésben megkeressük a legkisebb sorszámú csúcsot a (maradék) fán. Hagyjuk el ezt a csúcsot a rá illeszkedő éllel együtt és fűzzük a lista végéhez az él másik végén található csúcs sorszámát. Ezt a lépést addig ismételve, míg a fából csak egy csúcs marad, kapjuk a Prüfer kódot.
-------------------	--

Minimális feszítőfa keresése

A probléma lényege, hogy egy élsúlyozott összefüggő egyszerű gráfban keressük a legkisebb élsúlyösszegű feszítőfát.

Algoritmus	(Prim algoritmus) Választunk egy kiindulási csúcsot. Az ebből kiinduló élek közül a legkisebb súlyú mentén választjuk a következő csúcsot. A legkisebb súlyú élhez tűzzük a rá illeszkedő legkisebb súlyú élet, ha az nem alkot kört az eddig vizsgált élekkel. Ha már van $(n - 1)$ él, akkor készen vagyunk.
Algoritmus	(Kruskal algoritmus) Az éleket súlyuk szerint növekvő sorrendbe rendezzük. A legkisebbtől kezdve vesszük őket (nem feltétlenül illeszkedően) úgy, hogy ne képezzenek kört. Ha már van $(n - 1)$ él, akkor készen vagyunk.

Adott csúcsból a legrövidebb út keresése a többi csúcsba

Algoritmus (Dijkstra algoritmus) Választunk egy kiindulási csúcsot. Mindegyik csúcsához rendeljük hozzá azt, hogy mekkora volt az élsúlyok összege, amik mentén a csúcsba eljutottunk. Kezdetben mindegyik végtelen. Válasszuk a kiindulási csúcsunkhoz illeszkedő éleket, és az élek másik végén lévő csúcsokhoz rendeljük hozzá az élsúlyok összegét, amin eljutunk a csúcsba. Ezt követően minden lépésben a legkisebb összegű csúcsból indulunk ki, és nézzük meg a többi csúcsba vezető élek súlyösszegét. Ha ez kevesebb, mint az adott csúcshoz hozzárendelt érték, akkor erre módosítjuk, ha nagyobb, akkor változatlanul hagyjuk. Végül, ha már nem találunk semelyik csúcsba vezető éleket, végeztünk.

Gráfbejárások

Adott gráfban keresünk szisztematikusan adott tulajdonságú (pl. címkéjű) csúcsot. A szisztéma sokféle lehet, a két alap a szélességi és a mélységi keresés.

Szélességi keresés (Breadth-First Search = BFS)

Algoritmus Meglátogatjuk az első csúcsot, majd ennek a csúcsnak az összes szomszédját. Aztán e szomszédok összes olyan szomszédját, ahol még nem jártunk, és így tovább. Berakjuk az épp meglátogatott csúcsot, hogy majd a megfelelő időben a szomszédjaira is sort keríthessünk. Általános lépés: vesszük a sor elején levő x csúcsot, töröljük a sorból, meglátogatjuk azokat az y szomszédait, amelyeket eddig még nem láttunk, majd ezeket az y csúcsokat a sor végére tesszük.

Mélységi keresés (Depth-First Search = DFS)

Algoritmus Tetszés szerinti csúcsból elindulva egy úton addig megyünk „mélyre”, ameddig lehet: vagy nincsen további szomszédos csúcs, vagy már jártunk ott. Ha így megakadunk, akkor visszalépünk (backtrack) az előző csúcsba, ha onnan tudunk továbbmenni, akkor megint elindulunk, és a lehető legmélyebbre megyünk, ha nem, akkor visszalépünk.

Euler-kör, Euler-út

Definíció A G gráf *Euler-köre* olyan zárt él sorozat, mely G összes élét pontosan egyszer tartalmazza. *Euler-útról* akkor beszélünk, ha az élsorozat nem feltétlenül zárt.

Tétel *(Szükséges és elégséges feltétel Euler-kör létezésére) Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor létezik Euler-kör, ha minden csúcsának foka páros.*

Tétel *(Szükséges és elégséges feltétel Euler-út létezésére) Egy összefüggő gráf akkor és csak akkor tartalmaz Euler-utat, ha a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2.*

Hamilton-kör, Hamilton-út

Definíció Egy P kör egy $G = (V, E)$ gráfban *Hamilton-kör*, ha P a V összes elemét (a gráf csúcsait) pontosan egyszer tartalmazza. *Hamilton-útról* akkor beszélünk, ha P kör helyett út.

Tétel *(Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére) Ha egy gráfban k pontot elhagyva k -nál több komponens keletkezik, akkor nem tartalmazhat Hamilton-kört.*

Tétel *(Ore tétele) Ha a G gráfra teljesül, hogy bármely két nem szomszédos u, v csúcs fokának összege nagyobb egyenlő G fokaival ($\deg(u) + \deg(v) \geq n$), akkor G -nek van Hamilton-köre.*

Tétel *(Dirac tétele) Ha az $n = 2k$ csúcspontú G egyszerű gráf bármely pontjának a foka legalább k , akkor van G -nek Hamilton-köre.*

Síkgráfok és színezésük

Definíció Egy gráf síkba rajzolható gráf, ha lerajzolható úgy a síkba, hogy élei csak a szögpontokban metszik egymást. Ezt az így lerajzol gráfot síkgráfnak nevezzük.

Tétel (Fáry-Wagner tétel) Ha G egy síkba rajzolható gráf, akkor létezik olyan síkbarajzolása, amelyben minden él egyenes szakasz.

Tétel (Euler-féle poliéder tétel) A G összefüggő, egyszerű síkgráf esetében, ha p a gráf szögpontjainak száma, e a gráf éleinek száma és t a gráf által létrehozott területek száma a végtelen területet is számolva, akkor $p - e + t = 2$.

Következmény Ha G összefüggő, egyszerű síkgráf pontjainak száma legalább 3, akkor $e \leq 3p - 6$

Következmény Ha a G összefüggő, egyszerű síkgráf pontjainak száma legalább 3, és nincsen 3 hosszú köre, akkor $e \leq 2p - 4$.

Tétel (Kuratowski tétel) Valamely gráf akkor, és csak akkor sík gráf, ha nem tartalmaz K_5 -tel vagy $K_{3,3}$ -mal izomorf/homeomorf részgráfot.

Tétel A G gráf akkor, és csak akkor síkba rajzolható, ha gömbre rajzolható.

Gráfszínezések

Definíció A $\chi(G)$ a G gráf kromatikus száma, vagyis az a szám, amely megmutatja, legkevesebb hány szín kell a gráf csúcsainak olyan ki színezéséhez, hogy a szomszédos csúcsok más színűek legyenek.

Hálózati folyamatok

Definíció Adott egy $G = (N, E)$ irányított gráf, és ennek két különböző pontja, s és t , melyeket forrásnak és nyelőnek nevezünk. (A forrásból csak kifelé, a nyelőbe meg csak befelé mutatnak élek.) Adott továbbá az éleken értelmezett $c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ nemnegatív értékű kapacitásfüggvény. Ekkor $G = (N, E)$ gráfot a c függvénnel együtt (G, c) hálózatnak nevezzük.

Definíció Az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *folyamnak* hívjuk, ha teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2) &= -f(n_2, n_1), & \forall (n_1, n_2) \in E, n_1, n_2 \in V \\ f(n_1, n_2) &\leq c(n_1, n_2), & \forall (n_1, n_2) \in E \end{aligned}$$

Definíció Legyen $H = (G, c)$ egy hálózat s forrással és t nyelővel. Legyen $N_1, N_2 \subseteq N$ egy partíciója N -nek, vagyis $N_1 \cup N_2 = N$ és $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Legyen továbbá $s \in N_1$ és $t \in N_2$. Ekkor az N_1, N_2 halmazt s, t -vágásnak hívjuk. Az N_1, N_2 kapacitásán

$$c(N_1, N_2) = \sum_{n_i \in N_1, n_j \in N_2} c(n_i, n_j)$$

számot értjük.

Definíció Adott $H = (G, c)$ hálózat s forrással és t nyelővel. Jelölje $r: A \rightarrow \mathbb{R}$ a maradék-kapacitásfüggvényt, ahol $\forall n_1, n_2 \in V$ esetén $r(n_1, n_2) = c(n_1, n_2) - f(n_1, n_2)$.

Az f folyamhoz tartozó javító gráf a $G_f = (V, E_f)$ az élein értelmezett maradék-kapacitásfüggvénnel, ahol $E_f = \{(n_1, n_2): n_1, n_2 \in V, r(n_1, n_2) > 0\}$

A G_f -beli irányított s, t utakat *javító utaknak* hívjuk.