

Síkgráfok

Kuratowski-tétel: egy gráf akkor és csak akkor síkba rajzolható gráf, ha nincs olyan részgráfja, ami a K_5 -el, vagy a $K_{3,3}$ -altopologikusan izomorf (homeomorf).

Euler síkgráfokra vonatkozó tétele: ha G összefüggő síkgráf, akkor: $p - e + t = 2$. (Jelölés: e =élek száma, t =tartományok száma, p =pontok (csúcsok) száma.)

Euler tétel következménye 1: ha G összefüggő síkgráf és legalább 3 pontja van, akkor: $e \leq 3 \cdot p - 6$

Euler tétel következménye 2: ha G összefüggő síkgráf, legalább három pontja van, és nem tartalmaz három élhosszú kört, akkor: $e \leq 2 \cdot p - 4$

Vigyázat a következmények szükséges, de nem elégséges feltételeket adnak ahhoz, hogy egy gráf síkgráf legyen!

1. Bizonyítsuk be, hogy a következő gráf (K_6) nem lehet síkgráf:

Megoldás:

Kuratowski tétel segítségével is látható, mert a gráfnak van részgráfja ami topologikusan izomorf K_5 -el.

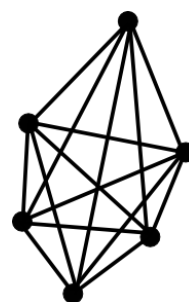
Nézzük meg azonban az Euler-tétel segítségével is:

$e \leq 3 \cdot p - 6$ szükséges, hogy teljesüljön ahhoz, hogy síkgráf lehessen.

Esetünkben: $e = (6 \cdot 5) / 2 = 15$, $c = 6$

$30 \leq 3 \cdot 6 - 6$

$30 \leq 12$, amiből következik, hogy nem síkgráf.



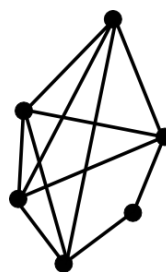
2. Döntse el az alábbi gráfról, hogy síkbarajzolható-e?

Mo.:

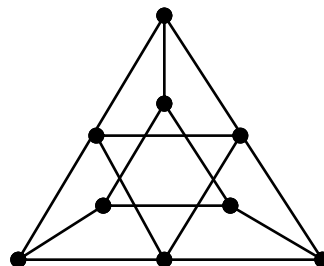
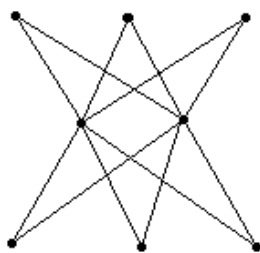
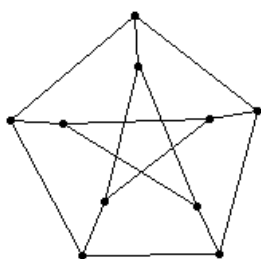
- Kuratowski tétel alapján nem síkbarajzolható, mert homeomorf K_5 -el.

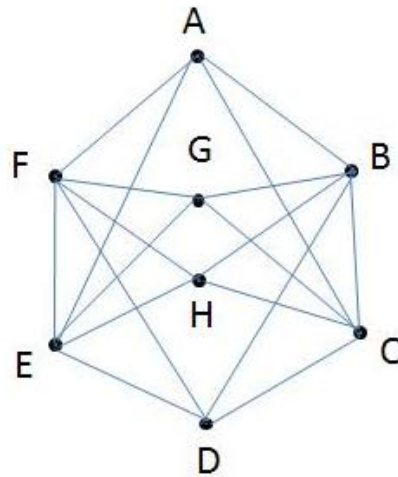
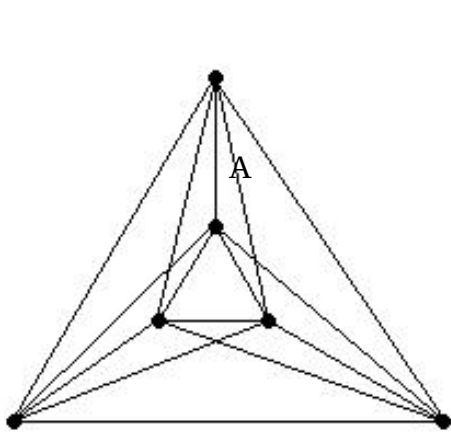
- Az Euler tétel első következménye alapján nem tudnánk választ adni, mert a gráfra teljesül: $e \leq 3 \cdot p - 6$ hiszen $11 \leq 3 \cdot 6 - 6 = 12$

- A második következmény pedig nem használható, mert van három élhosszúságú kör.



3.a, Melyik gráf rajzolható síkba a következők közül? Amelyik nem, indokolja meg miért nem. Amelyik síkbarajzolható, annak adja meg egy lerajzolását!





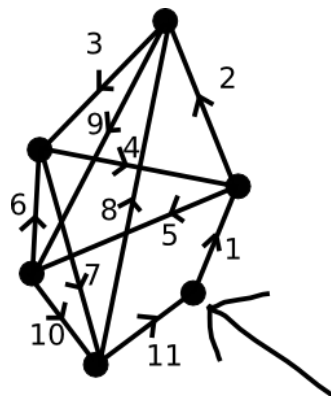
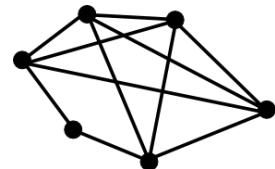
4.
 a, Adott a G véges egyszerű 6-reguláris (minden csúcsára 6 él illeszkedik) gráf. Döntse el, hogy síkbarajzolható-e ez a gráf!
 b, Síkba rajzolható-e az az n csúcsú gráf, amelynek $n-2$ csúcsára 6 él illeszkedik, két csúcsára pedig 7?

Euler és Hamilton

1. Van Euler-kör az alábbi gráfban?

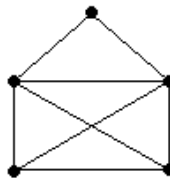
Megoldás:

Euler-körhöz szükséges és elégséges feltétel, hogy minden csúcs foka páros.
 Ez alapján a fenti gráfban van Euler-kör. Adjunk is meg egyet:



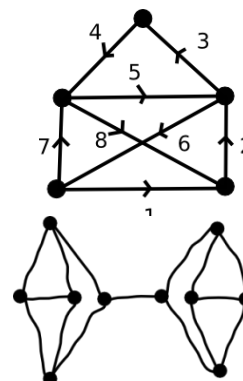
Nyíllal megjelölt csúcsból indulva, számozott nyilak mentén haladva, minden élt érintve visszajutunk a kezdőcsúcsba.

2. Van Euler-út az alábbi gráfban?

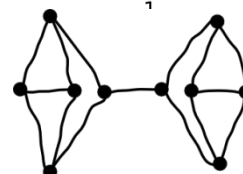


Megoldás:

Euler-úthoz szükséges és elégséges feltétel: egy gráfban akkor és csak akkor van Euler-út, ha pontosan kettő páratlan fokszámú csúcsa van. Ez a két csúcs az induló- illetve a befejező csúcsok lesznek. Tehát ebben a gráfban van Euler-út:

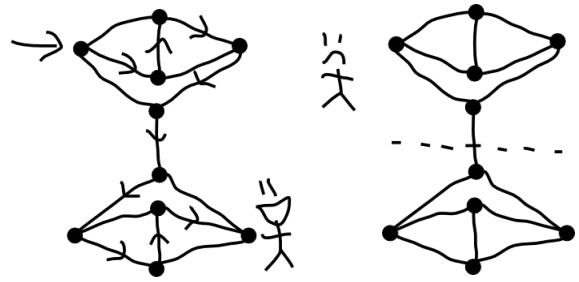


3. Van Hamilton út az alábbi gráfban? Van benne Hamilton kör?



Megoldás:

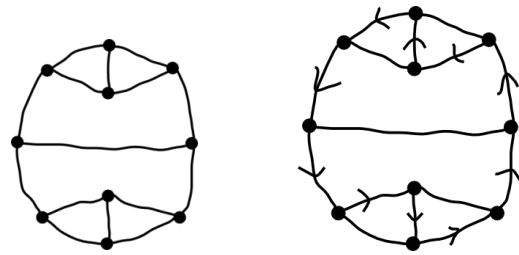
Hamilton út van, az ábrán a nyíllal jelölt csúcsból a nyilakkal megjelölt útvonalon haladva minden csúcsot pontosan egyszer érintünk (és a pálcikaemberrel jelölt csúcsba érünk). Hamilton kör nincs, mert van benne elvágó él, és ezt kétszer kellene használni, hogy az egyik részből átjussunk a másikba, majd vissza.



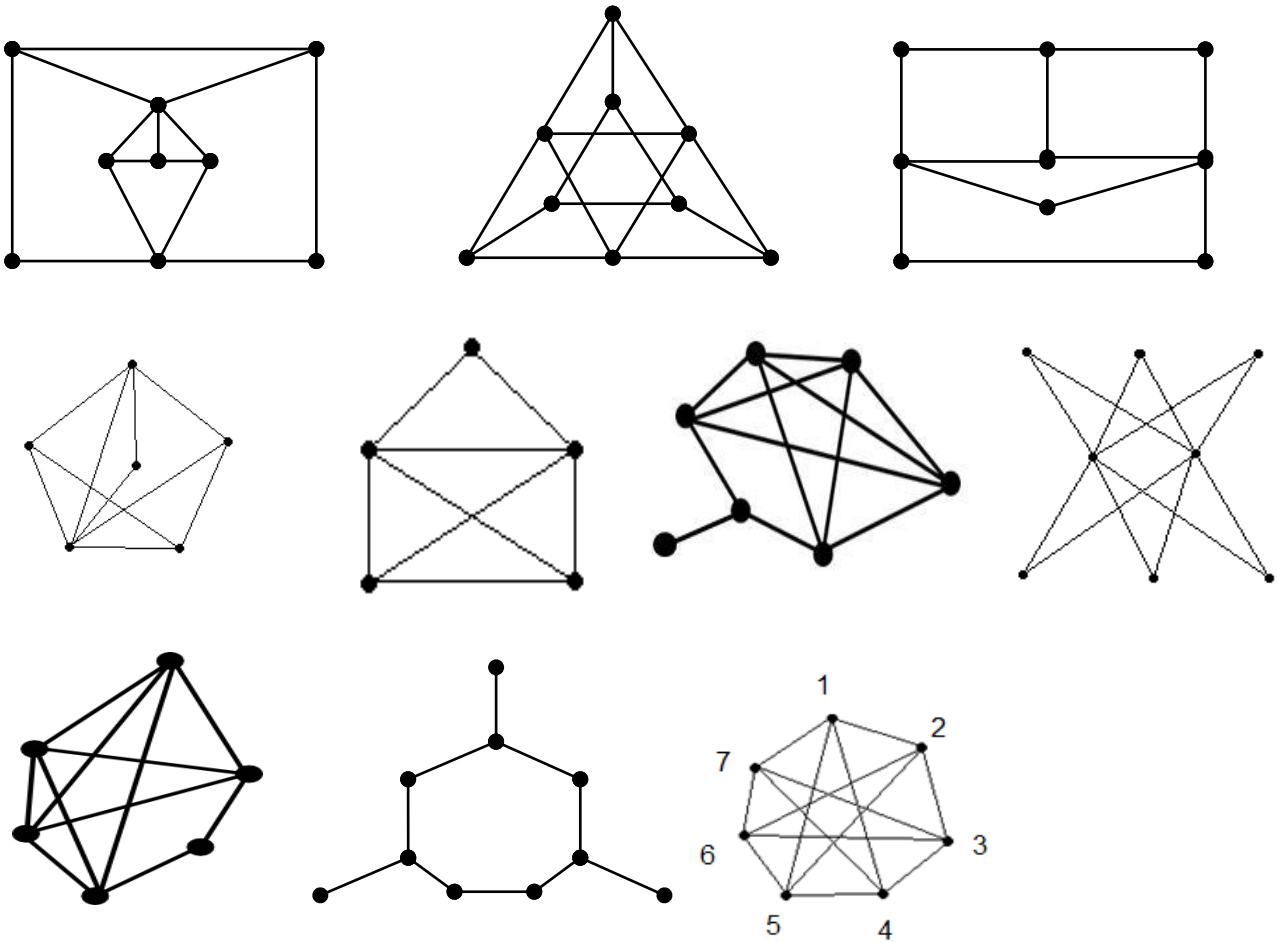
4. Van Hamilton-út a következő gráfban? Van benne Hamilton-kör?

Megoldás:

Van Hamilton-kör, bármely csúcsból indulva a nyilakkal megjelölt útvonalon haladva minden csúcsot pontosan egyszer érintünk, és ugyanoda érkezünk vissza. Mivel van benne Hamilton-kör, van Hamilton-út is, a kör valamely élének elhagyásával Hamilton-utat kapunk.



5. Melyik gráfban van Euler-út, Euler-kör, Hamilton út, Hamilton kör?



Prim és Kruskal

Kruskal-algoritmus:

Költség szerint növekvő sorrendben tekintjük az éleket és mindegyikről eldöntjük, hogy bevesszük-e a feszítőfába. Ha a korábban beválasztott élekkel nem alkot kört, akkor beválasztjuk, ha kört alkot, akkor nem.

Prim-algoritmus:

Itt az élek közül választjuk mindig a legkisebb költségűt, amelynek egyik csúcsa a már meglévő fában van, a másik azon kívül. (Így kört nem alkot a felépített gráfban.)

1. Határozza meg az alábbi gráf minimális feszítőfáját:

Megoldás:

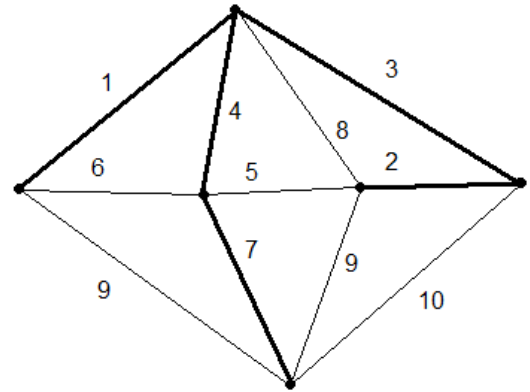
Kruskal algoritmus: Mindig a legkisebb értékű élt vesszük, ami nem alkot kört az előzőkkel

$n=6$ csúcs $e=n-1=5$ éle lesz a fának.

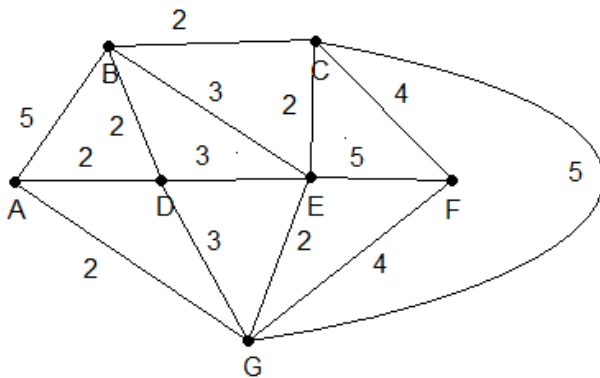
$1+2+3+4+7=16$

Prim algoritmus: A legkisebb értékű éllel kezdünk, vesszük a hozzá csatlakozó legkisebb értékű élt, ha nem alkot kört az előzőkkel

$1+3+2+4+7=16$

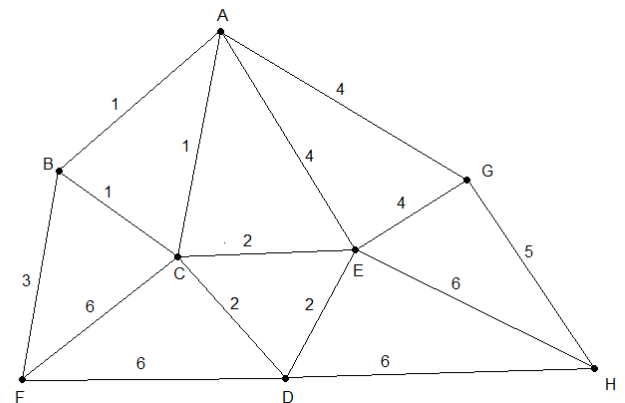


2. Keresse meg először a Prim majd a Kruskal algoritmussal az alábbi gráfok legkisebb súlyú feszítőfáját!



Megoldás:

Súlyok $5 \cdot 2 + 4 = 14$



$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 + 4 + 5 = 18$

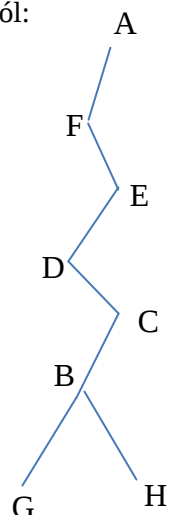
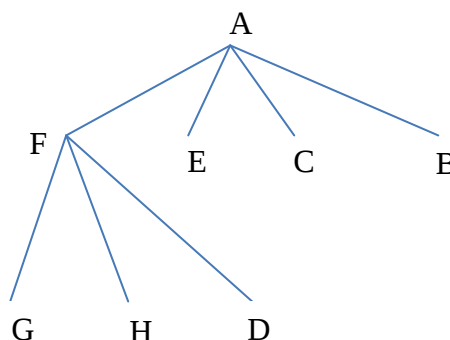
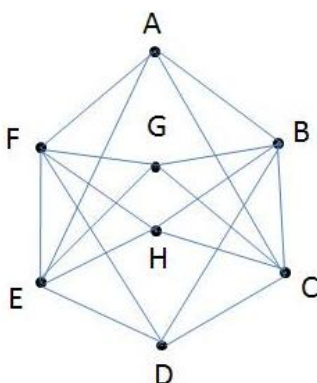
Szélességi és Mélységi keresés

1. Válasszon a korábbi témakörökből tetszőleges gráfokat és keresse meg egy-egy feszítőfájukat a szélességi és mélységi kereséseket használva!

2. Például:

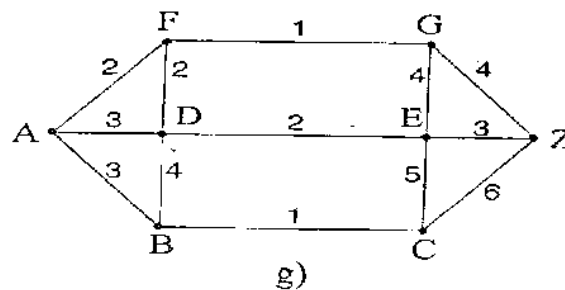
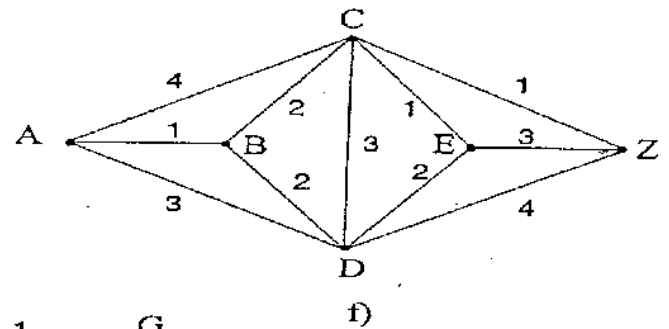
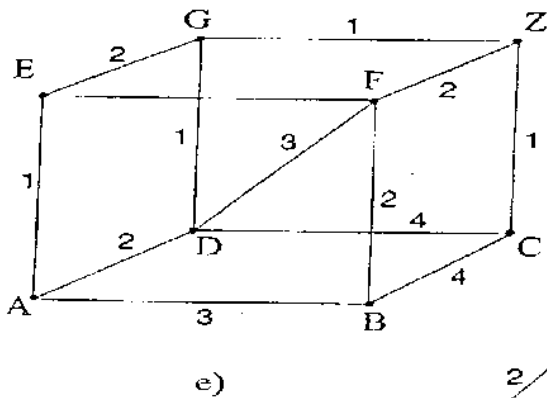
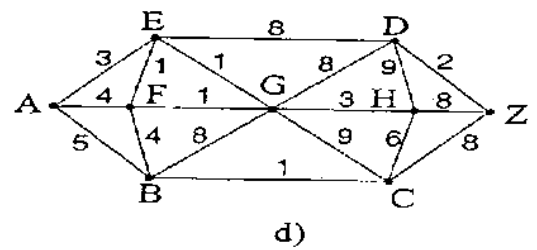
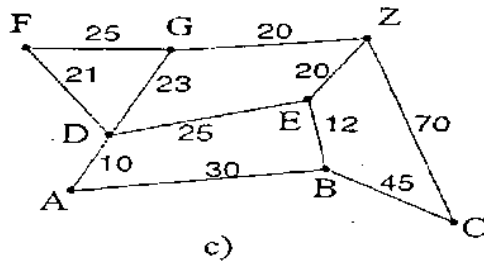
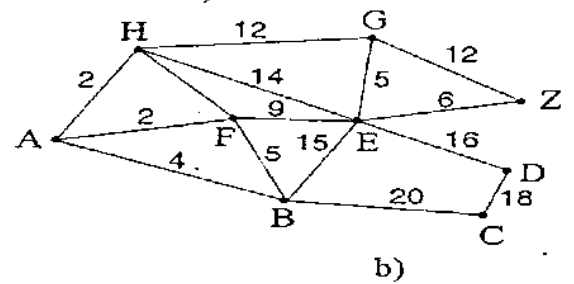
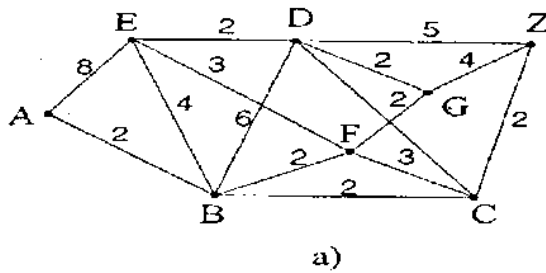
Szélességi A csúcsból:

Mélységi A csúcsból:



Dijkstra

1. Határozza meg az alábbi gráfokban a legrövidebb utakat az A csúcsból a többi csúcsba a Dijkstra algoritmus segítségével!



Megoldás - első gráf esetén a lényeges lépések:

A = 0 a többi végtelen

A-ból indulva az új értékek: E = 8 B = 2

B-ből tovább javítva: E = 6 D = 8 F = 4 C = 4

E-ből: nincs javítás

D-ből: G = 10 Z = 13

F-ből: G = 6

C-ből: Z = 6

Minimális út például A-ból Z-be: A-B-C-Z összesen: 6 egység

Színezés

Gráf színezése: Minden csúcshoz hozzárendelünk egy színt úgy, hogy ha két csúcs között van él, akkor a csúcsok nem lehetnek azonos színűek.

Kromatikus szám $\chi(G)$: A csúcsok színezéséhez minimálisan szükséges színek száma

Kromatikus szám becslése: $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G)$

$\omega(G)$ - Klikkszám, vagyis a legnagyobb teljes részgráf mérete

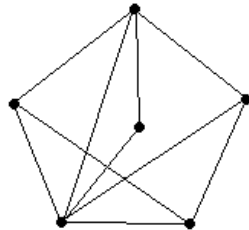
$\Delta(G)$ - maximális fokszám

1. Példa:

$$\omega(G) = 3$$

$$\Delta(G) = 5$$

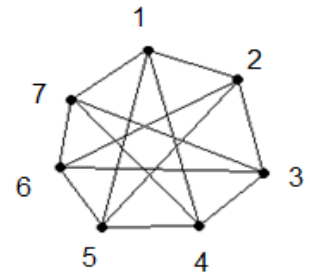
$$\chi(G) = 3$$



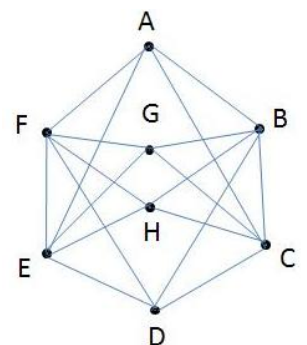
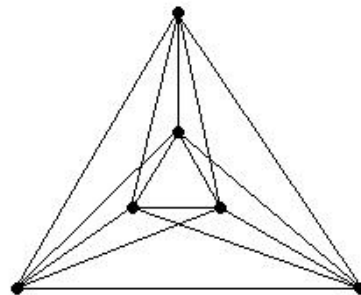
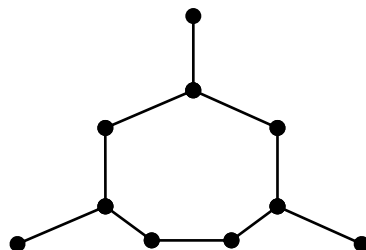
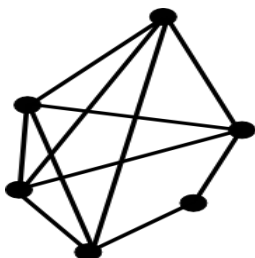
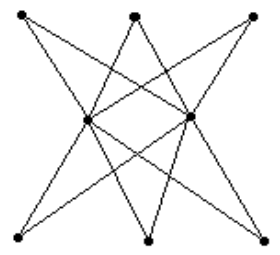
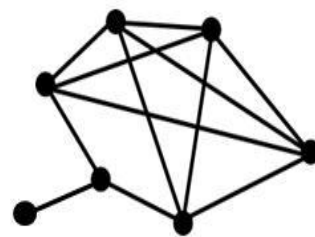
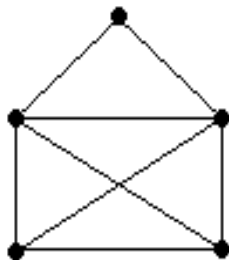
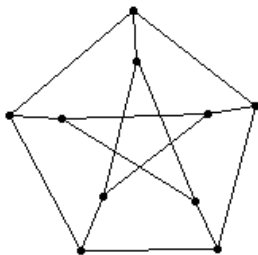
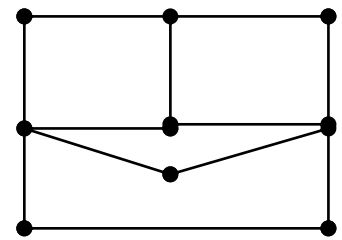
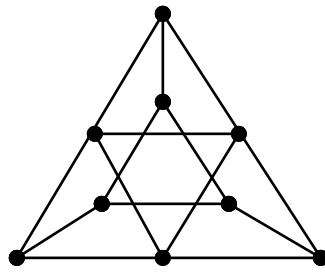
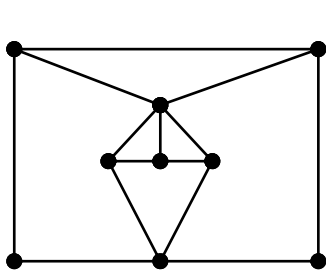
$$\omega(G) = 3$$

$$\Delta(G) = 4$$

$$\chi(G) = 4$$



1. Adja meg az alábbi gráfok kromatikus számának becslését, majd pontos értékét!



M.o.: A kromatikus számok:

3, 3, 3

3, 4, 5, 2

5, 3, 6, 3