

Síkbarajzolható gráfok

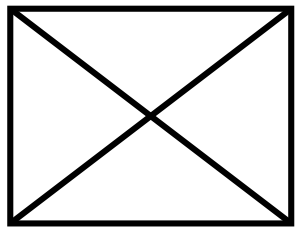
Ismétlés

Síkgráfok

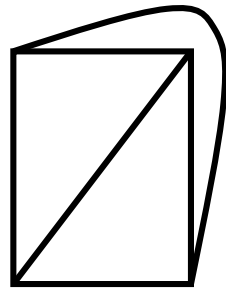
Egy gráf **síkgráf=síkba rajzolható gráf**, ha lerajzolható úgy a síkba, hogy élei csak a szögpontokban metszik egymást.

G síkgráf, mert a vele izomorf H a síkba van rajzolva.

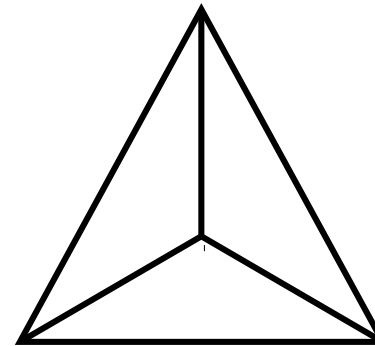
Ha egy gráf lerajzolható a síkba, akkor lerajzolható úgy is, hogy minden éle egyenes szakasz legyen. (K)



Nem síkgráf



Átalakítva síkgráfnak



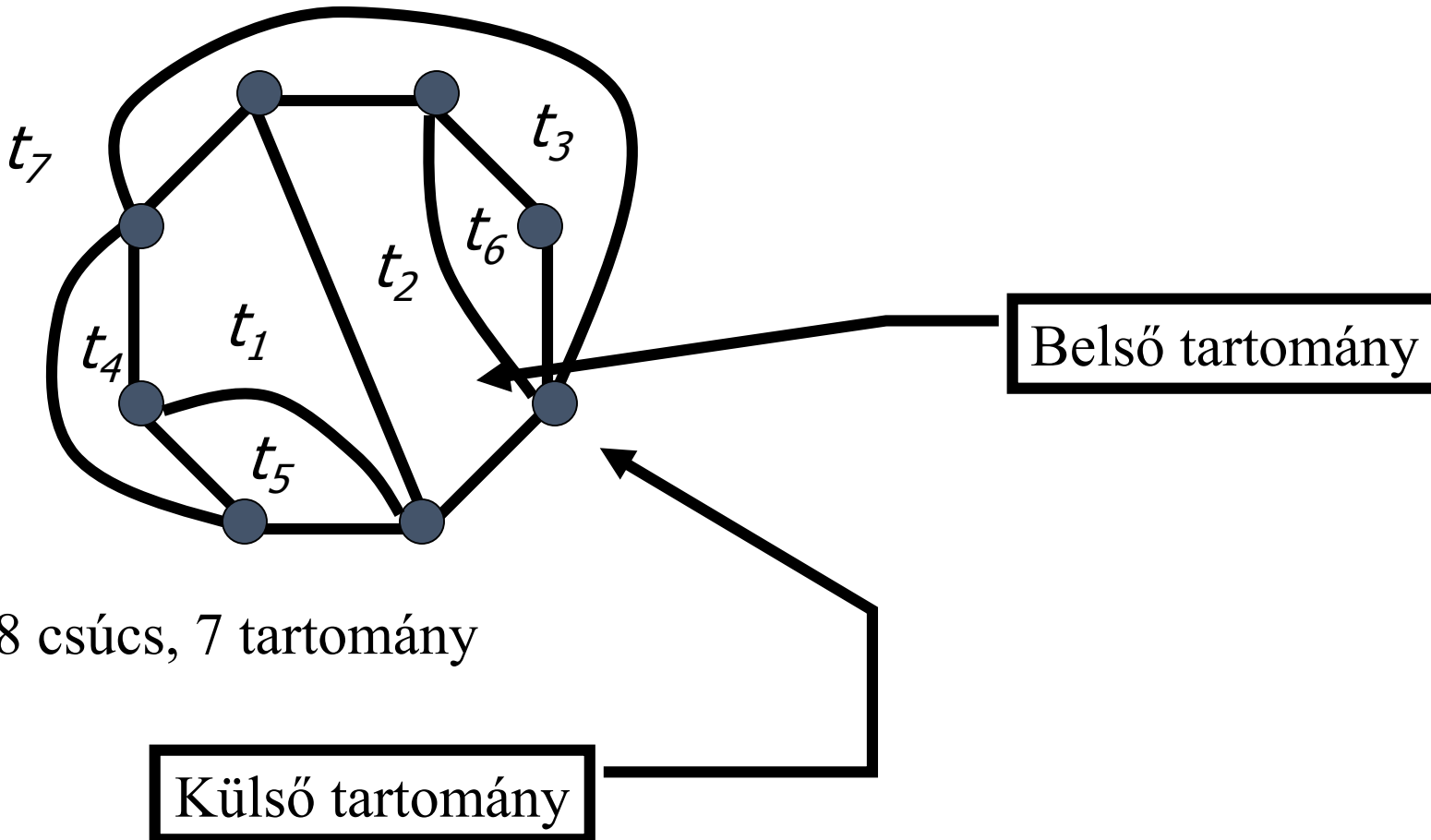
Élei egyenes szakaszok

IZOMORF gráfok

Fáry-Wagner tétel: Ha G egy síkbarajzolható gráf, akkor létezik olyan síkbarajzolása amelyben minden él egyenes szakasz.

Síkgráf jellemző adatai

A síkbarajzolt gráf a síkot **területekre/tartományokra** bontja.



Euler-féle poliéder tétel (Euler formula)

EULER síkgráfokra vonatkozó tétele: élek száma, csúcsok száma, tartományok száma közti összefüggést állapít meg.

Tétel:

A G összefüggő, egyszerű síkgráf esetében, ha p = gráf pontjainak (csúcsainak száma), e =gráf éleinek száma, t = a síkgráf által létrehozott területeinek száma, a végtelen területet is számolva, akkor: $p-e+t=2$

Biz.: a(z **adott síkgráfot**)gráfot lépésenként (újra) lerajzoljuk:

1.lépés: 1 csúcs: igaz az állítás: $1-0+1=2$

2. lépés: 2 csúcs: igaz az állítás $2-1+1=2$

n. lépés: Tegyük fel hogy az $(n-1)$ lépésig igaz a formula: $p-e+t=2$. A következő lépés **kétféle** lehet:

a.) vagy meglévő csúcsokat kötünk össze egy új éllel,,: ekkor élek száma eggyel, területek száma eggyel növekszik, pontok szám a változatlan: igaz-e az állítás? $p-e+t=2 \Leftrightarrow p-(e+1)+(t+1)=2$

b.) egy új csúcsot rajzolunk be (a rá illeszkedő éllel együtt), amelynek szomszédja már a meglévő lerajzolt gráfban van : ekkor a csúcsok száma eggyel nő, élek száma eggyel nő, területek száma változatlan: igaz-e az állítás?
 $p-e+t=2 \Leftrightarrow (p+1)-(e+1)+t=2$

Tétel:

A G összefüggő, egyszerű síkgráf esetében, ha

p = gráf pontjainak (csúcsainak száma),

e = gráf éleinek száma,

t = a sík gráf által létrehozott területeinek száma, a végtelen területet is számolva, akkor:

Euler-féle poliéder tétel (Euler formula)

$$p - e + t = 2$$

Euler tétel következménye: $e \leq 3p - 6$, ha min. 3 pontja van

1. Következmény:

Ha az összefüggő, egyszerű sík gráf pontjainak száma legalább 3, akkor $e \leq 3p - 6$

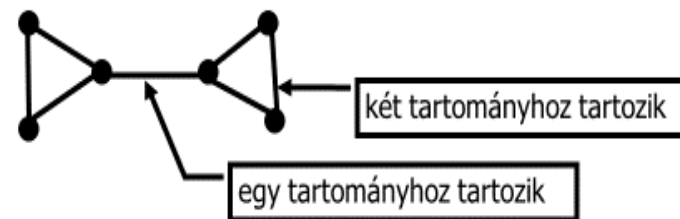
Bizonyítás:

Mivel egyszerű gráfról van szó, ezért minden területet legalább 3 él határol (legalább 3 a fokszáma)

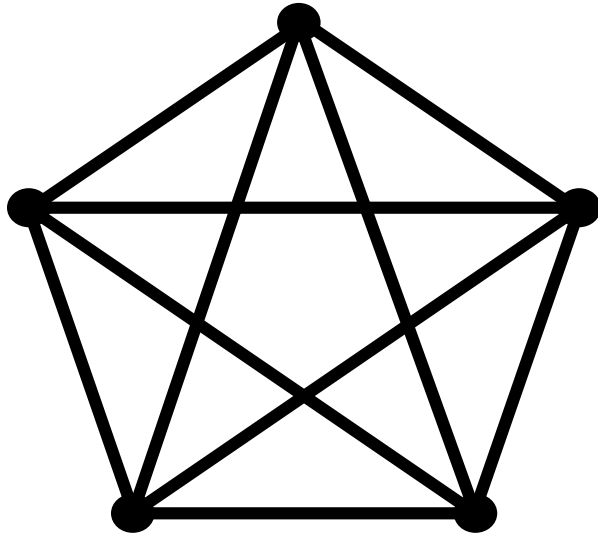
A területeket határoló éleket összeadva az élek számának kétszeresét kapjuk, hiszen minden területet határoló él két területhez tartozik, így kétszer számoljuk őket össze.

Vagyis: $2e \geq 3t$, hiszen **ha MINDEGYIK terület háromszög lenne**, akkor lenne a fokszáma 3. Így $t \leq 2/3e$

$p - e + t = 2$ -ből $e - t$ kifejezve: $e = p + t - 2 \geq p + 2/3e - 2$, ebből $e \leq 3p - 6$



Kuratowski-gráf



K_5

K_5 nem sík gráf:

5 csúcsa, 10 éle van:

$$e \leq 3p - 6$$

$$10 \geq 3 \cdot 5 - 6 = 9$$

Euler tétel következménye: minimális foksám MAX 5

2. Következmény

Ha G egyszerű síkbarajzolható gráf, akkor a minimális foksáma legfeljebb 5.

Bizonyítás – indirekt:

Tegyük fel, hogy a minimális foksám legalább 6. A foksámok összege az élek számának kétszerese (kézfogás-Handshaking), így $6n \leq (\text{foksámok összege}) \leq 2e$.

Az előző tétel: $e \leq 3p-6$ vagyis: $2e \leq 6n-12$, ez ellentmondás.

Euler tétel következménye: szabályos poliéderek

3. következmény

Ha egy síkbarajzolható gráfban a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 db 5-öd fokú pontja van.

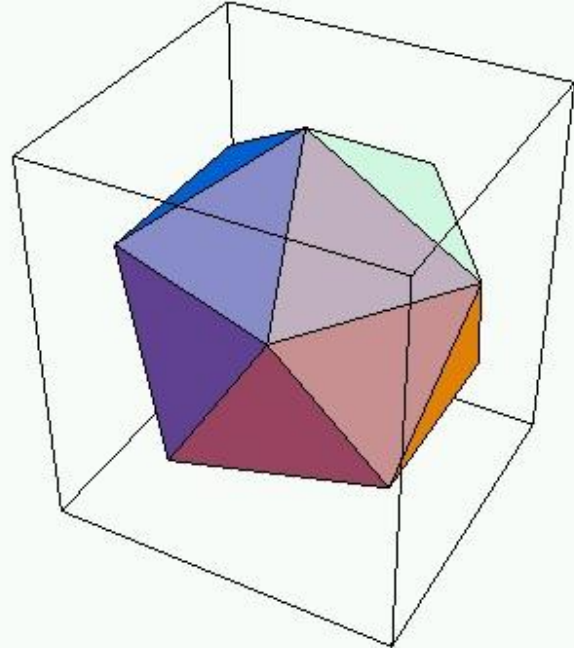
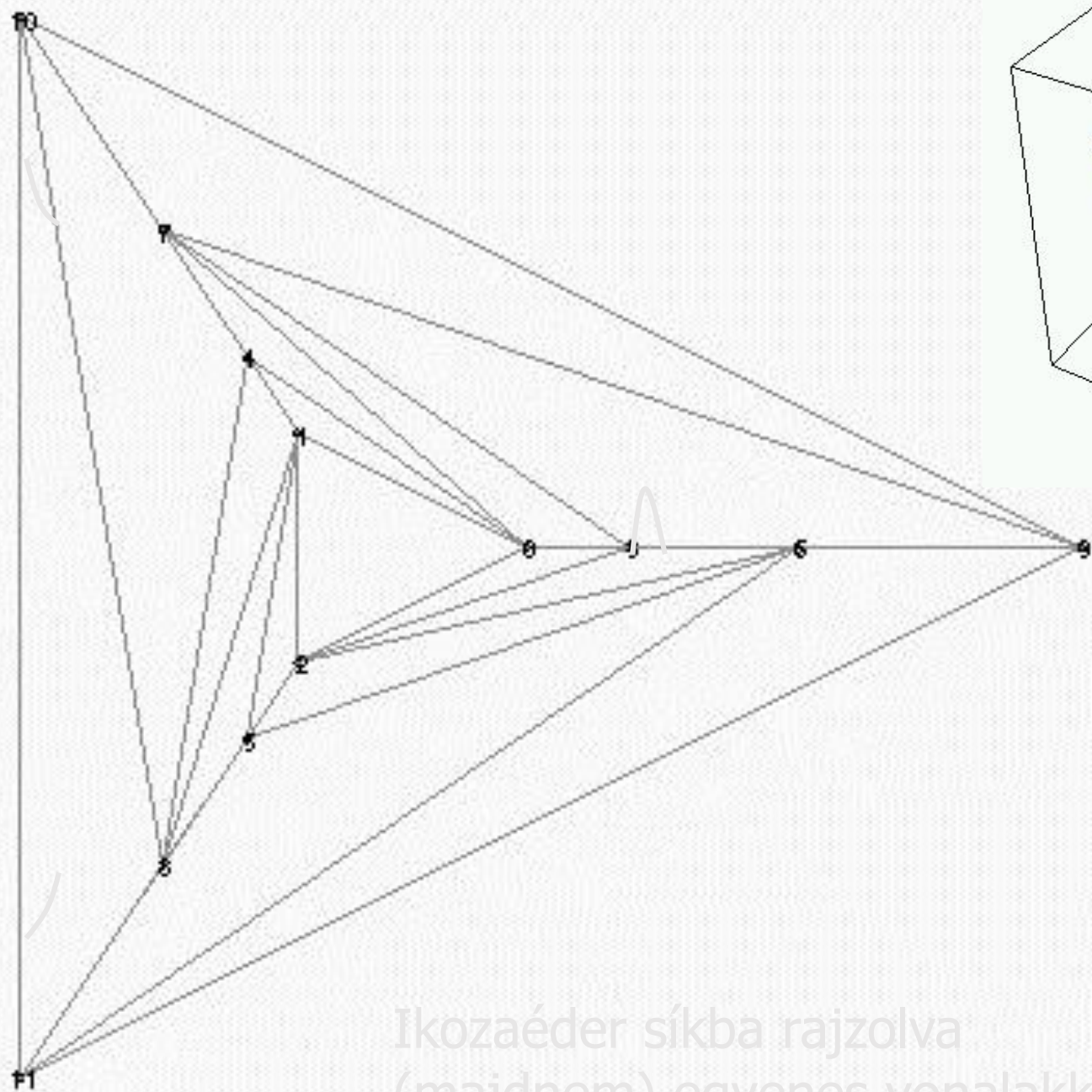
Bizonyítás

M legyen a minimális fokszámú pontok száma, vagyis, amelyek fokszáma 5. A fokszámösszeg akkor legalább $5M$ + az ennél nagyobb, legalább 6 fokszámúak:

$5M + 6(n - M) \leq 2e \leq 6n - 12$ (1. következmény). Ebből:

$$12 \leq M$$

Az ikozaéder csúcs-él gráfjának 12 csúcsa van, melyek mindegyike ötödfokú.



Ikozaéder síkba rajzolva
(majdnem) egyenes vonalakkal

Euler tétel következménye

4. következmény:

Ha az összefüggő, egyszerű sík gráf pontjainak száma legalább 3, és nincsen 3 hosszú köre, akkor $e \leq 2p - 4$.

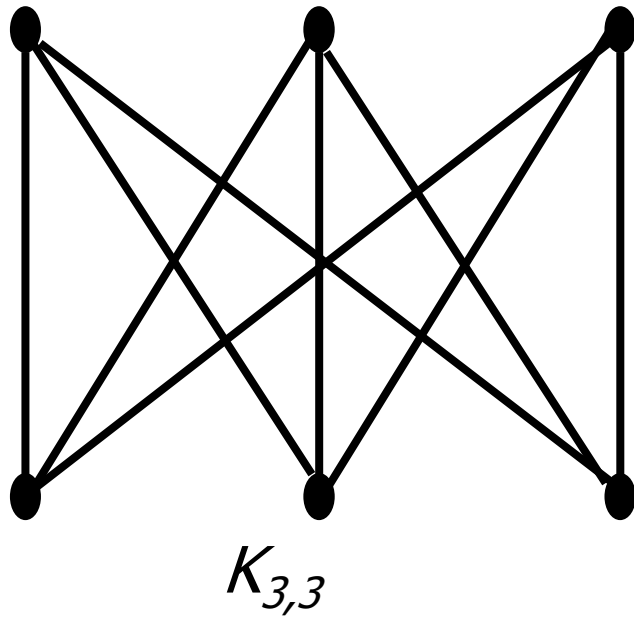
Bizonyítás:

A feltételek miatt most minden területet legalább 4 él határol, fokszáma legalább 4, tehát:

$$2e \geq 4t, \text{ vagyis } e \geq 2t, \quad 1/2e \geq t.$$

$$p - e + t = 2 \text{-ből } e - t \text{ kifejezve: } e = p + t - 2 \leq p + 1/2e - 2, \text{ ebből: } e \leq 2p - 4$$

Másik Kuratowski-gráf



$K_{3,3}$: (3-3 csúcsú teljes páros gráf):

három ház-

villany,gáz, elektromos vezetékek.

Következmény: $K_{3,3}$ nem lehet sík gráf:

pontok száma =6, éleinek száma=9, és

$$e \leq 2p - 4$$

$$9 \geq 2 \cdot 6 - 4 = 8$$

$K_{3,3}$ síkbarajzolásánál nem lehet 3 oldalú tartomány! Ekkor a 3 csúcs közt vagy két ház, vagy két kút lenne, de azok nincsenek éllel összekötve.

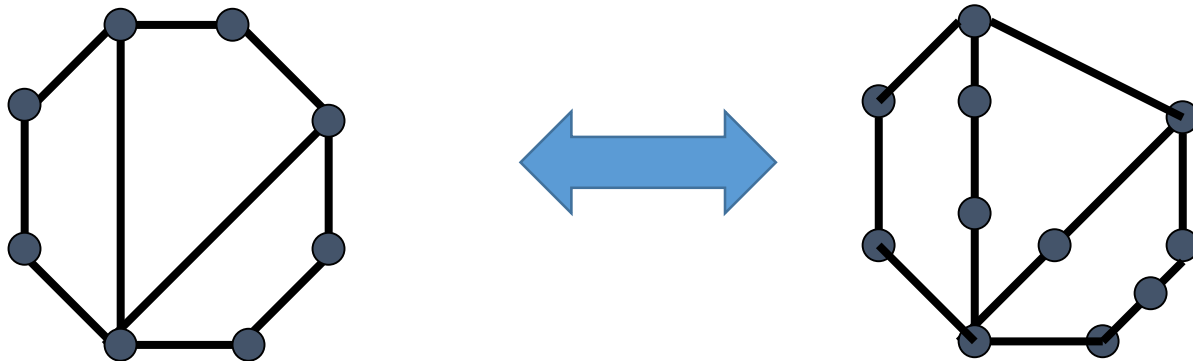
Kuratowski- tétel

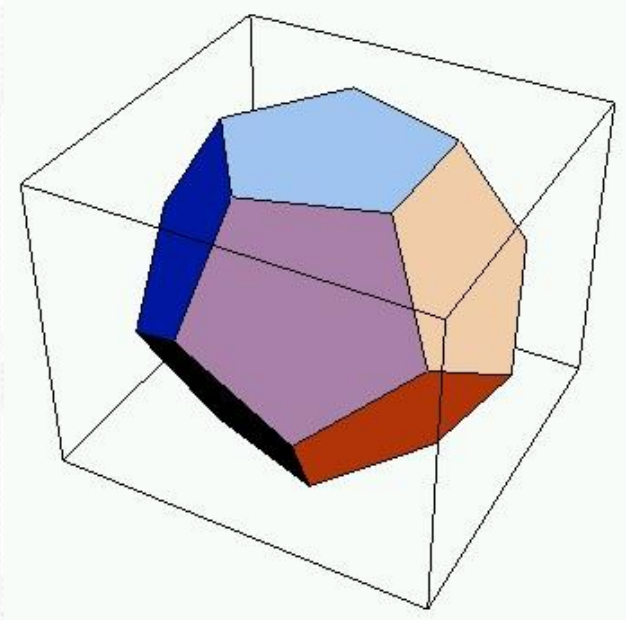
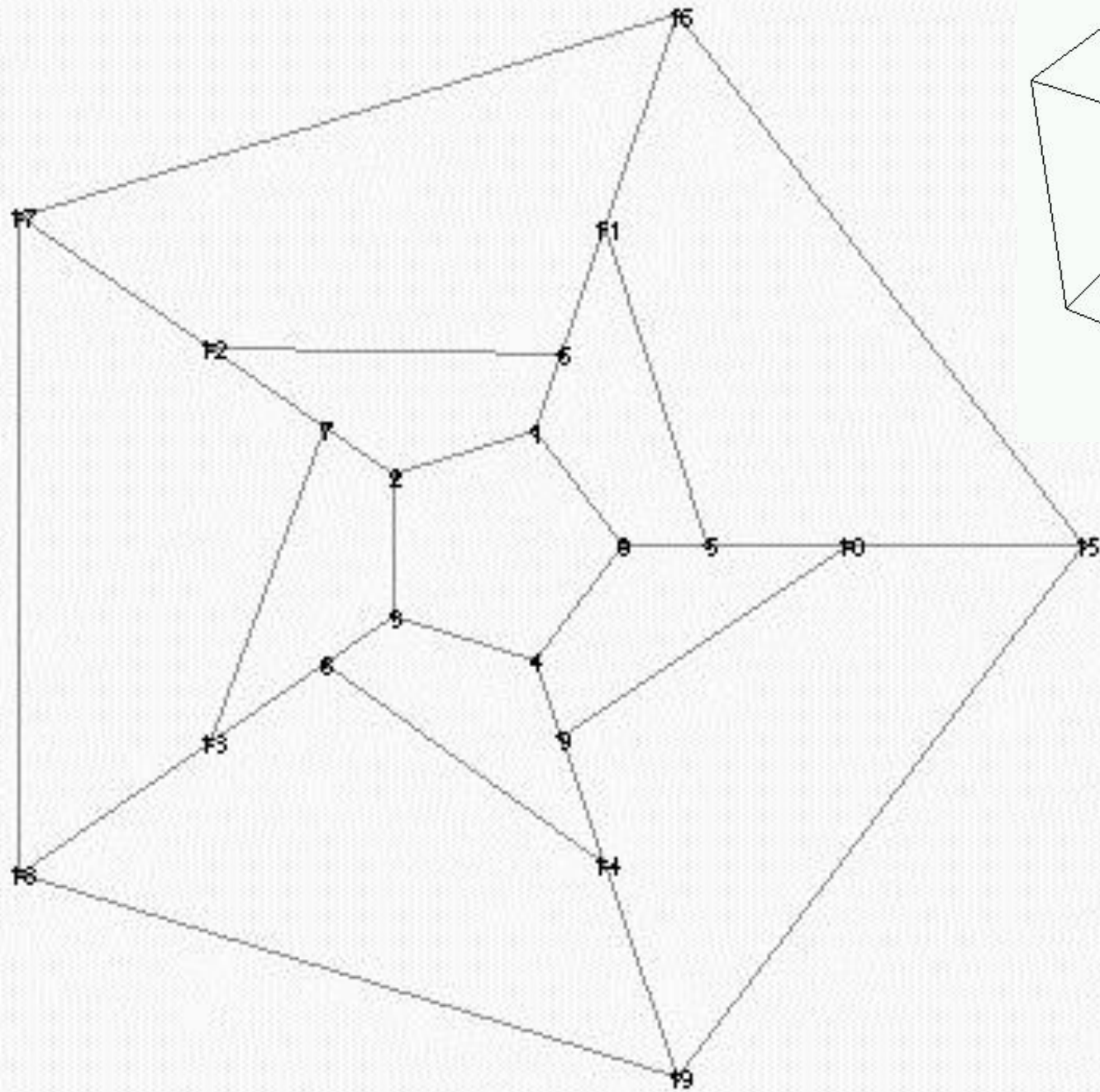
KURATOWSKI: Valamely gráf akkor és csak akkor sík gráf, ha nem tartalmaz K_5 -tel vagy $K_{3,3}$ -mal izomorf részgráfot.

KURATOWSKI: Valamely gráf akkor és csak akkor sík gráf, ha nem tartalmaz K_5 -tel vagy $K_{3,3}$ -mal **homeomorf** részgráfot.

Homeomorf: élre szabad pontot beiktatni. Ha a gráfnak van olyan részgráfja, amelyben minden pont foka kettő, de nem kör, ezeket a pontokat szabad törölni: uv élből uw, wv élek keletkezhetnek, és fordítva (u, v, w pontok)

Fáry-Wagner tétel: Ha G egyszerű síkba rajzolható gráf, van olyan rajza, hogy az élek egyenes szakaszok.





A dodekaéder
gráfjának
síkbarajzolása csupa
egyenes szakasz éllel.

Tétel: A G gráf akkor és csak akkor síkba rajzolható, ha gömbre rajzolható.

Biz.: sztereografikus projekció (bijekció)

<http://www.youtube.com/watch?v=6JgGKViQzbc>

A Föld sztereografikus projekciója:

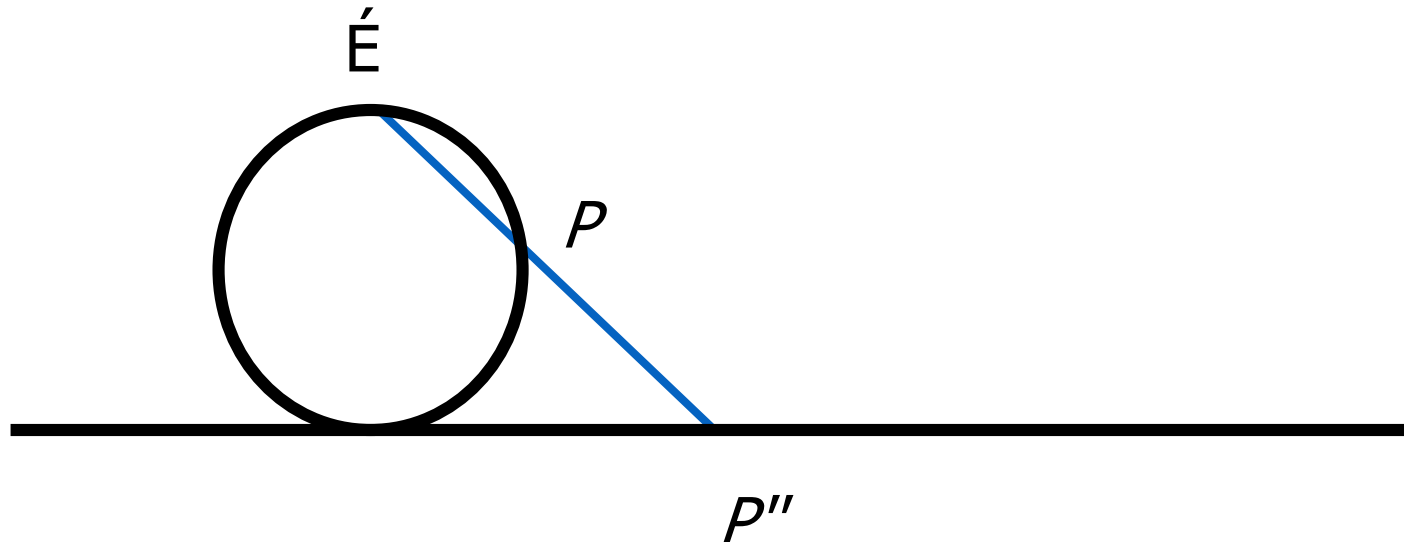
<http://www.youtube.com/watch?v=Utj1qsrBLdE&feature=related>

Tétel

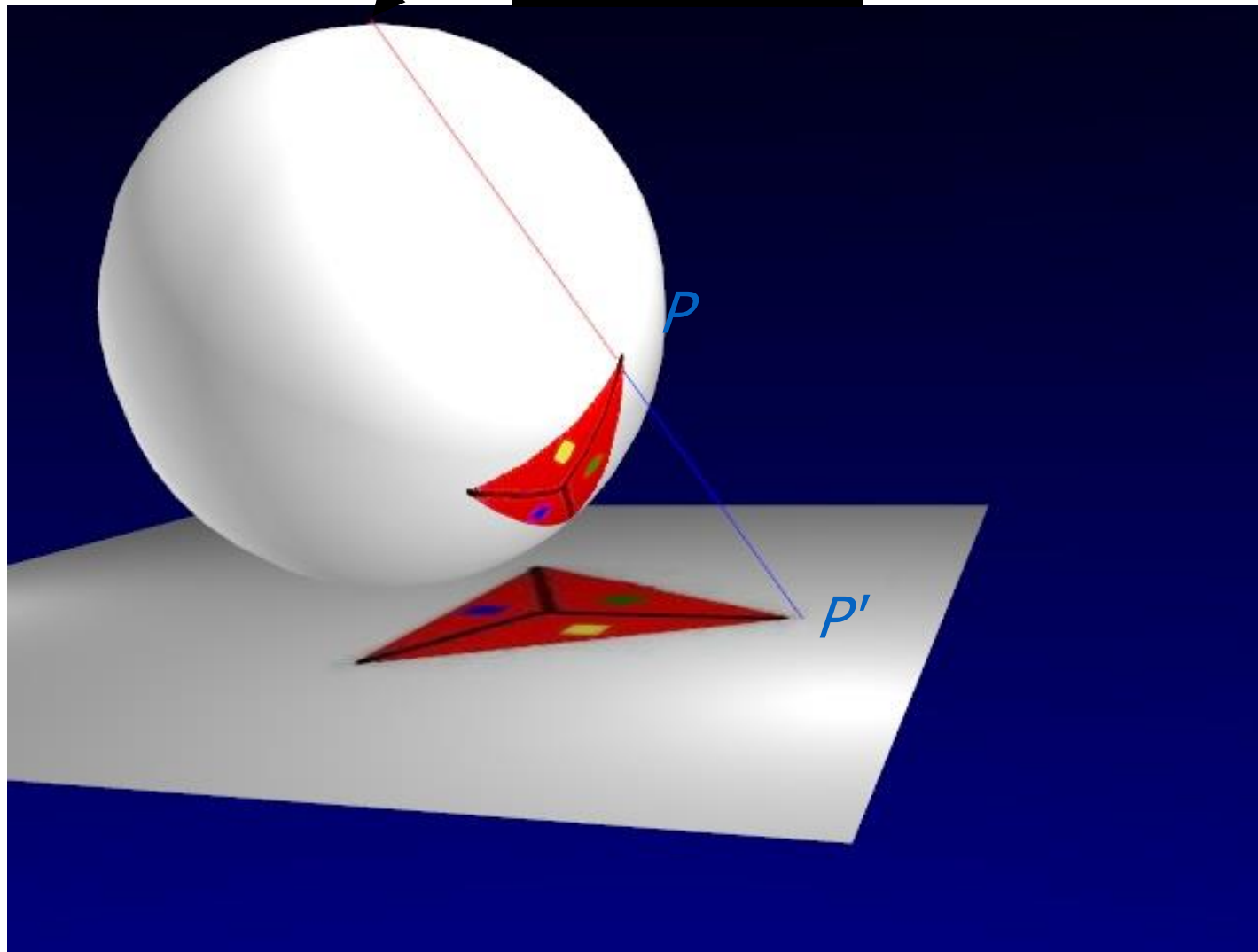
Egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.

Bizonyítás

Sztereografikus projekció. A gömböt a síkra helyezzük, (déli pólus), majd az északi pólusból egyeneseket húzunk a gráf pontjaihoz (éleinek pontjaihoz), ezen egyeneseknek a gömbbel levő másik metszéspontja lesz a vetített képpont.



Északi pólus



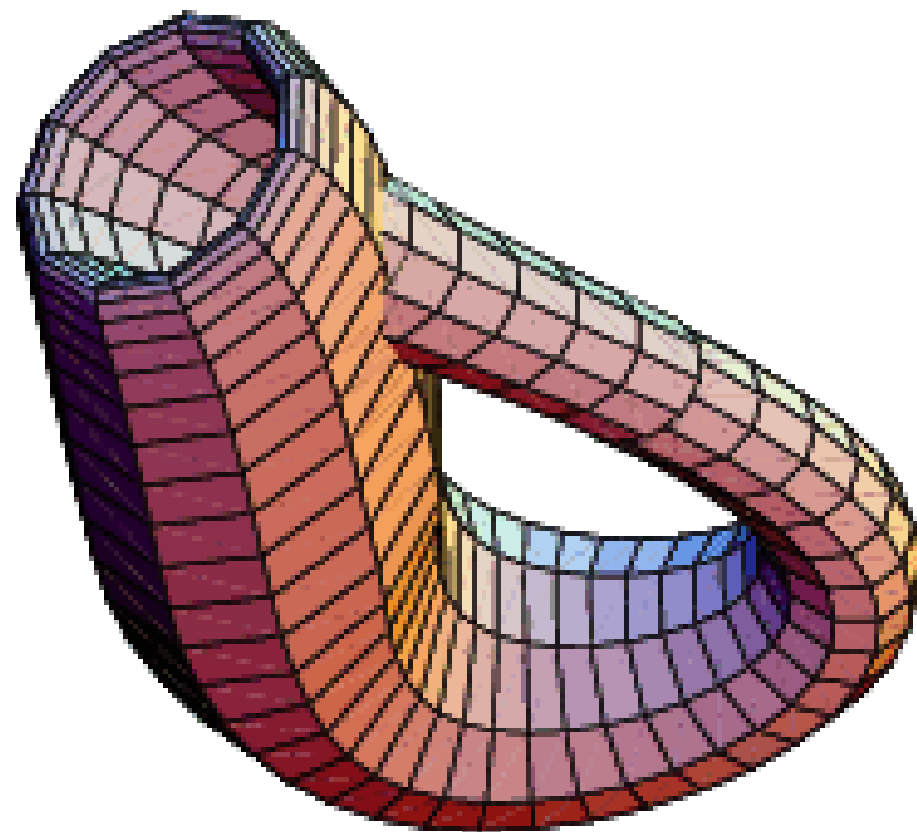
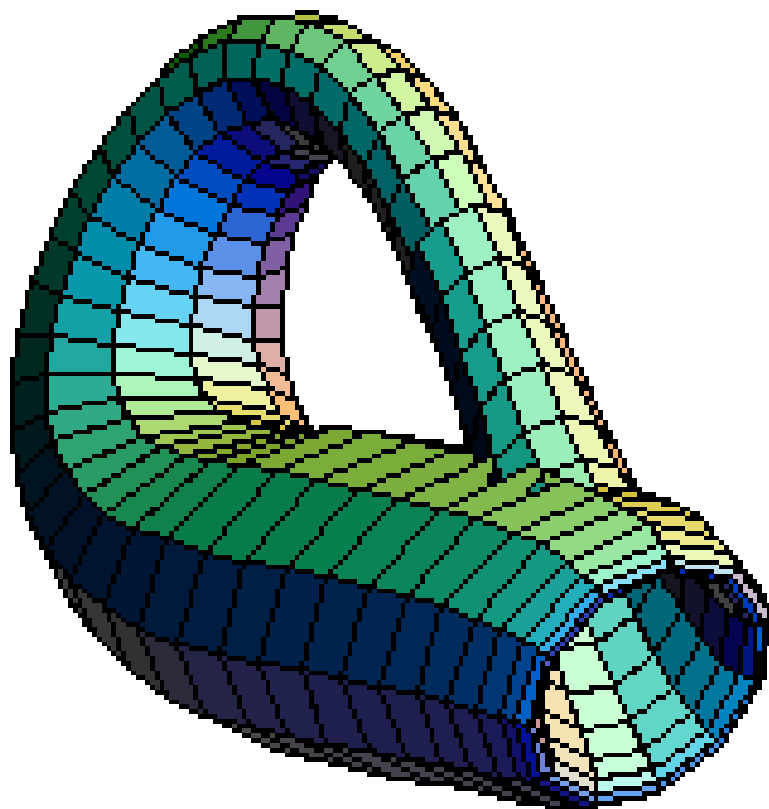
Az eljárás megfordítható, ha gömböt a rárajzolt gráffal együtt úgy tesszük le a síkra, hogy a gráf egyetlen pontja vagy éle se menjen át az északi póluson. (annak a képe ugyanis a végtelenben lenne).

A gömbön a külső és belső tartomány közti különbség eltűnik.

Állítás

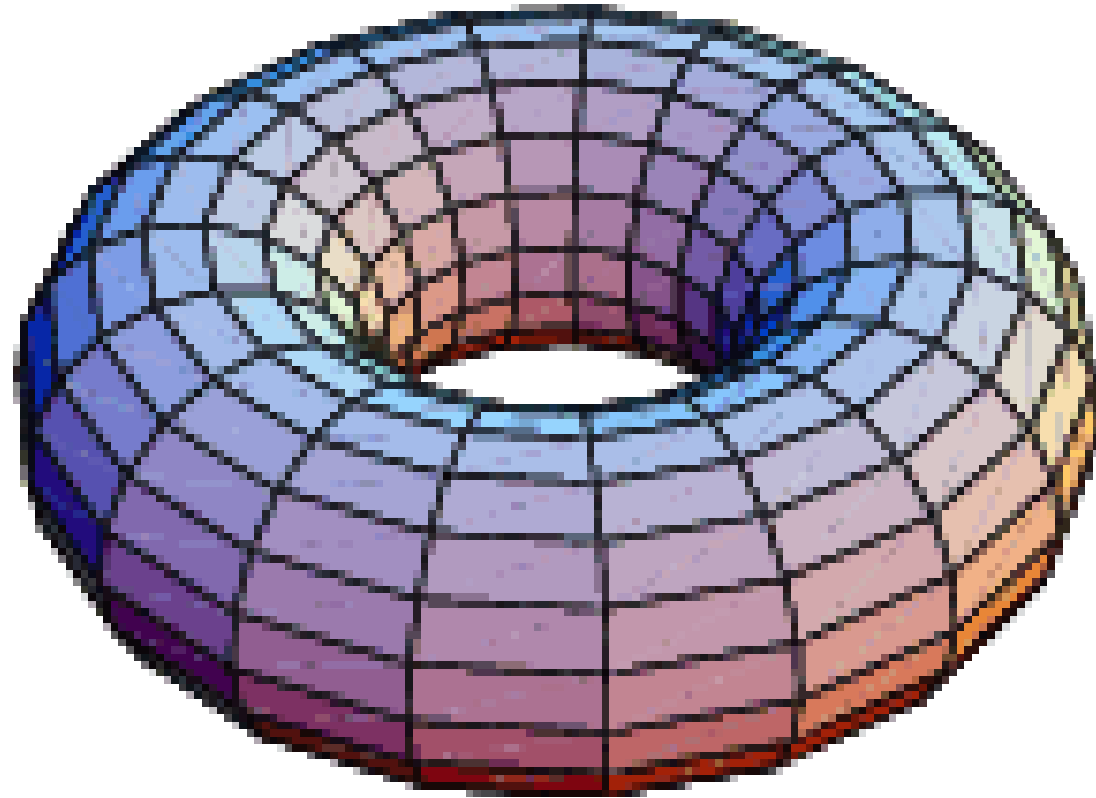
Egy síkbarajzolható gráf bármely tartománya lehet (egy másik) síkbarajzolásnál külső tartomány.

Klein-palack



<http://mathworld.wolfram.com/KleinBottle.html>

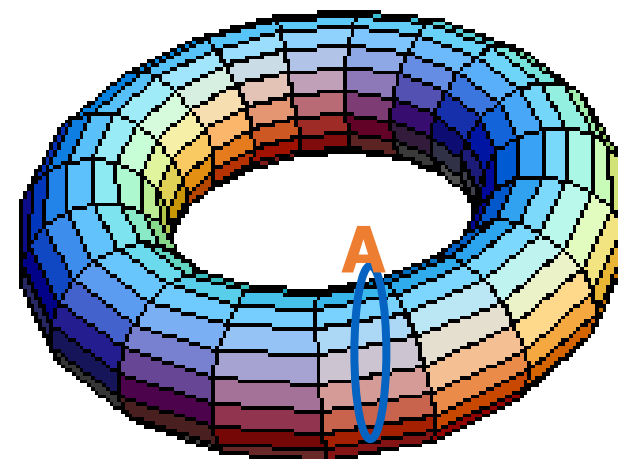
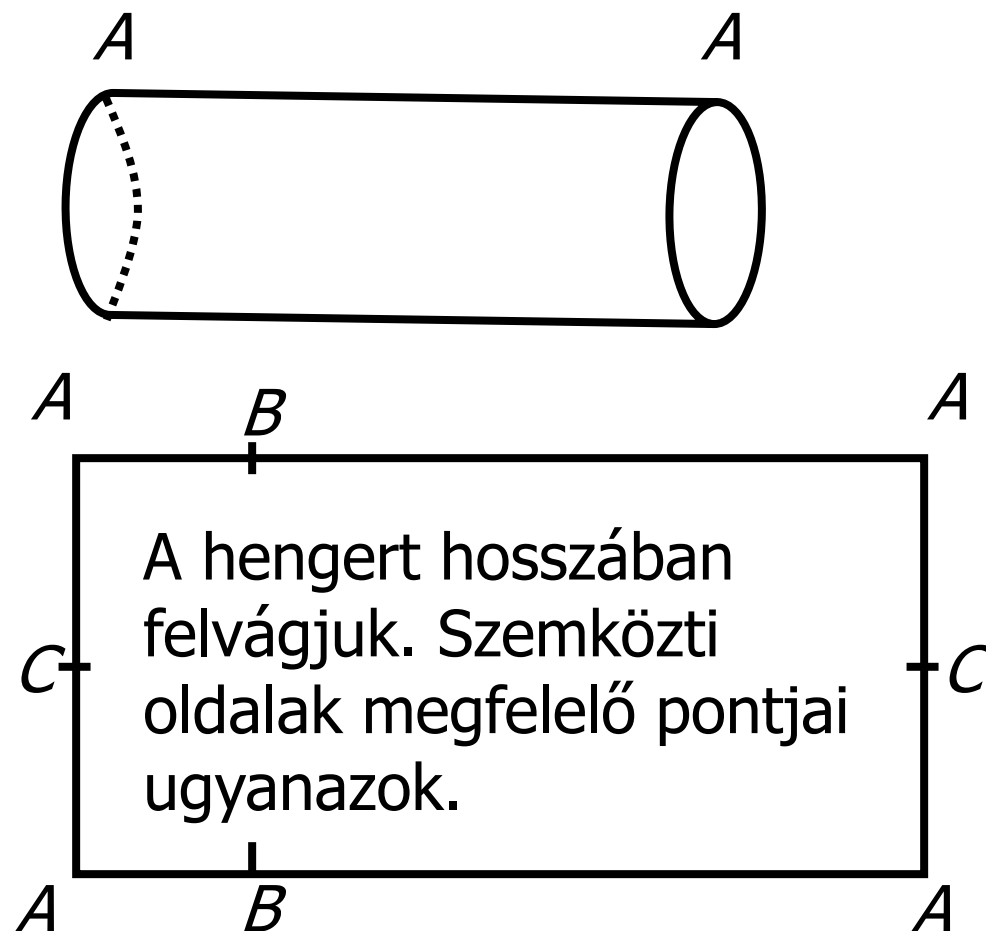
Tórusz



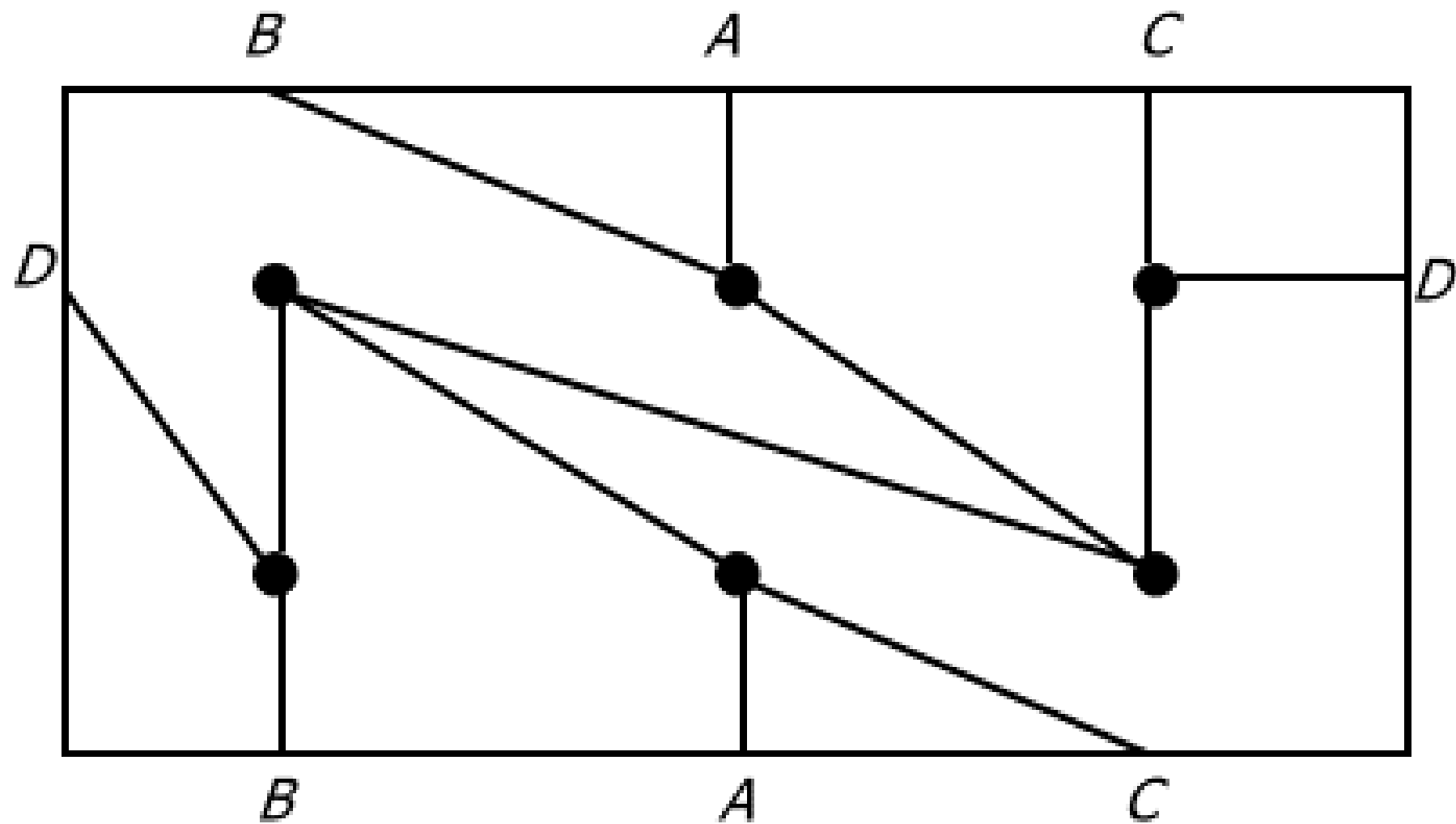
<http://mathworld.wolfram.com/Torus.html>

Rajzolás tóruszra

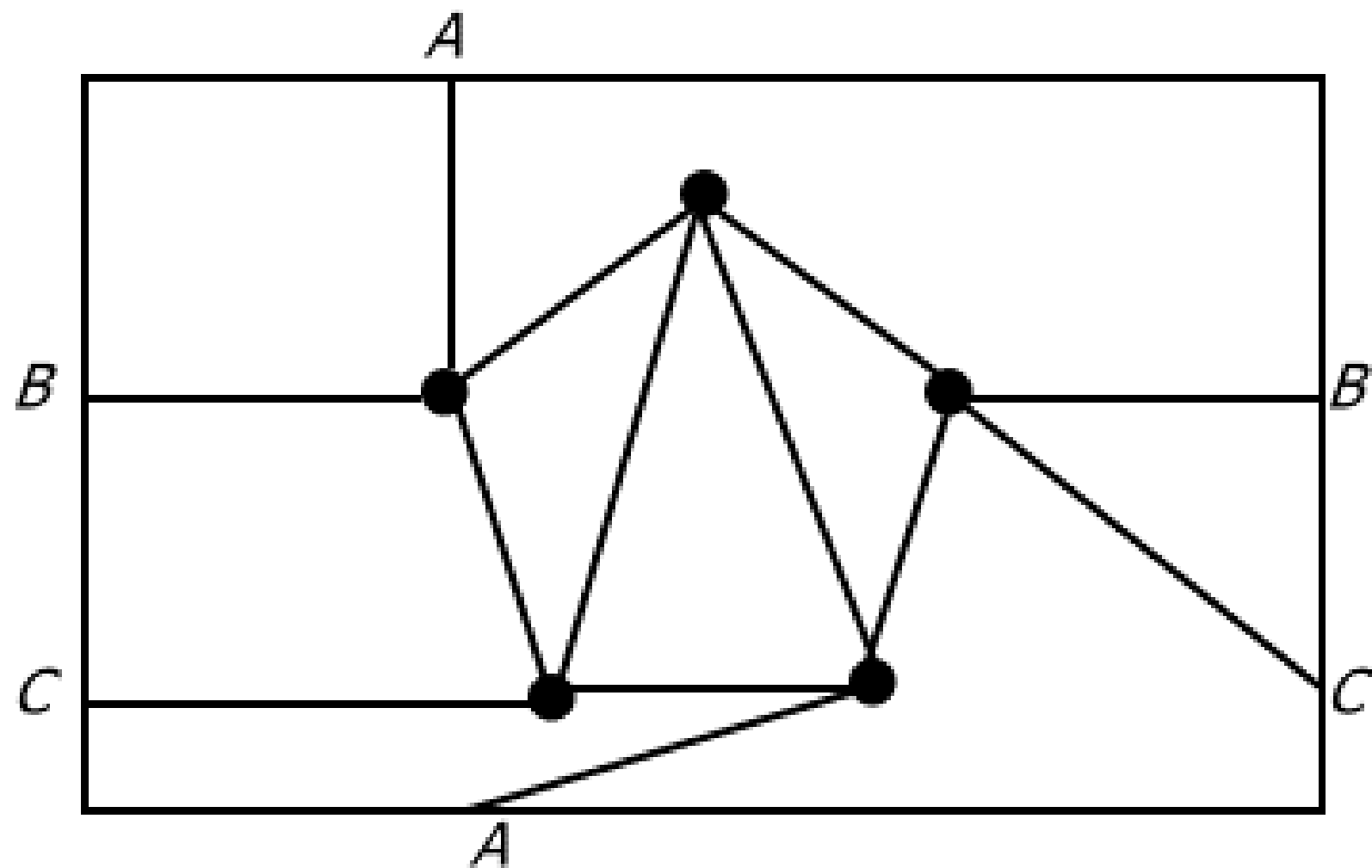
Felvágjuk a tóruszt keresztben: a két határkör ugyanaz.



$K_{3,3}$ tóruszra rajzolható:



K_5 tóruszra rajzolható:



Irodalom: www.renyi.hu/~sali/bbsz1204.ppt (3,10, 13 ábrák, 14,16-18, 22,23 diák)