

Gráfok

Gráfok reprezentációja mátrixokkal:

1. Szomszédsági mátrix:

Legyen $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf, $|V| = n$. A csúcsokat önkényesen sorba rendezzük: $v_1, v_2, \dots, v_n$. A G gráf $\underline{A}$ (vagy $\underline{A}_G$) szomszédsági mátrixa egy $n \times n$ típusú, négyzetes mátrix lesz (n a csúcsok számát jelöli), amelynek elemei:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \{v_i, v_j\} \text{ egy éle } G\text{-nek} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

A szomszédsági mátrix $n!$ féle lehet, mivel a csúcsokat $n!$ féleképpen tudjuk sorba rendezni.

A szomszédsági mátrix szimmetrikus. $a_{ij} = a_{ji}$

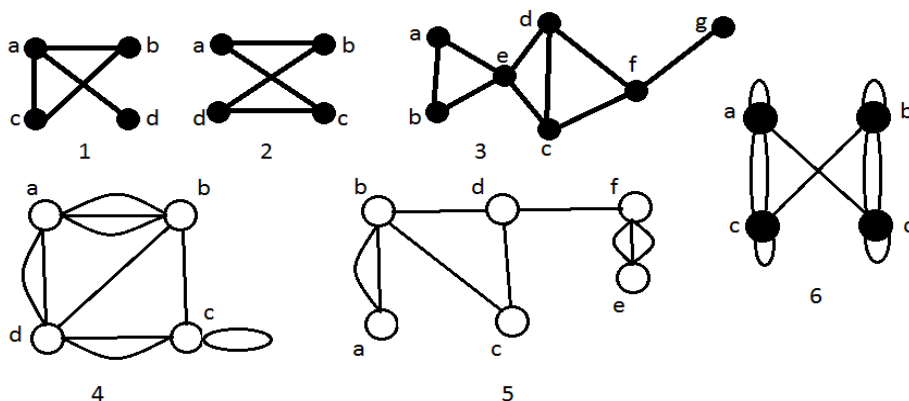
Egyszerű gráfban nincs hurok, ezért a főátlóban rendre nullák szerepelnek: $a_{ii} = 0 \quad \forall i - re.$

A szomszédsági mátrixok használhatók hurkokat és többszörös éleket tartalmazó gráfok reprezentációjára is.

Hurkot tartalmazó gráf esetén a főátlóban nem csak nullák állnak, azaz ha a v_i csúcsra illeszkedik hurok, akkor a szomszédsági mátrixban $a_{ii} = 1$.

Feladatok:

Adjuk meg az alábbi gráfok szomszédsági mátrixait. A megoldások alapján a mátrixból próbáljuk meg felírni az eredeti gráfot.



Megoldás:

$$\begin{aligned}
 &1. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &4. \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 5. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad 6. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

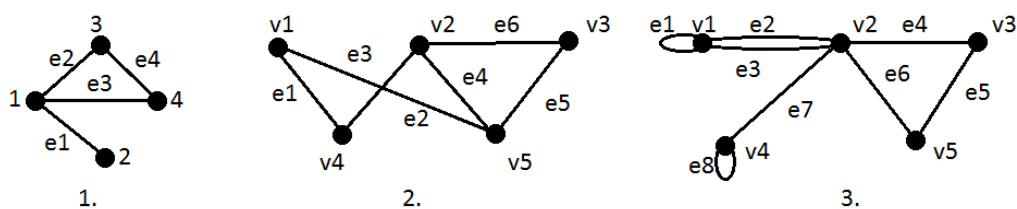
2. Illeszkedési mátrix:

Legyen $G = (V, E)$. Élei: $e_1, e_2, \dots, e_m$. Csúcsai: $v_1, v_2, \dots, v_n$. Az illeszkedési mátrix az élek és csúcsok fenti önkényesen megválasztott sorrendje mellett egy $n \times m$ típusú mátrix lesz, melynek elemei:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ illeszkedik az } e_j \text{ élre} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Feladatok:

Adjuk meg az alábbi gráfok illeszkedési mátrixait. A mátrix alapján írjuk fel az eredeti gráfot.



Megoldások:

$$\begin{aligned}
 &1. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Minimális súlyú feszítőfa keresése

Fa: összefüggő körmentes gráf.

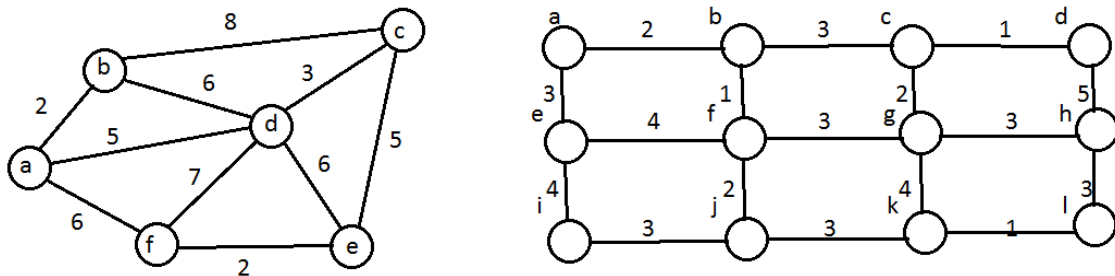
Feszítőfa: a gráf minden csúcsát tartalmazó fa. (Minden gráfnak van feszítőfája.)

Egy gráfnak több feszítőfája is lehetséges.

Probléma: Adott egy élsúlyozott gráf. Feladat a minimális súlyú feszítőfa megkeresése.

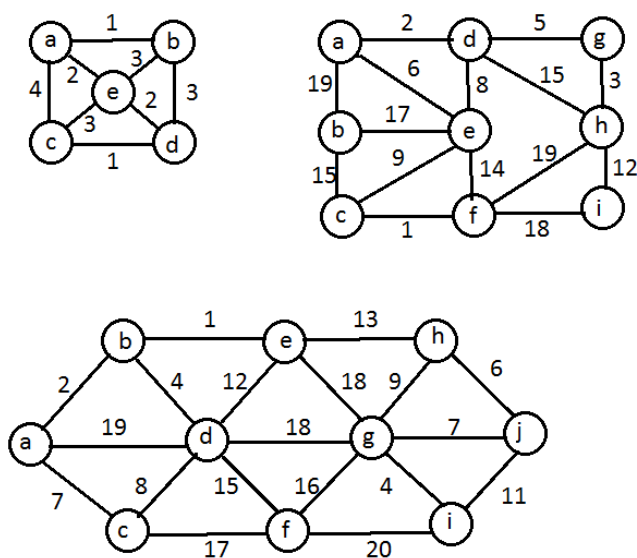
Prím algoritmus: A legkisebb súlyú élt választjuk ki elsőnek. Ehhez fűzzük hozzá a következő legkisebb súlyú élt, amely rá illeszkedik, DE kört nem alkothatnak.

Feladat: minimális súlyú feszítőfa keresése Prím algoritmussal



Kruskal algoritmus: A legkisebb élt választjuk elsőnek, majd nem feltétlenül illeszkedően választjuk a következő élt.

Feladat: minimális súlyú feszítőfa keresése Kruskal algoritmussal



Dijkstra algoritmus

Probléma:

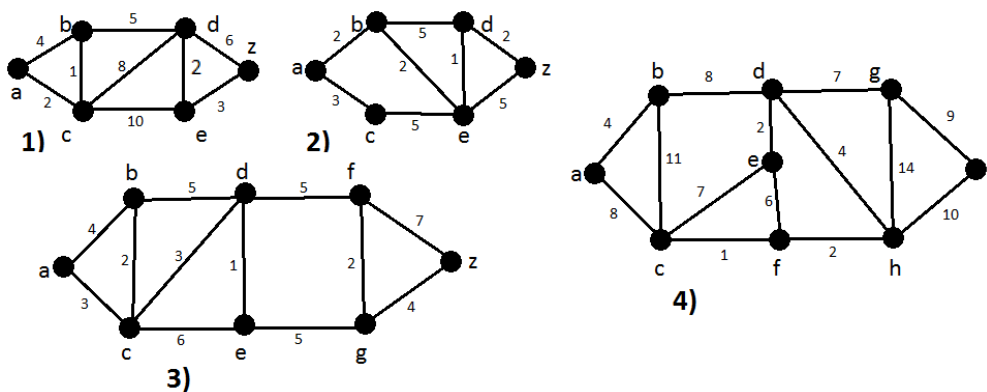
adott egy nem negatív élsúlyokkal rendelkező egyszerű, összefüggő gráf. Egy adott csúcsból szeretnénk eljutni a lehető legrövidebb úton egy másik adott csúcsba. (A legrövidebb út azt jelenti, hogy a legkisebb élsúlyösszegű út.)

Megoldás: Dijkstra algoritmus.

Röviden:

- Első lépés (iniciációs lépés) a kezdő csúcs címkéjét 0-ra , a többi csúcs címkéjét végtelenre állítjuk.
- Minden lépésben vegyük az ideiglenes címkével rendelkező csúcsok közül a lehető legkisebb címkéjűt (jelöljük ezt a csúcsot most v-vel). Ez a v csúcs ekkor már állandó címkéjű, ismerjük a hozzá vezető legrövidebb utat.
- v szomszédjaira kiszámítjuk a v-be vezető és onnan meghosszabbított útnak a hosszát. Ha ez kisebb lesz mint az eddigi címkéje, akkor ezzel az értékkel újracímkézzük.

Feladatok:



Megoldás:

1)

	b	c	d	e	z
	∞	∞	∞	∞	∞
a	4	2	∞	∞	∞
c	3	2	10	12	∞
b	3	2	8	12	∞
d	3	2	8	10	14
e	3	2	8	10	13

2)

	b	c	d	e	z
	∞	∞	∞	∞	∞
a	2	3	∞	∞	∞
b	2	3	7	4	∞
c	2	3	7	4	∞
e	2	3	5	4	8
d	2	3	5	4	7

3)

	b	c	d	e	f	g	z
	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
a	4	3	∞	∞	∞	∞	∞
c	4	3	6	9	∞	∞	∞
b	4	3	6	9	∞	∞	∞
d	4	3	6	7	11	∞	∞
e	4	3	6	7	11	12	∞
f	4	3	6	7	11	12	18
g	4	3	6	7	11	12	16

4)

	b	c	d	e	f	g	h	i
	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
a	4	8	∞	∞	∞	∞	∞	∞
b	4	8	12	∞	∞	∞	∞	∞
c	4	8	12	15	9	∞	∞	∞
f	4	8	12	15	9	∞	11	∞
h	4	8	12	15	9	25	11	21
d	4	8	12	14	9	19	11	21
e	4	8	12	14	9	19	11	21
g	4	8	12	14	9	19	11	21

Prüfer kód

A fák tárolására használjuk. (Prüfer kód és a fák közötti bijekció)

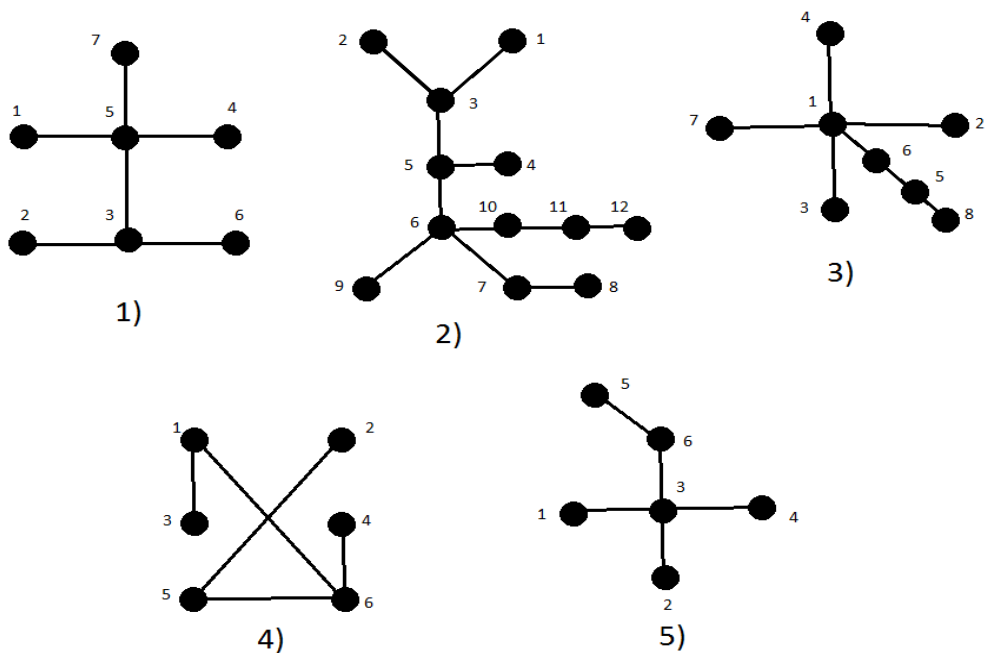
A Prüfer kód előállítás:

- a fa csúcsait sorszámozzuk meg 1-től n -ig
- keressük meg a legkisebb sorszámú levelet
- ezt a levelet hagyjuk el a hozzá illeszkedő éllel együtt, az él másik csúcsát pedig a Prüfer kód végére írjuk
- az előző két lépést addig ismételjük, amíg csak 2 csúcsunk marad

Az így kapott kód $n-2$ hosszú lesz n db. csúcs esetén, továbbá az eredeti fa leveleinek sorszáma nem lesz benne a kódban.

Feladatok

Írjuk fej az alábbi gráfok Prüfer kódját, majd a kódok alapján írjuk rajzoljuk fel a gráfot.



1) 5,3,5,3,5

2) 3,3,5,5,6,7,6,6,10,11

3) 1,1,1,1,6,5

4) 5,1,6,6

5) 3,3,3,6

Források: Rosen Discrete Mathematics and Its Application