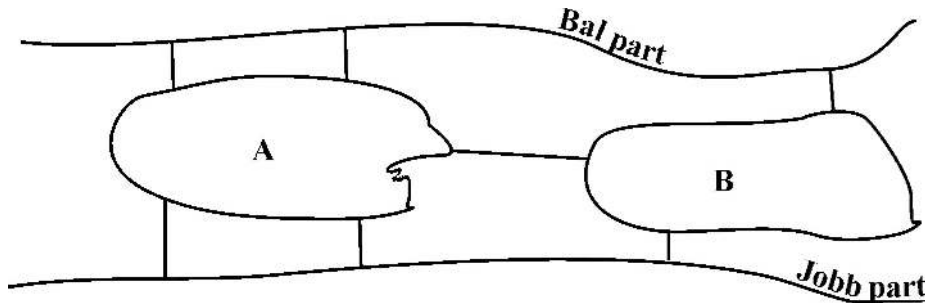


Euler-gráfok, Euler-utak, Hamilton-utak és Hamilton-körök

"Az út örök és tétlen
mégis mindent végbevisz észrevétlen..."

Lao-Ce, Tao Te King: Az Út és Erény könyve,
Weöres Sándor fordításában, Tericum Kiadó, 1994. (37 vers)

1. Euler-gráfok

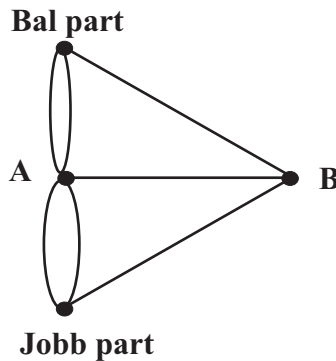


1. ábra.

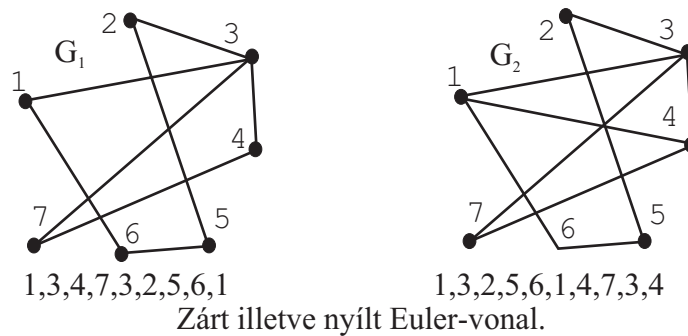
Leonard Euler (1707-1783) nevéhez kapcsolódik az első gráfelméleti munka, mely 1736-ban jelent meg a Szentpétervári Tudományos Akadémia közleményeiben. Az értekezését Euler az ún. Königsbergi hidak problémájával kezdte. A Pregel folyó A, B szigeteit hidak kötötték össze egymással és a partokkal is. Az A szigetet két párhuzamos híd kötötte össze a jobb parttal, egy híd a B szigettel, s ugyancsak két párhuzamos híd vezetett az A -ról a bal partra is. B -t egy-egy híd kötötte össze a bal és a jobb parttal is és B -ről vezetett egy híd A -ra is, melyet az előbb már említettünk. A kérdés az volt, be lehet-e járni a hidakat valamely fix C pontból oly módon, hogy minden hídon átmegyünk pontosan egyszer. Euler lényegében teljes általánosságban megoldotta a feladatot.

3.1. DEFINÍCIÓ. A $G = (E, \varphi, V)$ gráf $L = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$ vonalát ($\varphi(e_1) = (v_0, v_1)$, $\varphi(e_2) = (v_1, v_2), \dots, \varphi(e_n) = (v_{n-1}, v_n)$) *Euler-vonalnak* nevezzük, ha E minden élét pontosan egyszer tartalmazza. S *zárt Euler-vonalnak* mondjuk, ha $v_0 = v_n$, egyébként pedig ha $v_0 \neq v_n$, akkor L -et *nyílt Euler-vonalnak* hívjuk.

Ha valamely gráfnak van zárt Euler-vonala, szokás azt Euler-gráf névvel illetni. Nyilván egy Euler-gráf összefüggő és bármely csúspontjának a foka páros, mivel ha az Euler-vonala betér valamely csúspontba, mind annyszor ki is megy onnan. Megjegyezzük, hogy van, aki Euler-gráfnak nevez olyan gráfot, amelynek bármely csúcsfoka páros. A következő tétel lényegében Eulertól származik.



2. ábra.



3. ábra.

3.1. TÉTEL. *A G gráf akkor és csak akkor Euler-gráf, ha összefüggő és bármely csúcsának a foka páros.*

A tételre két különböző bizonyítást adunk. Az első egy konstruktív bizonyítás, amely lényegében algoritmust ad Euler-gráf Euler-vonalának a megkeresésére. A második bizonyítás rövid, s tömör, de csak az Euler-vonal létezését igazolja, s nem ad ötletet arra, hogyan lehet találni egy konkrét Euler-vonalat.

I. Bizonyítás: Az, hogy egy Euler-gráf szükségképpen összefüggő és minden csúcspontjának a foka páros, az remélhetően világos a tétel előtti sorokból. A feltétel elégséges voltához tekintsük a G gráf valamely zárt vonalát. Zárt vonala van G -nek, mivel G valamely v_0 pontjából elindulva egy v_0 -ra illeszkedő e_1 élen¹ eljutunk v_1 -be, s v_1 -ből e_2 mentén v_2 -be, és így tovább $v_0e_1v_1e_2v_2 \dots v_{i-1}e_iv_i \dots v_{k-1}e_kv_k$. Végül e_k elvisz $v_k = v_j$ -be ($j < k$), ahol a v_j olyan csúcsot jelöl, amelyben már jártunk. Nem mehetünk mindig új csúcsba, mivel G -nek véges sok csúcsa van csupán. Legyen ez a létező zárt útja G -nek L_1 -gyel jelölve. A csúcsok és élek esetleges újraindexelése után feltehetjük, hogy $L_1 = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots v_{i-1}e_iv_i \dots v_{k-1}e_kv_0$. Ha az L_1 élsorozat tartalmazza a G gráf valamennyi élet, akkor kész vagyunk. Ha nem tartalmazza például az e' élt és u_1, u_2 ezen él végpontjai, akkor u_1 -ből indulva az előbbiekhez hasonlóan találunk egy

¹A v_0 csúcs foka $\delta(v_0) \geq 2$, egyrészt G összefüggősége miatt $\delta(v_0) > 0$, másrészt a csúcsok fokszámainak páros volta miatt $\delta(v_0) \geq 2$, s ezért létezik legalább egy e_1 él, mely illeszkedik v_0 -ra.

ugyancsak u_1 -ben végződő L_2 zárt vonalat. Természetesen ügyelnünk kell arra, hogy L_1 éleit ne válasszuk be L_2 élei közé. Ha u_1 az L_1 zárt vonal valamely élére is illeszkedett (vagy L_2 valamely másik csúcspontja illeszkedett L_1 -re), akkor az L_1, L_2 zárt vonalakat lehet egyetlen zárt vonalnak tekinteni. Megtehetjük ugyanis azt, hogy az L_1, L_2 vonalakat valamely közös u_j pontjukból járjuk végig. Először L_1 -et, majd ugyancsak u_j -ből L_2 -t járjuk be. Ha az L_1 ill. L_2 vonalaknak nem volna közös csúcspontja, akkor L_2 -t cseréljük ki oly módon, hogy először vezessünk u_1 -ből olyan utat² L_1 valamely csúcspontjába, amelynek nincs közös éle L_1 -gyel, s ezt az utat egészítsük ki az L'_2 zárt vonallá az előbbi módon. Ha nem maradt ki él, akkor kész vagyunk. Ha maradt ki él, akkor megismételjük az előbbi eljárást és mivel a gráfunk véges, előbb vagy utóbb az eljárásunk véget ér és megadja a G gráf egy zárt Euler-vonalát. $\square$

Reméljük, a Tisztelt Olvasó felfigyelt arra, hogy az elmondott bizonyításunk lényegében algoritmust ad a G gráf Euler-vonalának meghatározására. Le lehet rövidíteni a fenti bizonyítást, de akkor elvész az algoritmikus jelleg. Nézzük most a látszólag elegánsabb, "rövidebb" bizonyítást.

II. Bizonyítás: Legyen G -nek $L = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots v_{i-1}e_iv_i \dots v_{k-1}e_kv_k$ a leghosszabb vonala. Ha L tartalmazza G minden élet, kész vagyunk. L Euler-vonala G -nek. Ha L nem tartalmazza például G -nek az f élet (ez az indirekt feltevésünk), akkor G összefüggő volta miatt feltehető, hogy f egyik végpontja mondjuk w egybeesik L valamely csúcspontjával. Az L vonal maximális voltából és abból, hogy G -nek minden csúcs foka páros, következik, hogy L zárt, azaz $v_k = v_0$. L zártsága miatt bejárhatjuk L éleit w -ből indulva, s mikor utoljára visszaérünk w -be, menjünk tovább f másik végpontjába. Az így kapott L' vonalnak eggyel több éle volna, mint L -nek, s ez ellentmondana L maximális vonal voltának. Az ellentmondás oka, hogy feltettük, hogy L maximális és van olyan él G -nek, amely nincs L -ben. $\square$

3.2. TÉTEL. A következő állítások a $G=(E, \varphi, V)$ összefüggő gráfra ekvivalensek:

1. $G=(E, \varphi, V)$ Euler-gráf, azaz van zárt Euler-vonala.
2. $G=(E, \varphi, V)$ minden csúcsának a foka páros.
3. $G=(E, \varphi, V)$ élidegen körök uniója.

Bizonyítás: A bizonyítást az $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ séma alapján érdemes elvégezni.

$1 \Rightarrow 2$. Ahhoz, hogy az első állításból következik a második, elegendő azt észrevenni, hogy tetszőleges L zárt vonal, tetszőleges u csúcspontjára igaz, hogy ha L bejárása során λ esetben kimentünk u -ból, akkor L végigjárása során λ esetben u -ba be is tértünk. S ezért u foka $d(u) = 2\lambda$. Azaz G -nek valóban bármely csúcspontjának a fokszáma páros.

$2 \Rightarrow 3$. A G gráf összefüggőségéből és csúcsai foksámának páros voltából az adódik, hogy $\forall v \in V(G) : d(v) \geq 2$. Ha a G gráf tetszőleges v csúcspontjára teljesedik, hogy $d(v) \geq 2$, akkor v -ből elindulva kapunk G -nek egy L zárt vonalát. Zárt vonal mindig tartalmaz legalább egy kört. Ugyanis a zárt vonal $L = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots v_{i-1}e_iv_i \dots e_{j-1}v_j e_j \dots v_{k-1}e_kv_k$ valamely pontjából elsétálva a séta során az elsőnek megtalált ismétlődő pont $v_i = v_j$ közti rész $C = v_i e_{i+1} \dots e_{j-1} v_j$ kört ad. Tetszőleges kör bármely pontjának a fokszáma páros. Ha a G gráfunk valamely C körének éleit töröljük, akkor G bármely csúcspontjának a foka továbbra is páros marad. S mindaddig találunk újabb élidegen köröket, amíg az élek törlése után megmaradó gráfnak van

²A G összefüggősége miatt u_1 -ből L_1 bármely pontjába vezet út.

olyan v csúcspontja, melynek foka $d(v) \geq 0$. S az eljárás miatt a körök éleinek a halmazai diszjunktak.

$3 \Rightarrow 1$. Valóban, ha a G gráf összefüggő és élidegen körök uniója, akkor be lehet járni a gráf éleit oly módon, hogy minden élen csak egyszer megyünk végig. Bizonyítsunk mondjuk a körök száma szerinti teljes indukcióval. Ha csak egy élidegen körből áll a gráf, akkor az az egy kör önmagában lesz egy zárt Euler-vonal. Ha már $k - 1$ kört bejártunk s a k -adik körrel a zárt vonalunknak az u pontja közös³, akkor járjuk be a $k - 1$ kör alkotta zárt vonalat u -ból elindulva, majd ha már visszatértünk u -ba, folytassuk a bejárást a k -adik kör éleinek a bejárásával. $\square$

3.3. TÉTEL. *Ha a G egyszerű összefüggő gráfnak, $2k$ darab páratlan fokú csúcspontja van, akkor élei lefedhetők k darab nyílt vonallal.*

Bizonyítás: Egészítsük ki a G gráfot k darab éllel G' -vé, oly módon, hogy G' minden csúcának a foka páros legyen, ez nyilván megtehető, ha ügyelünk arra, hogy az új élekkel mindig páratlan fokú csúcsokat kössünk össze. G' -re ekkor teljesedni fog a 3.1. tétel feltétele, s ezért lesz egy zárt Euler-vonala is, mely triviálisan tartalmazza az "új" k darab élt is. Ha a k darab új élt töröljük, k darab nyílt vonalat kapunk. (Miért nem kaphatunk kevesebbet k -nál?) S a bizonyítás ezzel kész. $\square$

2. Hamilton-körök, Hamilton utak

Sir Villiam Rován Hamilton⁴ (1805-1865) 1859-ben egy olyan játékot hozott forgalomba, melynek a lényege az volt, hogy egy előre megadott gráf csúcspontjait kellett bejárni, oly módon, hogy bármely csúcsban pontosan egyszer kellett járni. Állítólag a játéknak nem volt átütő sikere Hamilton kortársai között.

3.2. DEFINÍCIÓ. A $G = (E, \varphi, V)$ gráf $H = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$ útját ($\varphi(e_1) = (v_0, v_1)$, $\varphi(e_2) = (v_1, v_2), \dots, \varphi(e_n) = (v_{n-1}, v_n)$) *Hamilton-útnak* mondjuk, ha a $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ csúcsok mind különbözők és e csúcspontokon kívül más csúcspontja nincs G -nek.

³Vegye észre a Kedves Olvasó, s még jobb ha meg is indokolja, hogy ha a G összefüggő gráf éleit valamely u pontból végig lehetett járni egy zárt vonal mentén, oly módon, hogy minden élen csupán egyszer ment végig, s végül u -ba futott be, akkor a gráf bármely másik v pontjából elindulva is végig járhatja G éleit (s mindegyik élen csak egyszer menve végig) oly módon, hogy a bejárást v -ben fejezi be.

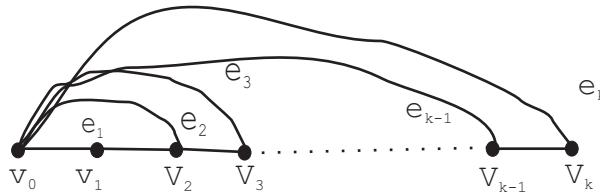
⁴Sir Villiam Rován Hamilton (1805-1865) Dublinban született, családja Skóciából származik. Nyelvi és matematikai tehetsége nagyon korán megmutatkozott. 15 éves korában már Newton és Laplace írásait olvasta. Saját maga a kvaterniók felfedezését tartotta legfontosabb eredményének. Ma e véleményével kevesen értenek egyet.



3.3. DEFINÍCIÓ. A $G=(E, \varphi, V)$ gráf K körét *Hamilton-körnek* mondjuk, ha K tartalmazza G minden csúcspontját.

Látszólag nagyon hasonló probléma, hogy valamely gráfnak az éleit járjuk be pontosan egyszer, vagy a csúcspontjait. Az utóbbi azonban jóval nehezebb. S az általános esetben Hamilton-utak illetve Hamilton-körök keresésére ma sem ismert igazán jó algoritmus. Operációkutatás területéhez tartozik az utazó ügynök problémája. Az utazó ügynök problémája azt jelenti, hogy a kereskedelmi utazónak adott városokat kell bejárnia, oly módon, hogy minden városba csak egyszer megy el, és végül visszatér a cégének a székhelyére. Ez esetben a gráf csúcspontjai az utazó által meglátogatandó városok, az élek pedig a városokat összekötő útvonalak. Természetesen egy-egy útnak jól meghatározott útiköltsége is van, s több út esetén célszerű azt az utat választani, melynek a költsége minimális. Ha valamely G gráf éleihez valós számokat rendelünk, akkor hálózatokról, folyamokról beszélünk. S nagyon természetesen vetődik fel minimális költségű ill. maximális nyereségű utak esetleg körök keresése. Az előbb említett feladatok a kombinatorikus optimalizálás tárgykörébe tartoznak. A következő tétel megfogalmazása előtt említjük meg, hogy egy kör ill. út hosszán a bennük szereplő élek számát értjük.

3.4. TÉTEL. *Ha a G egyszerű gráfban bármely csúcspont foka legalább k ($k \geq 2$), akkor van a gráfban egy legalább $k + 1$ hosszúságú kör.*



4. ábra.

Bizonyítás: Legyen a G gráfnak az L út a leghosszabb útja. S ezen út csúcspontjait a kezdő ponttól indulva jelölje rendre $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$. Az, hogy v_0 foka legalább k , azt jelenti, hogy a v_0 -t v_1 -gyel összekötő e_1 élen kívül még legalább $k - 1$ él indul ki v_0 -ból. Ezen élek másik végpontjai szükségszerűen szerepelnek L csúcspontjai között, mert ellenkező esetben összeütközésbe kerülnénk azzal, hogy az L út a leghosszabb. Legyen e'_2 másik végpontja mondjuk v_2 , e'_3 végpontja v_3 és végül e'_k végpontja v_k . Ekkor az L útnak a v_0 -tól v_k -ig tartó rész útjának két végpontját köti össze e'_k , ezért egy kört kapunk, melyben legalább $k + 1$ él van, s ezzel a bizonyítás kész.

3.5. TÉTEL. *Ha a $G = (E, \varphi, V)$ egyszerű gráf bármely v csúcsának fokára teljesül, hogy $\delta(v) \geq \frac{|V|}{2} = \frac{n}{2}$, akkor G összefüggő.*

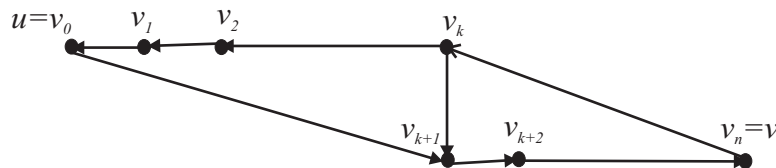
Bizonyítás: Legyen u és v két különböző csúcsa G -nek. A feltétel szerint u -val és v -vel is legalább $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}$ pont van összekötve az u -ból illetve v -ből induló élek által, a foksám feltétel miatt. Az előbb említett u -val, illetve v -vel közvetlenül összekötött pontok között van olyan, mely u -val is és v -vel is össze van kötve, (ha nem lenne ilyen, akkor G csúcsainak a száma

nagyobb egyenlő volna, mint $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 2$) azaz u és v között vezet út. $\square$

Ha adott a $G=(E, \varphi, V)$ gráf, a csúcsainak a számát $|V| = n$ szokás G rendjének, s éleinek számát $|E| = q$ a G gráf méretének mondani. Ha az u -t az e él összeköti a v csúccsal, akkor u -t ill. v -t az e él végpontjainak nevezzük és u -t ill. v -t szomszédosnak mondjuk. Az u csúcsponttal szomszédos csúcsok halmazát $N(u)$ -val jelöljük.

3.6. TÉTEL (O. Ore⁵, 1960). *Ha a G gráfra teljesül, hogy rendje $n \geq 3$ és bármely két nem szomszédos u, v csúcspont fokának az összege nagyobb egyenlő G rendjénél ($\delta(u) + \delta(v) \geq n$), akkor G -nek van Hamilton-köre.*

Bizonyítás: Indirekt bizonyítunk. Azon gráfok közül, melyekre a tétel feltételei teljesednek, de az állítás nem, tekintsük valamely G' gráfot, mely éleinek a száma maximális. Maximális abban az értelemben, hogy ha G' -hez hozzáveszünk egy olyan e élt, mely a nem szomszédos u és v csúcsokat köti össze, akkor az így kapott G gráf már tartalmazni fog Hamilton-kört. G' minden Hamilton-köre tartalmazza az e élt, ezért van olyan L Hamilton-útja G' -nek, mely u -t és v -t köti össze, legyen ez az út megadva $\varphi(e_1)=(v_0, v_1)$, $\varphi(e_2)=(v_1, v_2), \dots, \varphi(e_n)=(v_{n-1}, v_n)$ ($u = v_0, v = v_n$) által. A $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ csúcspontokkal kapcsolatban vegyük észre, hogy ha v_{k+1} szomszédos u -val, azaz v_{k+1} eleme $N(u)$ -nak, akkor v_k nem eleme $N(v)$ -nek. Ellenkező esetben a $v_0, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n, v_k, v_{k-1}, \dots, v_0$ Hamilton-köre volna G' -nek.

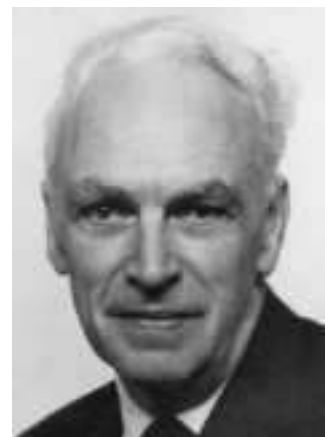


5. ábra.

Tehát a $V - \{v\}$ pontok közül az u -val szomszédos pontok nem szomszédosak v -vel, ezért $\delta(u) \leq (n-1) - \delta(v)$ s ez utóbbi egyenlőtlenség ellentmond a tétel feltételeinek. $\square$

Ore tételének speciális esete Dirac tétele:

⁵O. Ore 1899.X.7. Kristiania-ban a (a mai Oslo-ban Norvégiában) született és ott is halt meg 1968.VIII.13. Fiatal korában algebrai számelmélettel foglalkozott, később hálómélettel, gráfelmélettel. 1927-ben professzori kinevezést kapott a Yale egyetemre, 1931-ben a Yale egyetem kitűnő professzora címet kapta, s 37 évvel később 1968-ban onnan is ment nyugdíjba. Több könyvet írt a matematika különböző területeiről, számelméletről, négyszínsejtésről, gráfelméletről.



2.1. KÖVETKEZMÉNY (G. A. Dirac, 1952). Ha az $n = 2k$ ($2 < n$) csúcsú egyszerű G gráf bármely pontjának a foka legalább k , akkor van G -nek Hamilton-köre.

Valóban, G -ben létezik Hamilton-kör, mivel a következmény feltételei lényegében szigorúbbak, mint a 3.6. tétel feltételei.

Az időrendben való jobb tájékozódás végett egységes jelölés mellett felsoroljuk a Hamilton-körökre vonatkozó érdekesebb eredményeket. Jelölje a $G = (E, \varphi, V)$ gráf csúcspontjainak fokszámait rendre $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ ($|V| = n$).

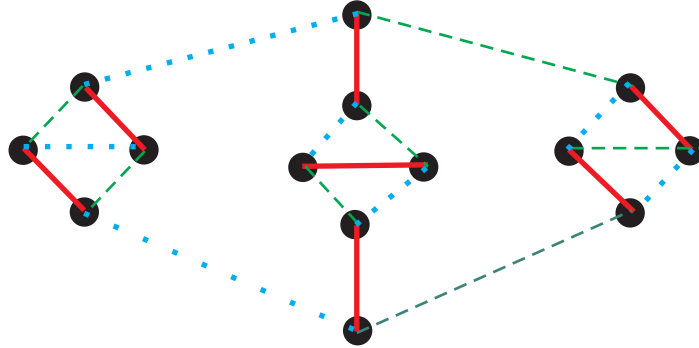
3.7. TÉTEL. Ha a $G = (E, \varphi, V)$ egyszerű gráfra ($2 < n$) a következő feltételek valamelyike teljesedik, akkor van G -nek Hamilton-köre:

1. G. A. Dirac (1952): $1 \leq k \leq n \Rightarrow d_k \geq \frac{1}{2}n$
2. O. Ore (1961): $u, v \in V$, de $(u, v) \notin E \Rightarrow \delta(u) + \delta(v) \geq n$
3. Pósa Lajos (1962): $1 \leq k \leq \frac{1}{2}n \Rightarrow d_k > k$
4. J. A. Bondy (1969): $j < k$, $d_j, d_k \leq k - 1 \Rightarrow d_j + d_k \geq n$
5. V. Chvátal (1972): $d_k \leq k < \frac{1}{2}n \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k$

3.4. DEFINÍCIÓ. A G gráf G' részgráfját G k -adfokú faktorának mondjuk, ha

- (i) G' csúcsainak halmaza megegyezik G csúcsainak halmazával,
- (ii) G' bármely csúcsa azonos k fokszámú.

A definícióból látható, hogy valamely G gráfnak a K Hamilton-köre egyben másodfokú faktora G -nek. A 6. ábrán látható gráfnak vastag, szaggatott, illetve pontozott vonallal jelöltük egy-egy



6. ábra.

elsőfokú faktorát. Ellenőrizze le a Kedves Olvasó, hogy a három elsőfokú faktor közül bármely kettő "szorzata" az ábrán látható gráfnak egy-egy másodfokú faktorát adja, de a gráfnak nincs Hamilton-köre, ugyanakkor a keletkező körök természetesen lefedik G csúcsait.

3.8. TÉTEL. Ha a G egyszerű összefüggő gráfnak van olyan k csúcsa, melyek törlése után $k + 1$ komponensre esik szét, akkor G -nek nincs Hamilton-köre.

Bizonyítás: Indirekt bizonyítunk. Elegendő arra gondolni, hogy egy kör k darab pontjának törlése után legfeljebb k részre eshet szét. $\square$

3.9. TÉTEL. *Ha a G egyszerű összefüggő gráfnak van olyan k pontja, melyek törlése után $k + 2$ komponensre esik szét, akkor G -nek nincs Hamilton-útja (s persze még kevésbé van Hamilton-köre).*

Bizonyítás: Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy G -nek az L Hamilton-útja, azaz L -re illeszkedik G minden csúcspontja. Bármely út, így persze L is, k darab pontjának a törlésével legfeljebb $k + 1$ részre bomlik, s ez ellentmond a tétel feltevésének, mely szerint legalább $k + 2$ részre kellene bomolnia. $\square$

3.5. DEFINÍCIÓ. Legyenek $G_1, G_2, \dots, G_k$ rendre $m_1, m_2, \dots, m_k$ -ad fokú faktorai a G gráfnak, ha

- (i) bármely i, j esetén G_i -nek illetve G_j -nek nincs közös éle,
 - (ii) a $G_1, G_2, \dots, G_k$ részgráfok együttvéve tartalmazzák G összes élet,
- akkor G -t ezen k számú faktor *szorzatának* mondjuk.

3. Az utazó ügynök problémája

Nem negatív élsúlyozott ($E(K_n) \xrightarrow{w} \mathbb{R}_+, \omega(e) \geq 0$) K_n teljes gráfban keresünk minimális súlyú C_H Hamilton-kört, azaz $\min_{C_H} \sum_{e \in E(C_H)} \omega(e)$.

3.1. A "legközelebbi szomszéd" algoritmus.

- Válasszuk ki K_n tetszőleges x csúcsát. S az x csúcsra illeszkedő élek közül válasszunk egy e minimális súlyút.
- A kiválasztott e él másik csúcspontja legyen y , jelöljük meg y -t is kiválasztott pontnak. Az y -ra illeszkedő azon élek közül, amelyek nem illeszkednek korábban kiválasztott pontra (ill. pontokra), válasszunk egy minimális súlyú e' élt.
- Ha már minden pontját megjelöltük K_n -nek, az algoritmus véget ér K_n egy súlyozott C_H Hamilton-körének megadásával.

MEGJEGYZÉS. A C_H kör függ az x kezdőpont megválasztásától. Az $S(C_H) = \sum_{e \in E(C_H)} \omega(e)$

szám egy **felső korlátot** ad az utazó ügynök problémára.

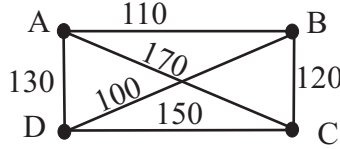
3.2. A rendezett élek algoritmus.

Feltesszük, hogy a K_n élsúlyozott teljes gráf élei súlyuk növekvő sorrendje szerint rendezve vannak.

- Válasszunk $e \in E(K_n)$ -t minimális súlyúnak.
- A ki nem választott élek közül válasszunk $e \in E(K_n)$ -t minimális súlyúnak, ügyelve arra, hogy egyik végpontja se illeszkedjen olyan pontra, amelyre már korábban kiválasztott élek közül már kettő illeszkedik és ne alkossanak a kiválasztott élek n csúcspontnál kevesebb pontból álló kört.
- Ha kiválasztott élek száma n , akkor megkaptuk K_n egy súlyozott C_H Hamilton-körét.

Alsó korlátot oly módon nyerhetünk az utazó ügynök problémára, ha észrevesszük, hogy K_n egy minimális súlyú C_H Hamilton-körének tetszőleges x pontját törölve a $K_n - x$ gráfnak egy súlyozott feszítőfáját kapjuk.

Keressünk a $K_n - x$ gráfban egy minimális súlyú T feszítőfát (például a Kruskal-algoritmussal). T élei súlyának az összegét jelölje $S(T)$, azaz $S(T) = \sum_{e \in E(T)} \omega(e)$. S az x -re illeszkedő élek közül a két legkisebb súlyú legyen e_1, e_2 , ekkor $S(C_H) \geq S(T) + \omega(e_1) + \omega(e_2)$. Ez azt jelenti, hogy az $S(T) + \omega(e_1) + \omega(e_2)$ egy alsó korlát az utazó ügynök problémára. A 7. ábra



7. ábra.

élsúlyozott G grófjának AB, BD, BC élei megadják egy minimális súlyú feszítőfáját, s az alsó korlát ekkor $k = 110 + 100 + 120 = 330$. A gráf B csúcsából indulva a legközelebbi szomszéd algoritmus rendre a BD, AD, AC, BC éleket adja, s nyerjük a $K = 100 + 130 + 170 + 120 = 520$ felső korlátot.

Feladatok

"Gyakorolj hát és törekedj, mint a régiek, hogy az újat megragadhasd; legfőbb szabályod ez legyen."

Kung Fu-ce: Lun-jü: II.könyv 11. fejezet.

1; Igazolja, hogy ha egy élt is tartalmazó G gráf minden pontjának foka páros, akkor kijelölhetők a gráfban körök úgy, hogy a gráf minden éle e körök közül pontosan egyben szerepeljen.

2; Bizonyítsa be, hogy ha az e él az összefüggő G gráfnak hídja, akkor G nem tartalmaz olyan kört, melyben az e él szerepel. (Definíció szerint a G összefüggő gráfnak az e élt *hídnak* mondjuk, ha e törlésével a G -ből kapott gráf már nem összefüggő.)

3; Bizonyítsa be, hogy ha a G összefüggő gráfnak nincs olyan köre, amely az e élt tartalmazza, akkor e hídja G -nek.

4; Igazolja, hogy ha a G irányított gráf nem üres, és bármely v pontjára $\delta_{be}(v) = \delta_{ki}(v)$, akkor G lefedhető körökkel oly módon, hogy bármely él pontosan egy körben szerepel.

5; Bizonyítsa be, hogy a teljes gráf tetszőleges irányítása mellett létezik olyan v pontja, melyből bármely másik ponthoz vezet legfeljebb kettő hosszúságú út.

6; Mutassa meg, hogy bármely G irányított gráfban a csúcsok kifokainak ill. befokainak összege az élek számával egyezik meg.

7; Bizonyítsa be, hogy bármely hidat nem tartalmazó összefüggő G gráf irányítható oly módon, hogy erősen összefüggő legyen. (A G irányított gráf *erősen összefüggő*, ha bármely pontjából bármely másik pontjába vezet irányított út.)

8; Mutassa meg, hogy igazak az alábbi állítások:

(i) Ha G nem üres gráf, összefüggő és bármely v pontjára $\delta_{be}(v) = \delta_{ki}(v)$, akkor G -nek van irányított Euler-vonala.

(ii) Ha a G nem üres irányított gráfnak van irányított Euler-vonala, akkor G bármely v pontjára $\delta_{be}(v) = \delta_{ki}(v)$ és G összefüggő.

9; Mutassa meg, hogy ha a G gráf nem üres és összefüggő, akkor élei bejárhatók oly módon, hogy minden élen kétszer megyünk végig és vissza térünk a kiindulási pontba. Az élek bejárása úgy is elvégezhető, hogy minden élt mindkét irányban pontosan egyszer járunk be.

10; Legyen a G_1 gráf olyan részgráfja G -nek, mely tartalmazza a G v csúcspontját és G_1 Euler-gráf, feltesszük még, hogy G v -ből tetszőlegesen bejárható. Töröljük G_1 éleit és a viszsamaradt izolált pontjait G -nek, a megmaradt gráfot jelölje G_2 . Mutassa meg, hogy G_1 és G_2 is v -ből tetszőlegesen bejárható. (A G gráfot v -ből *tetszőlegesen bejárhatónak* mondjuk, ha v -ből indulva és mindig be nem járt élen haladva szükségképpen G -nek valamely Euler-vonalát kapjuk.)

11; Mutassa meg, hogy ha páros számú utat úgy kapcsolunk össze, hogy kezdőpontjuk u -ra, végpontjuk v -re illeszkedik és u -n ill. v -n kívül más közös pontjuk nincs, akkor mind u -ból mind v -ből tetszőlegesen bejárható gráfot kapunk. Mutassa meg, hogy bármely u -ból ill. v -ből tetszőlegesen bejárható G gráf előállítható az előbbi módon.

12; Igazolja, hogy a kettőnél több pontjukból tetszőlegesen bejárható G gráfok körök.

13; Jelölje a G irányított gráf csúcsait rendre $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$, mutassa meg, hogy a $\sum_{i=0}^n |\delta_{ki}(v_i) - \delta_{be}(v_i)|$ szám páros.

14; Vizsgálja meg, hogy a 4 x 4-es sakktáblát be lehet-e járni egyetlen lóval lóugrásokkal oly módon, hogy mindig olyan mezőre lépünk, melyen korábban még nem jártunk! (Tetszőlegesen választott mezőről indulhatunk.)

15; Végig lehet-e járni az 5 x 5-ös sakktáblát az előbb említett módon?

16; Bizonyítsuk be, hogy ha egy társaságnak bármely tagja ismer a társaságból legalább k embert, akkor közülük leültethető egy kerek asztal mellé legalább $k + 1$ személy oly módon, hogy mindenkinek a két szomszédja ismerőse is egyben. (Feltételezzük, hogy $k \geq 2$ és az ismeretségek kölcsönösek.)

17; Bizonyítsa be, hogy ha az előbbi feladatban említett társaság 6 főből áll és $k = 3$, akkor mind a hatan leültethetők egy asztal mellé az előző feladat feltételeinek megfelelően.

18; Legyen a G gráf csúcspontjainak a száma $n \geq 4$. Mutassa meg, hogy ha az n pontú egyszerű gráfban bármely $\frac{n-1}{2} > k$ pozitív egész k -ra a k -nál nem nagyobb fokú pontok száma kevesebb mint k , akkor a G gráf összefüggő.

19; Mutassa meg, hogy ha az egyszerű összefüggő G gráf K körének bármely e élének törlése után a G leghosszabb útját kapjuk, akkor K Hamilton-köre G -nek.

20; Igazolja, hogy ha egy n csúcspontú egyszerű gráf bármely leghosszabb útjának végpontjai foksámainak összege n , akkor a leghosszabb utak között van olyan, melynek a végpontjai szomszédosak.

21; Mutassa meg, hogy ha valamely sakk versenyen mindenki mindenkivel egyszer mérkőzött, és döntetlen nem volt, akkor a versenyzők sorba rendezhetők oly módon, hogy mindenki győzött az utána következő ellen.

22; Bizonyítsa be, hogy a legalább 2 pontú teljes gráfnak bármely irányítása mellett van irányított Hamilton-útja.

23; Irányítsa az 5 szögpontú teljes gráfot oly módon, hogy ne legyen a kapott gráfnak irányított Hamilton-köre!

24; Rajzoljon olyan 6 pontú 11 élű egyszerű gráfot melynek nincs Hamilton-köre.

25; Helyezzen el, az oktaéder minden lapjára egy-egy a lapot pontosan fedő tetraédert. Mutassa meg, hogy az így létrejött test élhálózatából álló gráfnak nincsen sem Hamilton-köre, sem Hamilton-útja.

26; Hány Hamilton-köre van a tetraéder ill. hexaéder (kocka) gráfjának.

27; Ha egy összefüggő gráf nem egyrétűen járható be (tehát legalább négy páratlan fokú csúcsot tartalmaz), akkor legalább két különböző minimális lefedése van. (A lehető legkevesebb vonalból álló lefedéseit egy gráfnak minimális lefedésnek mondjuk, és egy vonalhalmaz lefedő, ha a gráf minden élét legalább egyszer tartalmazza.)

28; A K_n ($n > 2$) teljes gráf éleit két színnel, pirossal és zölddel színeztük ki. Bizonyítsa be, hogy K_n -nek lesz olyan k Hamilton-köre, mely egyszínű, vagy legfeljebb két egyszínű ívből áll. (Szorgalmi)