

Amit tudni kell, ami olvasmány

III. Euler-gráfok, Euler-utak, Hamilton-utak és Hamilton-körök

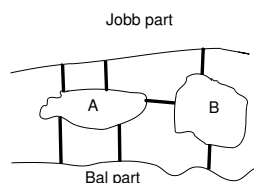
Részlet: http://www.inf.unideb.hu/oktatas/mobidiak/Turjanyi_Sandor/Bev._a_komb._es_a_grafelméletbe/3.pdf

“
Az út örök és tétlen
mégis mindent végbevisz észrevétlen...”

Lao-C

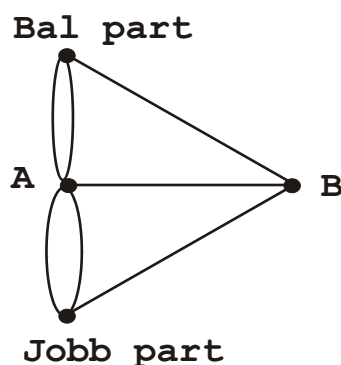
e, Tao Te King, Az Út és Erény könyve, Weöres Sándor fordításában, Tericum Kiadó, 1994, (37 vers)

III.1. Euler gráfok:



1. ábra

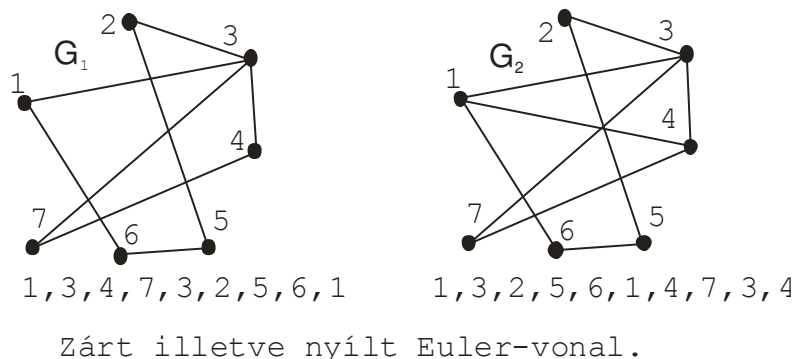
Leonard Euler (1707-1783) nevéhez kapcsolódik az első gráfelméleti munka, mely 1736-ban jelent meg a Szentpétervári Tudományos Akadémia közleményeiben. Az értekezését Euler az ún. Königsbergi hidak problémájával kezdte. A Pregel folyó A, B szigeteit hidak kötötték össze egymással és a partokkal is. Az A szigetet két párhuzamos híd kötötte össze a jobb parttal, egy híd a B szigettel, s ugyancsak két párhuzamos híd vezetett az A-ról a bal partra is. B-t egy-egy híd kötötte össze a bal és a jobb parttal is és B-ről vezetett egy híd A-ra is, melyet az előbb már említettünk. A kérdés az volt, be lehet e járni a hidakat valamely fix C pontból oly módon, hogy minden hídon átmegyünk pontosan egyszer. Euler lényegében teljes általánosságban megoldotta a feladatot.



2. ábra

III.1. Definíció: A $G = (E, \varphi, V)$ gráf L élsorozatát $(\varphi(e_1) = (v_0, v_1), \varphi(e_2) = (v_1, v_2), \dots, \varphi(e_n) = (v_{n-1}, v_n))$ -t Euler-vonalnak nevezzük, ha E minden élét pontosan egyszer tartalmazza. S zárt Euler-vonalnak mondjuk, ha $v_0 = v_n$, egyébként pedig ha $v_0 \neq v_n$ akkor L -t nyílt Euler-vonalnak hívjuk.

Ha valamely gráfnak van zárt Euler-vonala szokás azt Euler-gráf névvel illetni. Nyilván egy Euler-gráf összefüggő és bármely csúcspontjának a foka páros, mivel ha az Euler-vonala betér valamely csúcspontba mind annyszor ki is megy onnan. Megjegyezzük, hogy van aki Euler-gráfnak nevez olyan gráfot, amelynek bármely csúcsfoka páros. A következő tétel lényegében Eulertől származik.



3. ábra

III.1. Tétel: *A G gráf akkor és csak akkor Euler-gráf, ha összefüggő és bármely csúcsának a foka páros.*

A tételre két különböző bizonyítást adunk. Az első egy konstruktív bizonyítás, amely lényegében algoritmust ad Euler-gráf Euler-vonalának a megkeresésére. A második bizonyítás rövid, s tömör, de csak az Euler-vonal létezését igazolja, s nem ad ötletet arra, hogyan lehet találni egy konkrét Euler-vonalat.

Bizonyítás I.: Az, hogy egy Euler-gráf szükségképpen összefüggő és minden csúcspontjának a foka páros, az remélhetően világos a tétel előtti sorokból. A feltétel elégséges voltához tekintsük a G gráf valamely zárt vonalát. Zárt vonala van G -nek, mivel G valamely v_0 pontjából elindulva egy v_0 -ra illeszkedő e_1 élen eljutunk v_1 -be, s v_1 -ből e_2 mentén v_2 -be, és így tovább $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{i-1} e_i v_i \dots v_{k-1} e_k v_k$. Végül e_k elvisz $v_k = v_j$ -be ($j < k$), ahol a v_j olyan csúcsot jelöl, amelyben már jártunk. Nem mehetünk mindig új csúcsba, mivel G -nek véges sok csúcsa van csupán. Legyen ez a létező zárt útja G -nek L_1 -el jelölve. A csúcsok és élek esetleges újraindexelése után feltehetjük, hogy $L_1 = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{i-1} e_i v_i \dots v_{k-1} e_k v_k$. Ha azt L_1 élsorozat tartalmazza a G gráf valamennyi élet, akkor kész vagyunk. Ha nem tartalmazza például az e' élt és u_1, u_2 ezen él két végpontja, akkor u_1 -ből indulva az előbbiekhöz hasonlóan találunk egy ugyancsak u_1 -ben végződő L_2 zárt vonalat. Természetesen ügyelnünk kell arra, hogy L_1 éleit ne válasszuk be L_2 élei közé. Ha u_1 az L_1 zárt vonal valamely élére is illeszkedett (vagy L_2 valamely másik csúcspontja illeszkedett L_1 -re), akkor az L_1, L_2 zárt vonalakat lehet egyetlen zárt vonalnak tekinteni. Megtehetjük ugyanis azt, hogy az L_1, L_2 vonalakat valamely közös u_j pontjukból járjuk végig. Először L_1 -t majd utána ugyancsak u_j -ből L_2 -t járjuk be. Ha az L_1 ill. L_2 vonalaknak nem volna közös csúcspontja, akkor L_2 -t cseréljük ki oly módon, hogy először vezessünk u_1 -ből utat L_1 valamely csúcspontjába, olyan utat, amelynek nincs közös éle L_1 -el, s ezt az utat egészítsük ki az L_2' zárt vonallá az előbbi módon. Ha nem maradt ki él kész vagyunk, ha igen akkor

1 A v_0 csúcs foka $d(v_0) \geq 2$, egyrészt G összefüggősége miatt $d(v_0) > 0$, másrészt a csúcsok fokszámainak páros volta miatt $d(v_0) \geq 2$, s ezért létezik legalább egy e_1 él, mely illeszkedik v_0 -ra.

2 A G összefüggősége miatt u_1 -ből L_1 bármely pontjába vezet út.

megismétljük az előbbi eljárást és mivel a gráfunk véges előbb vagy utóbb az eljárásunk véget ér és megadja a G gráf egy zárt Euler-vonalát.

Reméljük a Tisztelt Olvasó felfigyelt arra, hogy az elmondott bizonyításunk lényegében algoritmust ad a G gráf Euler-vonalának meghatározására. Le lehet rövidíteni a fenti bizonyítást, de akkor elvész az algoritmikus jelleg. Nézzük most a látszólag elegánsabb, "rövidebb" bizonyítást.

Bizonyítás II.: Legyen G -nek $L = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{i-1} e_i v_i \dots v_{k-1} e_k v_k$ a leghosszabb vonala. Ha L tartalmazza G minden élét kész vagyunk. L Euler-vonala G -nek. Ha L nem tartalmazza például G -nek az f élét (ez az indirekt feltevésünk), akkor G összefüggő volta miatt feltehető, hogy f egyik végpontja mondjuk w egybeesik L valamely csúcspontjával. Az L vonal maximális voltából és abból, hogy G -nek minden csúcs foka páros következik, hogy L zárt azaz $v_k = v_0$. L zártsága miatt bejárhatjuk L éleit w -ból indulva, s mikor utoljára visszaérünk w -ba menjünk tovább f másik végpontjába. Az így kapott L' vonalnak eggyel több éle volna, mint L -nek, s ez ellentmondana L maximális vonal voltának. Az ellentmondás oka, hogy feltettük, hogy L maximális és van olyan él G -nek amely nincs L -ben.

III.2. Tétel: A következő állítások a $G = (E, \varphi, V)$ összefüggő gráfra ekvivalensek:

1. $A \ G = (E, \varphi, V)$ Euler gráf azaz van zárt Euler vonala.
2. $G = (E, \varphi, V)$ minden csúcsának a foka páros.
3. $G = (E, \varphi, V)$ élidegen körök uniója.

Bizonyítás: A bizonyítást $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ séma alapján érdemes elvégezni.

$1 \Rightarrow 2$ Ahhoz, hogy az első állításból következik a második elegendő azt észrevenni, hogy tetszőleges L zárt vonal, tetszőleges u csúcspontjára igaz, hogy ha L bejárása során λ esetben kimentünk u -ból, akkor L végig járása során λ esetben u -ba be is térünk. S ezért u foka $d(u) = 2\lambda$. Azaz G -nek valóban bármely csúcspontjának a fokszáma páros.

$2 \Rightarrow 3$. A G gráf összefüggőségéből és csúcsai foksámának páros voltából az adódik, hogy $\forall v \in V(G) \Rightarrow d(v) \geq 2$. Ha a G gráf tetszőleges v csúcspontjáról teljeseedik, hogy $d(v) \geq 2$, akkor v -ből elindulva kapunk G -nek egy L zárt vonalát. Zárt vonal mindig tartalmaz legalább egy kört. Ugyanis a zárt vonal $L = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{i-1} e_i v_i \dots v_{j-1} e_j v_j \dots v_{k-1} e_k v_k$ valamely pontjából elsétálva a séta során az elsőnek megtalált ismétlődő pont $v_i = v_j$ közti rész $C = v_i e_{i+1} \dots e_{j-1} v_j$ kört ad. Tetszőleges kör bármely pontjának a fokszáma páros. Ha a G gráfunk valamely C körének éleit töröljük akkor G bármely csúcspontjának a foka továbbra is páros maradt. S mindaddig találunk újabb élidegen köröket, amíg az élek törlése után megmaradó gráfnak van olyan v csúcspontja melynek foka $d(v) \geq 0$. S az eljárás miatt a körök éleinek a halmazai diszjunktak.

$3 \Rightarrow 1$ Valóban ha a G gráf összefüggő és élidegen körök uniója, akkor be lehet járni a gráf éleit oly módon, hogy minden élen csak egyszer megyünk végig. bizonyítsunk mondjuk a körök száma szerinti teljes indukcióval. Ha csak egy élidegen körből áll a gráf, akkor azaz egy kör önmagában lesz egy zárt Euler-vonal. Ha már $k-1$ kört bejártunk s a " k " körrel a zárt vonalunknak az u pontja közös, akkor járjuk be a " $k-1$ " kört alkotta zárt vonalat

3 Vegye észre a Kedves Olvasó, s még jobb ha meg is indokolja, hogy ha a G összefüggő gráf éleit valamely u pontból végig lehet járni egy zárt vonal mentén, oly módon hogy minden élen csupán egyszer ment

u-ból elindulva, majd ha már vissza tértünk u-ba folytassuk a bejárást a "k." kör éleinek a bejáráásával.

III.3. Tétel: *Ha a G egyszerű összefüggő gráfnak, $2k$ darab páratlan fokú csúcspontja van, akkor élei lefedhetők k darab nyílt vonallal.*

Bizonyítás: Egészítsük ki a G gráfot k darab éllel G' -vé, oly módon, hogy G' minden csúcsának a foka páros legyen, ez nyilván megtehető, ha ügyelünk arra, hogy az új élekkel mindig páratlan fokú csúcsokat kössünk össze. G' -re ekkor teljesedni fog az III.I.E1 tétel feltétele, s ezért lesz egy zárt Euler-vonala is, mely triviálisan tartalmazza az "új" k darab élt is. Ha a k darab új élt töröljük k darab nyílt vonalat kapunk. (Miért nem kaphatunk kevesebbet k -nál?), s a bizonyítás ezzel kész.

III.2. Hamilton-körök, Hamilton utak

Sir Villiam Rowan Hamilton⁴ (1805-1865) 1859-ben egy olyan játékot hozott forgalomba, melynek a lényege az volt, hogy egy előre megadott gráf csúcspontjait kellett bejárni, oly módon, hogy bármely csúcsban pontosan egyszer kellett járni. Állítólag a játéknak nem volt átütő sikere Hamilton kortársai között.

III.2. Definíció: A $G = (E, \varphi, V)$ gráf H útját $(\varphi(e_1) = (v_0, v_1), \varphi(e_2) = (v_1, v_2), \dots, \varphi(e_n) = (v_{n-1}, v_n))$ -t *Hamilton-útnak* mondjuk, ha $v_0, v_1, \dots, v_n$ csúcsok mind különbözők és e csúcspontokon kívül más csúcspontja nincs G -nek.

III.3. Definíció: A $G = (E, \varphi, V)$ gráf K körét *Hamilton-körnek* mondjuk, ha K tartalmazza G minden csúcspontját is.

Látszólag nagyon hasonló probléma, hogy valamely gráfnak az éleit járjuk be pontosan egyszer, vagy a csúcspontjait. Az utóbbi azonban jóval nehezebb. S az általános esetben Hamilton-utak illetve Hamilton-körök keresésére ma sem ismert igazán jó algoritmus. Operációkutatás területéhez tartozik az utazó ügynök problémája. Az utazó ügynök problémája azt jelenti, hogy a kereskedelmi utazónak adott városokat kell bejárnia, oly módon, hogy minden városba csak egyszer megy el, és végül visszatér a cégének a székhelyére. Ez esetben a gráf csúcspontjai az utazó által meglátogatandó városok, az élek pedig a városokat összekötő útvonalak. Természetesen egy-egy útnak jól meghatározott utiköltsége is van, s több út esetén célszerű azt az utat választani, melynek a költsége minimális. Ha valamely G gráf éleihez valós számokat rendelünk, akkor hálózatokról, folyamatokról beszélünk. S nagyon természetesen vetődik fel minimális költségű ill. maximális

végig, s végül u-ba futott be, akkor a gráf bármely másik v pontjából elindulva is végig járhatja G éleit (s mindegyik élen csak egyszer menve végig) oly módon, hogy a bejárást v -ben fejezi be.

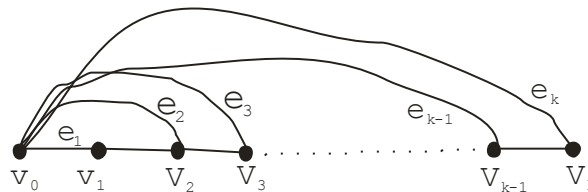


4

Sir Villiam Rowan Hamilton (1805-1865) Dublinban született, családja Skóciából származik. Nyelvi és matematika tehetsége nagyon korán megmutakozott. 15 éves korában már Newton és Laplace írásait olvasta. Saját maga a kvaterniók felfedezését tartotta legfontosabb eredményének. Ma e véleményével kevesen értenek egyet.

nyereségű utak esetleg körök keresése. Az előbb említett feladatok a kombinatorikus optimalizálás tárgykörébe tartoznak. A következő tétel megfogalmazása előtt említjük meg, hogy egy kör ill. út hosszán a bennük szereplő élek számát értjük.

III.4. Tétel: *Ha a G egyszerű gráfban bármely csúcspont foka legalább k ($k \geq 2$), akkor van a gráfban egy legalább $k+1$ hosszúságú kör.*



4. ábra

Bizonyítás: Legyen a G gráfnak az L út a leghosszabb útja. S ezen út csúcspontjait a kezdő ponttól indulva jelölje rendre $v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$. Az, hogy v_0 foka legalább k azt jelenti, hogy a v_0 -t v_1 -el összekötő e_1 élen kívül még legalább $k-1$ él indul ki v_0 -ból. Ezen élek másik végpontjai szükségszerűen szerepelnek L csúcspontjai között, mert ellenkező esetben összeütközésbe kerülnének azzal, hogy az L út a leghosszabb. Legyen e_2' másik végpontja mondjuk v_2 , e_3' végpontja v_3 és végül e_k' végpontja v_k . Ekkor az L útnak a v_0 -tól v_k -ig tartó rész útjának két végpontját köti össze e_k' , ezért egy kört kapunk, melyben legalább $k+1$ él van, s ezzel a bizonyítás kész.

III.5. Tétel: Ha a $G = (E, \varphi, V)$ egyszerű gráf bármely v csúcsának fokára teljesül,

hogy $\delta(v) \geq \frac{|V|}{2} = \frac{n}{2}$, akkor G összefüggő.

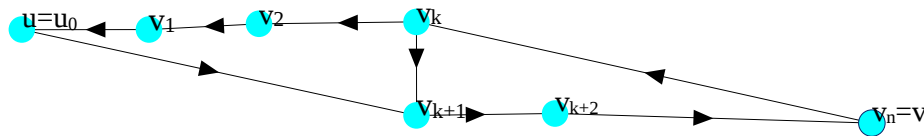
Bizonyítás: Legyen u és v két különböző csúcsa G -nek. A feltétel szerint u -val és v -vel is legalább $n/2$, $n/2$ pont van összekötve az u -ból illetve v -ből induló élek által, a foksám feltétel miatt. Az előbb említett u -val, illetve v -vel közvetlenül összekötött pontok között van olyan, mely u -val is v -vel is össze van kötve, (ha nem lenne ilyen akkor G csúcsainak a száma nagyobb egyenlő volna, mint $[n/2 + n/2 + 2]$) azaz u és v között vezet út.

Ha adott a $G = (E, \varphi, V)$ gráf, a csúcsainak a számát $|V| = n$ szokás G rendjének mondani, s éleinek számát $|E| = q$ a G gráf méretének mondani. Ha az u -t az e él összeköti a v csúccsal, akkor u -t ill. v -t az e él vég pontjainak nevezzük és u -t ill. v -t szomszédosnak mondjuk. Az u csúcsponttal szomszédos csúcsok halmazát $N(u)$ -val jelöljük.

III.6.Tétel(O.Ore5 (1960.)): Ha a G gráfra teljesül, hogy rendje $n \geq 3$ és bármely két nem szomszédos u, v csúcs pont fokának az összege nagyobb egyenlő G rendjénél ($\delta(u) + \delta(v) \geq n$), akkor G -nek van Hamilton-köre.

Bizonyítás: Indirekt bizonyítunk. Azon gráfok közül, melyekre a tétel feltételei teljesednek, de az állítás nem, tekintsük valamelyiket azon G' gráfok közül, melynek az éleinek a száma maximális. Maximális abban az értelemben, hogy ha G' -hez hozzá vesszünk egy olyan e élt, mely a nem szomszédos u és v éleket köti össze, akkor az így kapott G gráf már tartalmazni fog Hamilton-kört. G' minden Hamilton köre tartalmazza az e élt, ezért van olyan L Hamilton-útja G' -nek, mely u -t és v -t köti össze, legyen ez az út megadva $\varphi(e_1) = (v_0, v_1), \varphi(e_2) = (v_1, v_2), \dots, \varphi(e_n) = (v_{n-1}, v_n)$ ($u = v_0, v = v_n$) által. A

$v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ csúcs pontokkal kapcsolatban vegyük észre, hogy ha v_{k+1} szomszédos u -val azaz v_{k+1} eleme $N(u)$ -nak, akkor v_k nem eleme $N(v)$ -nek.



5. ábra

Ellenkező esetben a $v_0, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n, v_k, v_{k-1}, \dots, v_0$ Hamilton-köre volna G' -nek. Tehát a $V - \{v\}$ pontok közül az u -val szomszédos pontok nem szomszédosak v -vel, ezért $\delta(u) \leq (n-1) - \delta(v)$ s ez utóbbi egyenlőtlenség ellentmond a tétel feltételeinek. Ore tételének speciális esete Dirac tétele.

Következmény(G.A. Dirac (1952)): Ha az $n=2k$ csúcs pontú egyszerű G gráf bármely pontjának a foka legalább k , akkor van G -nek Hamilton-köre.

Az időrendben való jobb tájékozódás végett egységes jelölés mellett felsoroljuk a Hamilton-körökre vonatkozó érdekesebb eredményeket. Jelölje a $G(E, \varphi, V)$ gráf csúcs pontjainak fokszámait rendre $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ ($|V|=n$).

III.7. Tétel: Ha a $G(E, \varphi, V)$ egyszerű gráfra ($2 < n$) a következő feltételek valamelyike teljesedik, akkor van G -nek Hamilton-köre:

1; G.A. Dirac (1952) $1 \leq k \leq n \Rightarrow d_k \geq \frac{1}{2}n$,



5 1899.X.7. Kristiania-ban a (a mai Oslo-ban Norvégiában) született és ott is halt meg 1968.VIII:13. Fiatal korában algebrai számelmélettel foglalkozott, később hálóelmélettel, gráfelmélettel. 1927.-ben professori kinevezést kapott a Yale egyetemre, 1931.-ben a Yale egyetem kítűnő professzora címet kapta, s 37 évvel később 1968.-ban onnan is ment nyugdíjba. Több könyvet írt különböző a matematika különböző területeiről, számelmétről, négyzsinsejtésről, gráfelmétről.

2; O.Ore (1961) $u, v \in V, \text{de } (u, v) \notin E \Rightarrow \delta(u) + \delta(v) \geq n,$

3; Pósa Lajos (1962) $1 \leq k \leq \frac{1}{2}n \Rightarrow d_k > k,$

4; J.A.Bondy (1969) $j < k, d_j, d_k \leq k-1 \Rightarrow d_j + d_k \geq n$

5; V. Chvátal (1972) $d_k \leq k < \frac{1}{2}n \Rightarrow d_{n-k} \geq n-k.$

Valóban G-ben létezik Hamilton-kör, mivel a következmény feltételei lényegében szigorúbbak, mint a (H3) tétel feltételei.

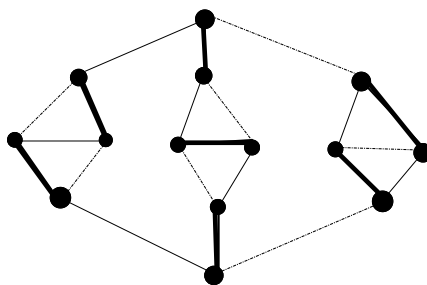
Csak olvasmány:

III.4.Definíció: A G gráf G' részgráffját G k-adfokú faktorának mondjuk, ha

(i) G' csúcsainak halmaza megegyezik G csúcsainak halmazával,

(ii) G' bármely csúcsa azonos k fokszámú.

A definícióból látható, hogy valamely G gráfnak a K Hamilton-köre egyben másodfokú faktora G-nek.



6. ábra

A 6. ábrán látható gráfnak vastag, szaggatott, illetve vékony vonallal jelöltük egy-egy elsőfokú faktorát. Ellenőrizze le a Kedves Olvasó, hogy a három elsőfokú faktor közül bármely kettő "szorzata" az ábrán látható gráfnak egy-egy másodfokú faktorát adja, de a gráfnak nincs Hamilton-köre, de a keletkező körök természetesen lefedik G csúcsait.

III.8. Tétel: Ha a G egyszerű összefüggő gráfnak van olyan k csúcsa, melyek törlése után k+1 komponensre esik szét, akkor G-nek nincs Hamilton-köre.

Bizonyítás: Indirekt bizonyítunk. Elegendő arra gondolni, hogy egy kör k darab pontjának törlése után legfeljebb k részre eshet szét

III.9.Tétel: Ha a G egyszerű összefüggő gráfnak van olyan k pontja melyek törlése után k+2 komponensre esik szét, akkor G-nek nincs Hamilton-útja (s persze még kevésbé van Hamilton köre).

Bizonyítás: Indirekt bizonyítunk tegyük fel hogy G-nek az L Hamilton-útja, azaz L-re illeszkedik G minden csúcs pontja. Bármely út, így persze L is k darab pontjának a törlésével legfeljebb k+1 részre bomlik, s ez ellentmond a tétel feltevésének, mely szerint legalább k+2 részre kellene bomlania.

III.5.Definíció: Legyen a G gráfnak $G_1, G_2, \dots, G_k$ rendre $m_1, m_2, \dots, m_k$ -ad fokú faktori, ha

- (i) ha bármely i, j esetén G_i -nek ill, G_j -nek nincs közös éle,
- (ii) a $G_1, G_2, \dots, G_k$ részgráfok együttvéve tartalmazzák G összes élét, akkor G ezen k számú faktor szorzatának mondjuk.

III. 3. Az utazó ügynök problémája.

Nem negatív élsúlyozott $(E(K_n) \xrightarrow{\omega} R_+, \omega(w) \geq 0)$ K_n teljes gráfban keresünk minimális súlyú C_H Hamilton kört, azaz $\min_{C_H} \sum_{e \in E(C_H)} \omega(e)$.

A „legközelebbi szomszéd” algoritmus:

1; válasszuk ki K_n tetszőleges x csúcsát. S az x csúcsra illeszkedő élek közül válasszuk egy "e" minimális súlyút.

2; A kiválasztott "e" él másik csúcspontja legyen y jelöljük meg y -t is kiválasztott pontnak. Az y -ra illeszkedő azon élek közül amelyek nem illeszkednek korábban kiválasztott pontra (ill.pontokra) válasszuk egy minimális súlyú e' élt.

3;Ha már minden pontját megjelöltük K_n -nek az algoritmus véget ér K_n – egy súlyozott C_H Hamilton körének megadásával.

A C_H kör függ az x kezdőpont megválasztásától. Az $S(C_H) = \sum_{e \in E(C_H)} \omega(e)$ szám egy **felső korlátot ad** az utazó ügynök problémára.

A rendezett élek algoritmusa:

Feltesszük, hogy a K_n élsúlyozott teljes gráf élei súlyuk növekvő sorrendje szerint rendezve vannak.

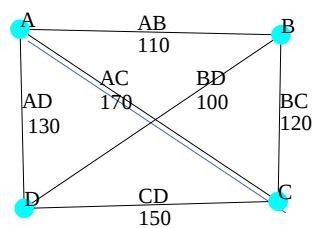
1; Válasszunk $e \in E(K_n)$ -t minimális súlyúnak.

2; A ki nem választott élek közül válasszuk $e \in E(K_n)$ -t minimális súlyúnak ügyelve arra, hogy egyik végpontja se illeszkedjen olyan pontra, amelyre már korábban kiválasztott élek közül már kettő illeszkedik és ne alkossanak a kiválasztott élek n csúcspontnál kevesebb pontból álló kört.

3; Ha kiválasztott élek száma n , akkor megkaptuk K_n egy súlyozott C_H Hamilton körét.

Alsó korlátot oly módon nyerhetünk az utazó ügynök problémára, ha észrevesszük, hogy K_n egy minimális súlyú C_H Hamilton körének tetszőleges x pontját törölve a K_n -x gráfnak egy súlyozott feszítőfáját kapjuk.

Keressünk a K_n -x gráfban egy minimális súlyú T feszítőfát (például a Kruskal algoritmussal). T élei súlyának az összegét jelölje $S(T)$, azaz $S(T) = \sum_{e \in E(T)} \omega(e)$. S az x -re illeszkedő élek közül a két legkisebb súlyú legyen e_1, e_2 , ekkor $S(C_H) \geq S(T) + \omega(e_1) + \omega(e_2)$. Ez azt jelenti, hogy az $S(T) + \omega(e_1) + \omega(e_2)$ egy **alsó korlát** az utazó ügynök problémára.



7. ábra

A 7.ábra él-súlyozott G gráfjának AB, BD, BC élei megadják egy minimális súlyú feszítőfáját, s az alsó korlát ekkor $k=110+100+120=330$. A gráf B csúcsából indulva a legközelebbi szomszéd algoritmus rendre a BD, AD, AC, BC éleket adja, s nyerjük a $K=100+130+170+120=520$ felső korlátot

Részlet: Tarjányi: