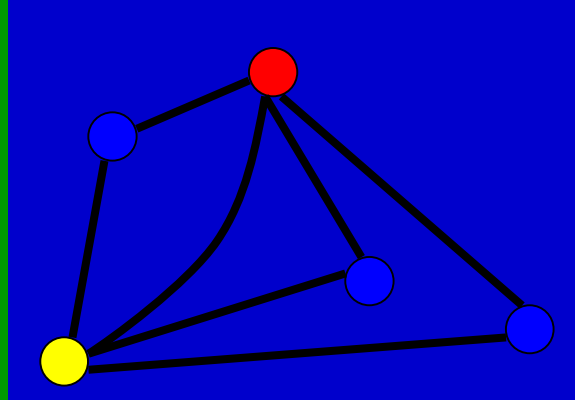


Gráf csúcsainak színezése

2014. Május 13.

Kromatikus szám

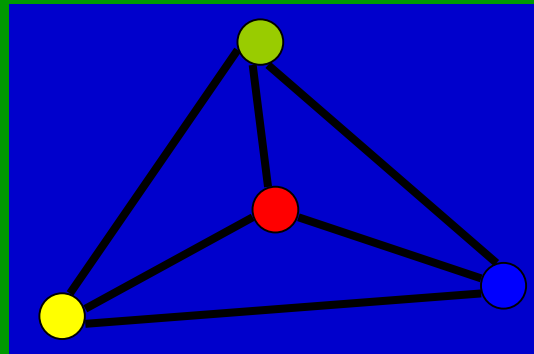
- $\chi(G)$ az a szám, ahány szín kell a G gráf csúcsainak olyan kiszínezéséhez, hogy a szomszédok más színűek legyenek.



The Four-Color Theorem

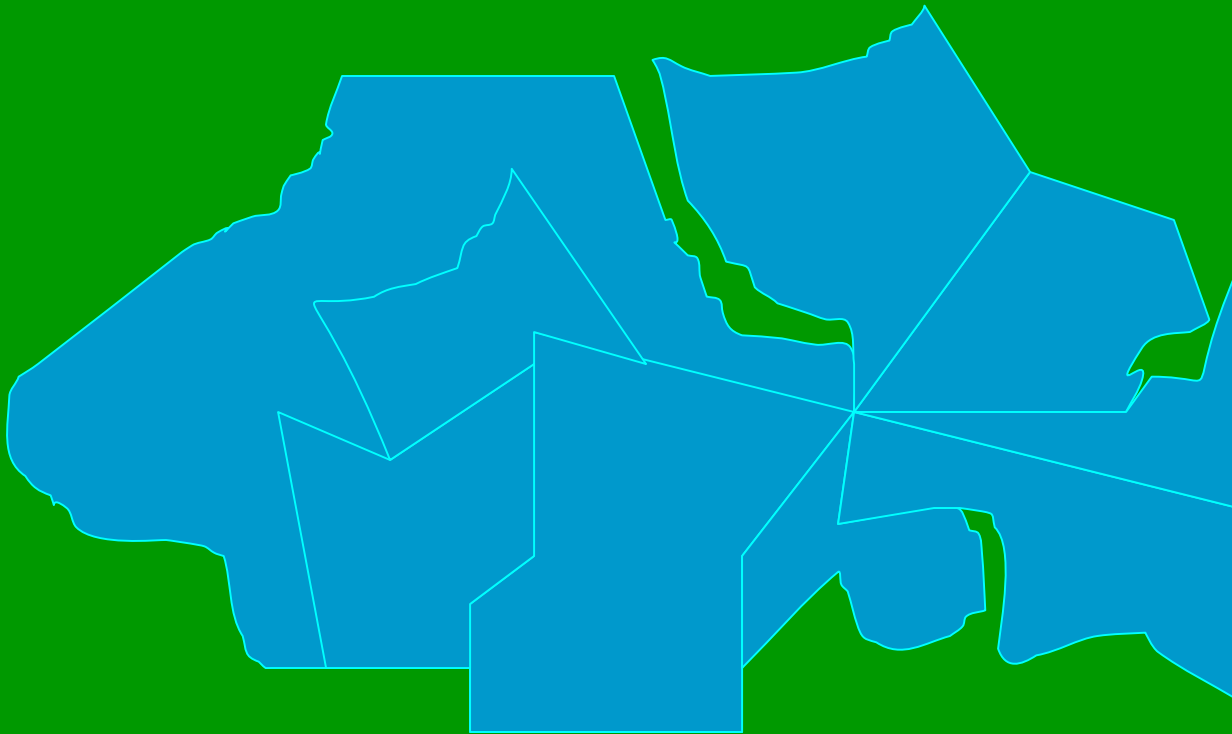
4 szín tétel

- Appel és Haken bebizonyították, hogy minden térkép legfeljebb 4 színnel kiszínezhető.

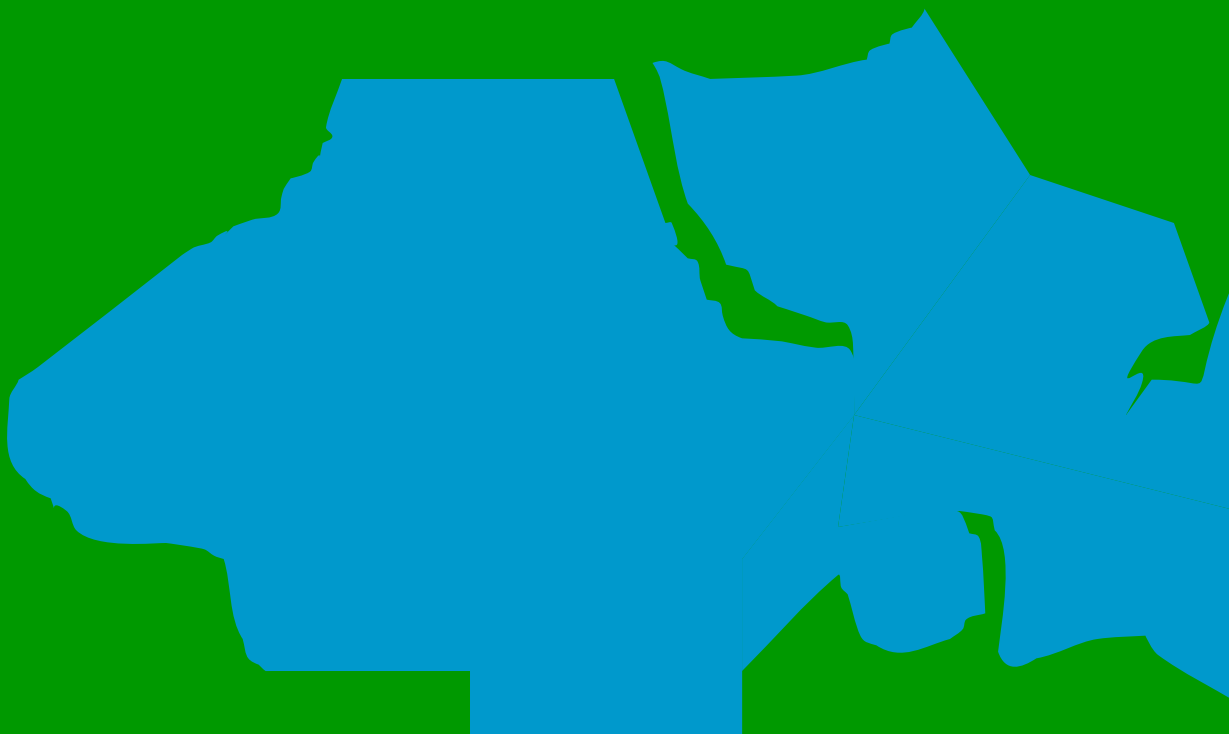


Gráfok színezése

Képzelt kontinens – hány színnel tudjuk úgy kiszínezni, hogy szomszédos országok más színűek legyenek?



Térképek színezése



Térképek színezése



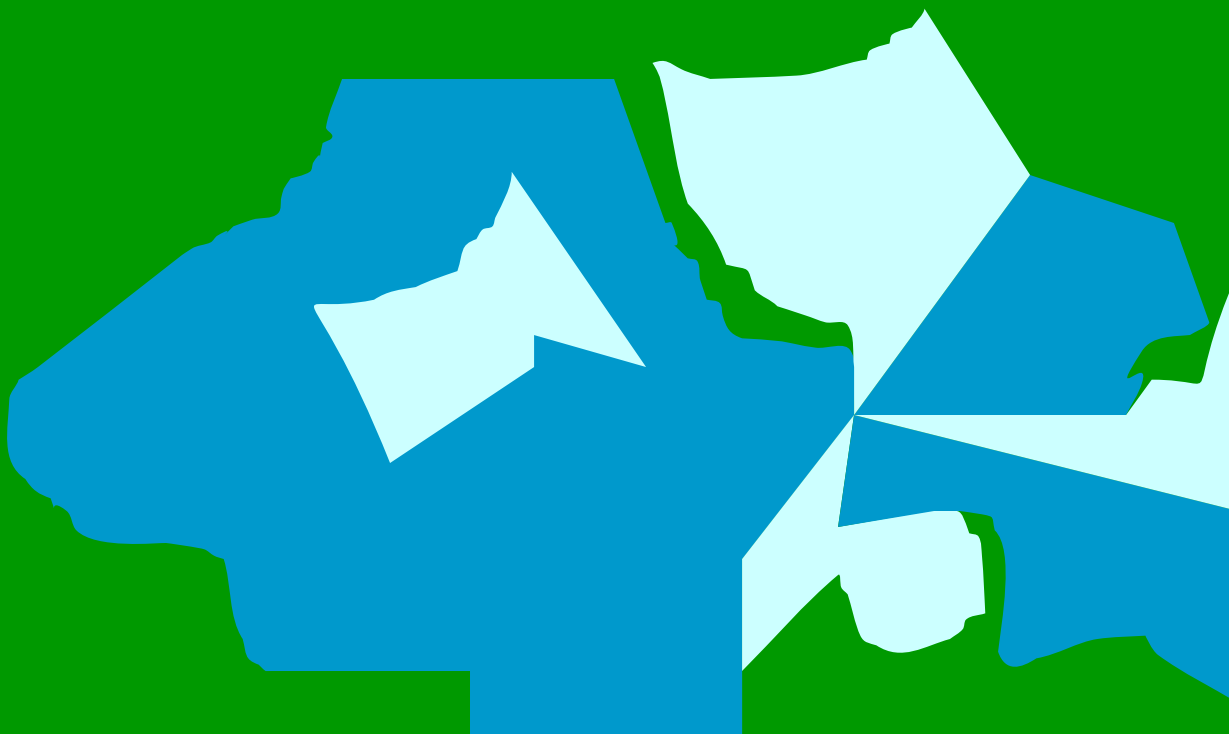
Térképek színezése



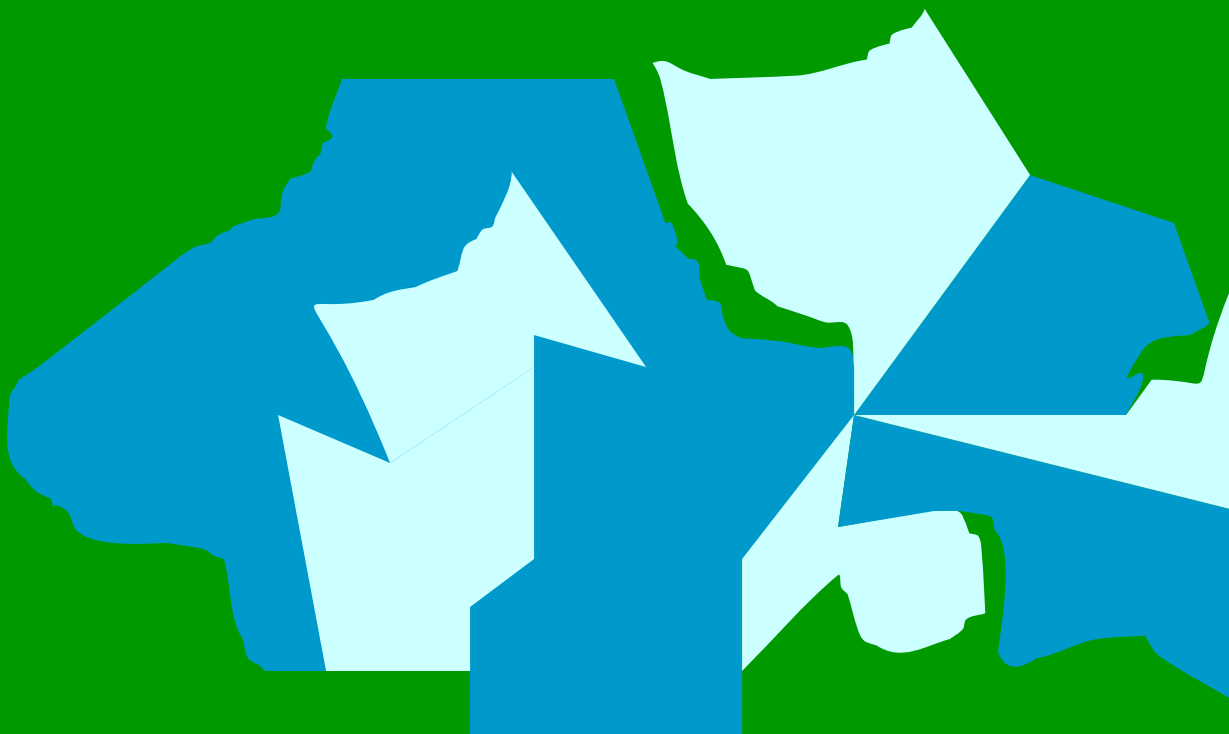
Térképek színezése



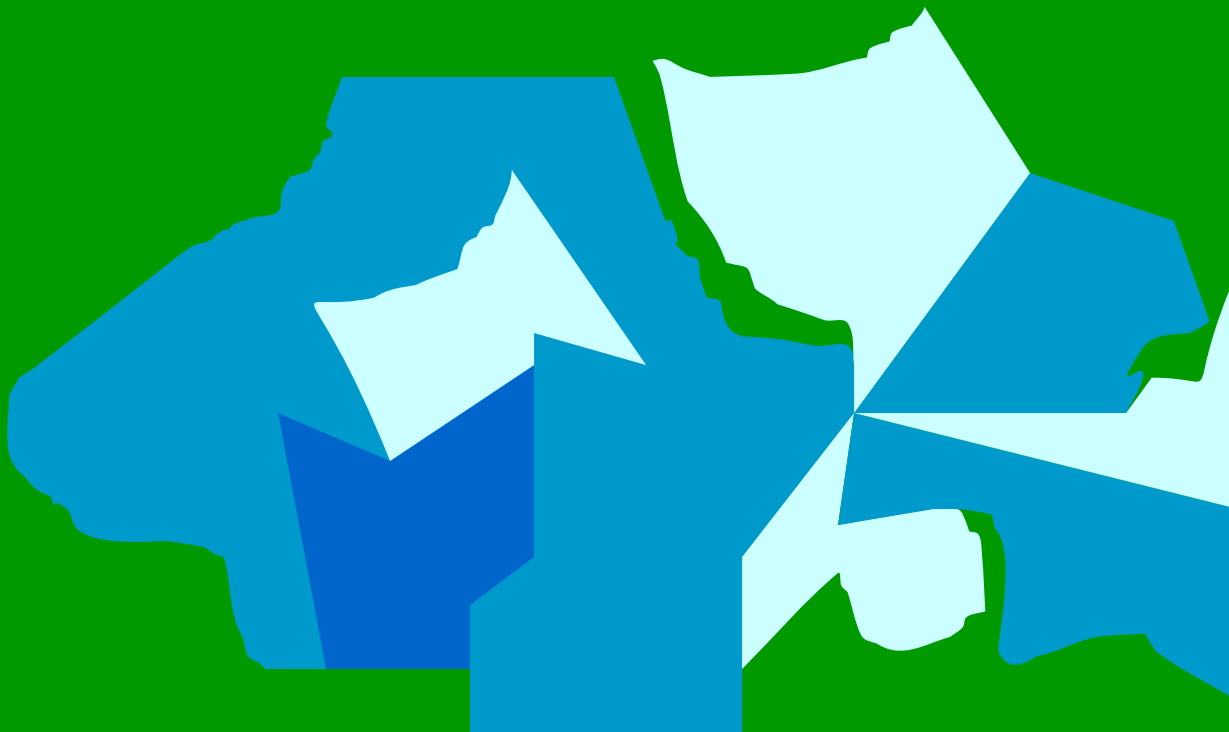
Térképek színezése



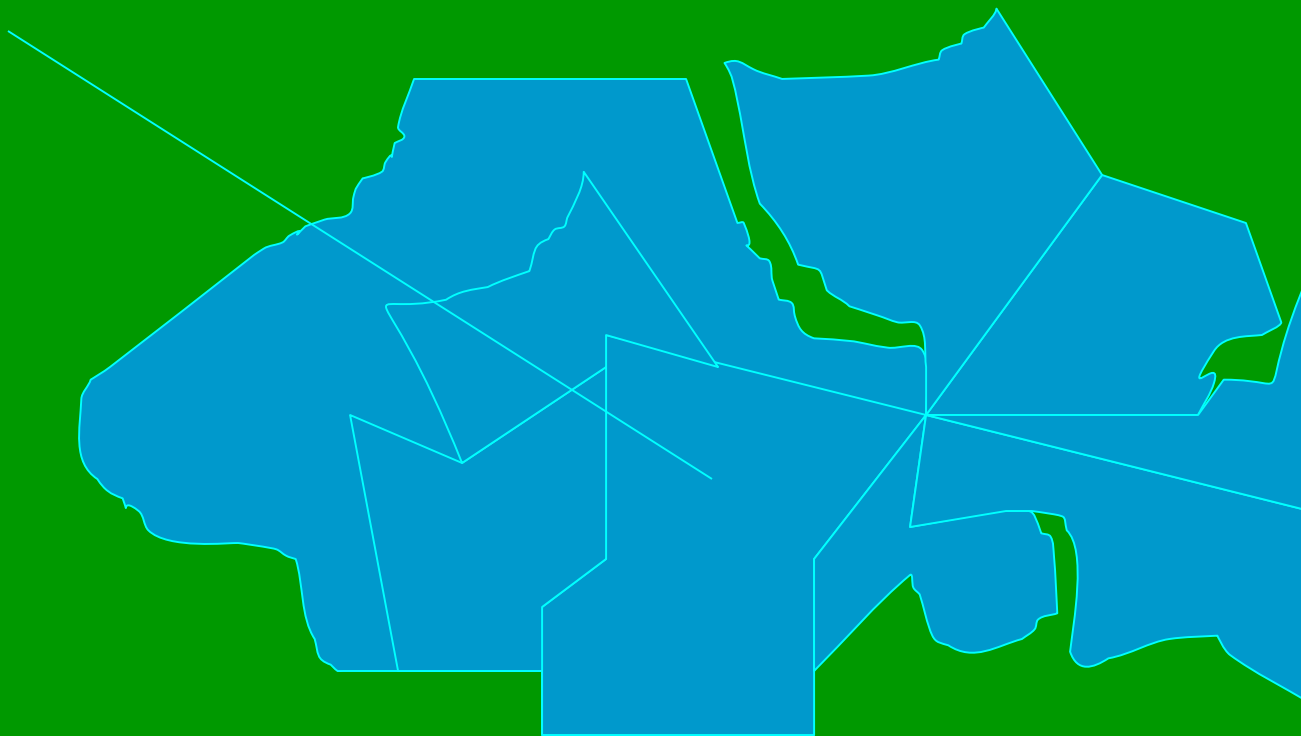
Térképek színezése



Térképek színezése



Térképek színezése



Térképek színezése



4-szín tétel

Minden térkép kiszínezhető 4 színnel úgy, hogy a szomszédos területek más színűek lesznek.

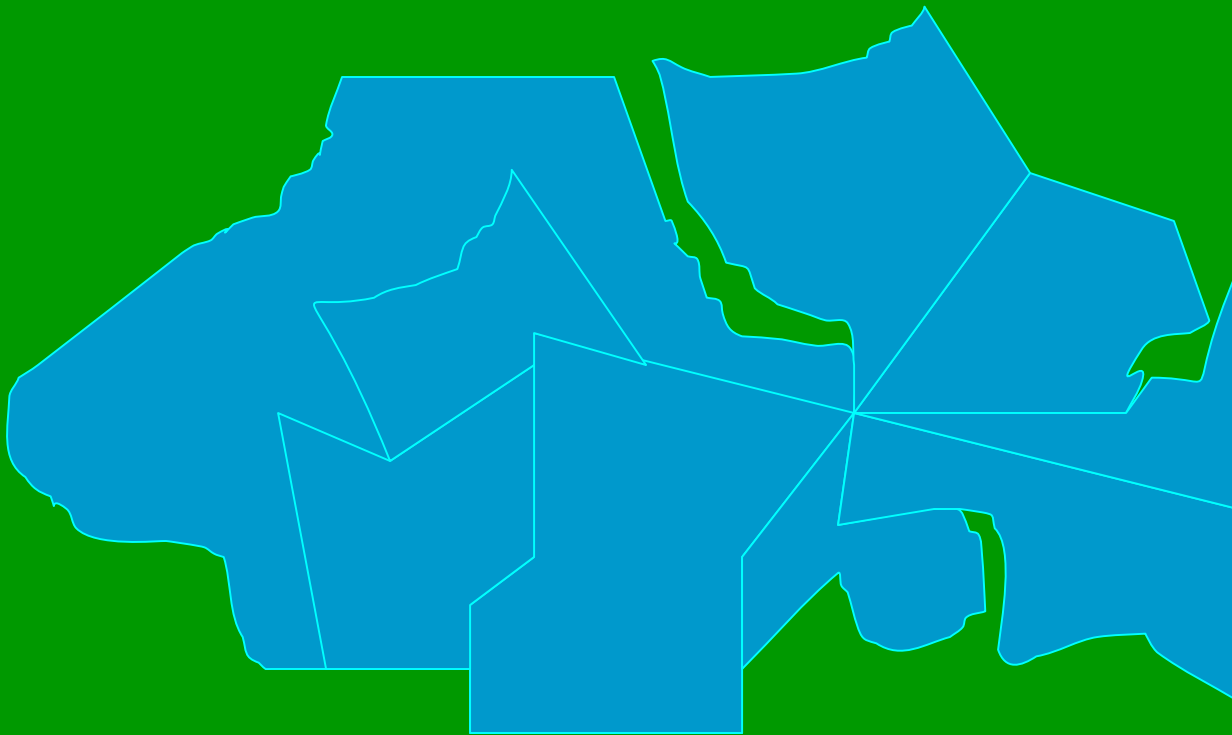
Haaken és Appel bizonyította számítógép segítségével, kb. 1000 órás futási idővel (1976), 2000 esetet vizsgáltak meg szisztematikusan, ami ellenpélda lehetett volna

Újabb biz.: (?)

<http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html> (The Four Color Theorem)

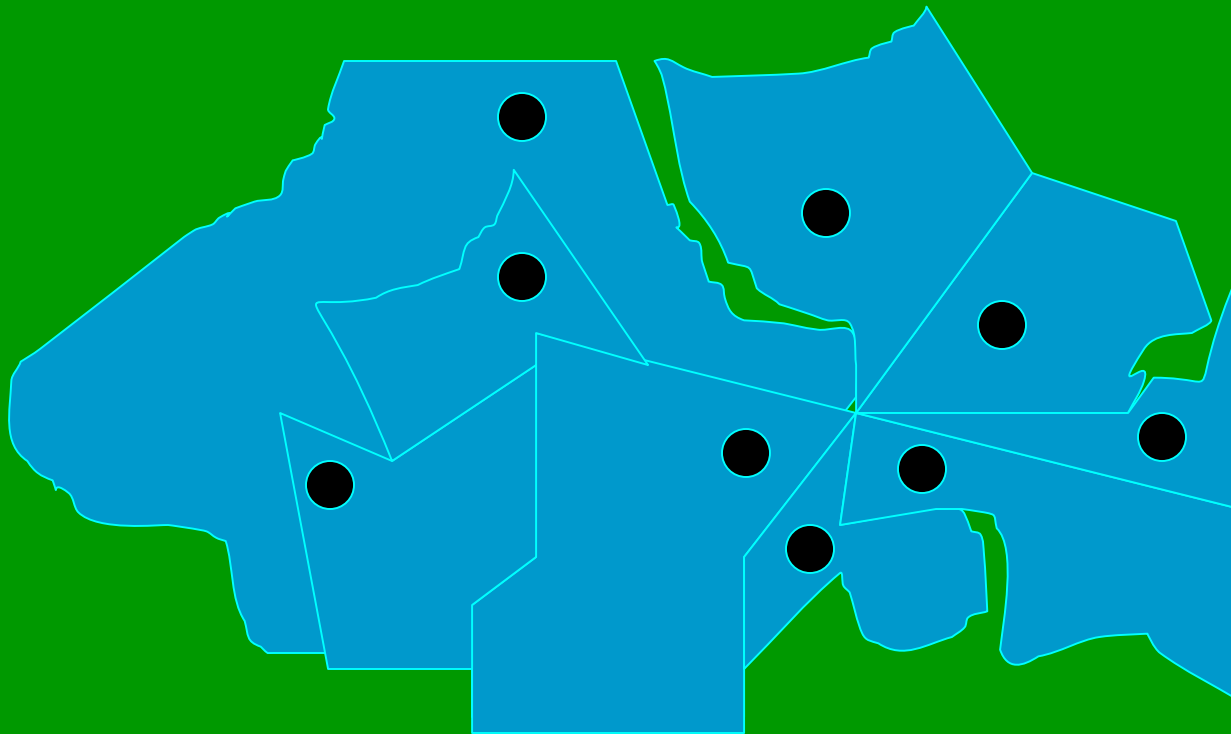
A térképszínezéstől a gráfszínezésig

A probléma gráfelméleti megfogalmazása:

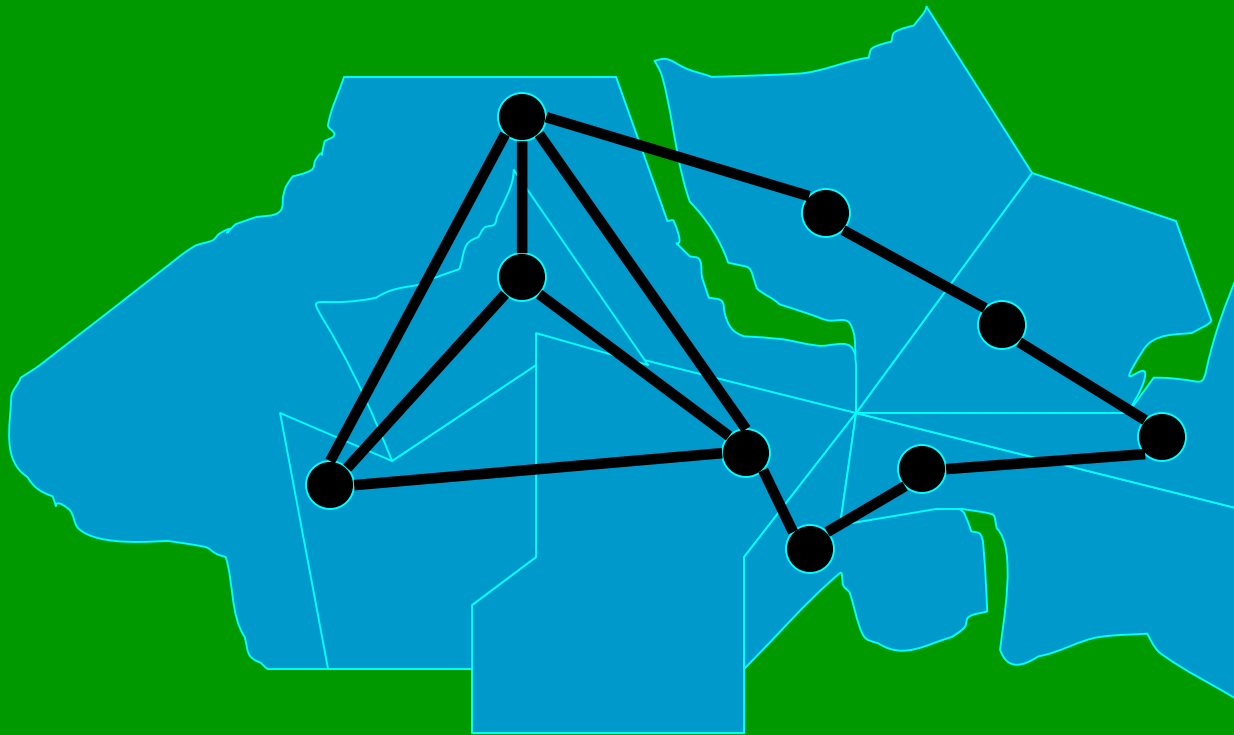


A térképszínezéstől a gráfszínezésig

Duális gráf: Minden területhez egy pontot rendelünk, ezek lesznek a gráf csúcsai, élek: ha a területek szomszédosak voltak:

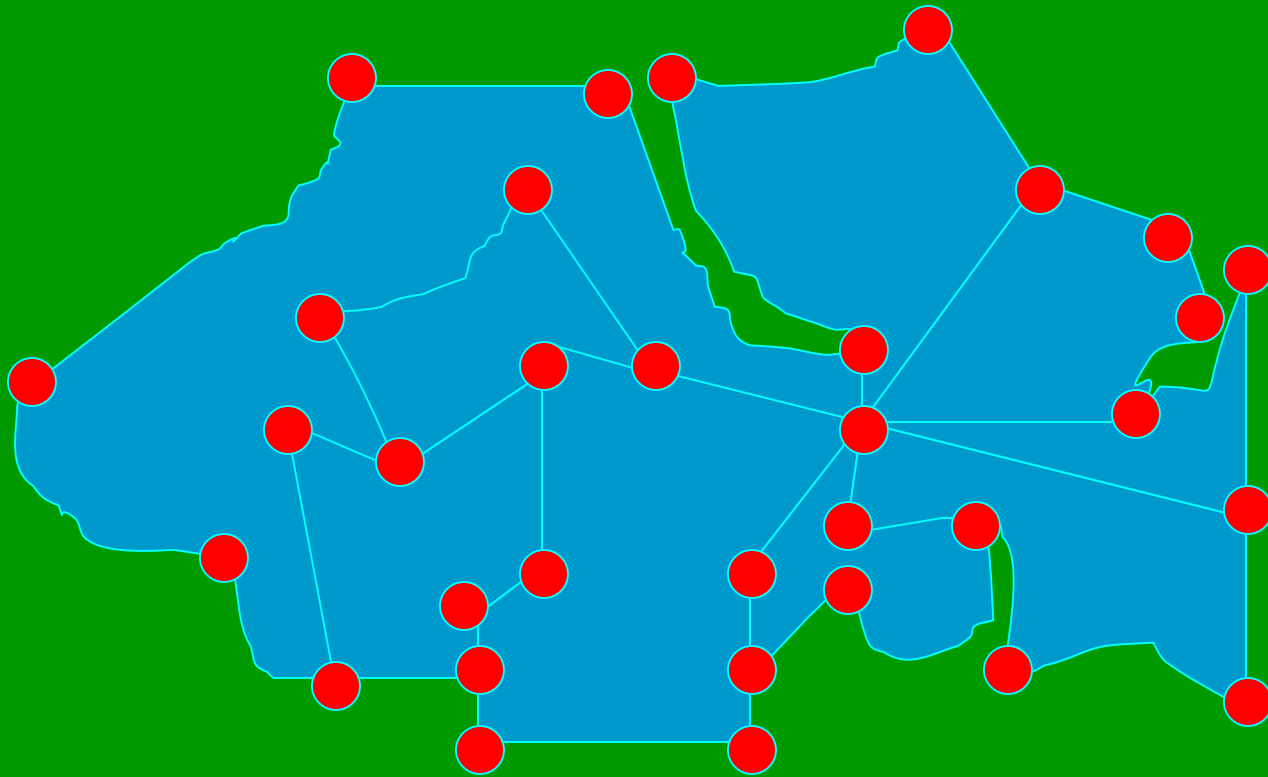


A térképszínezéstől a gráfszínezésig



A térképszínezéstől a gráfszínezésig

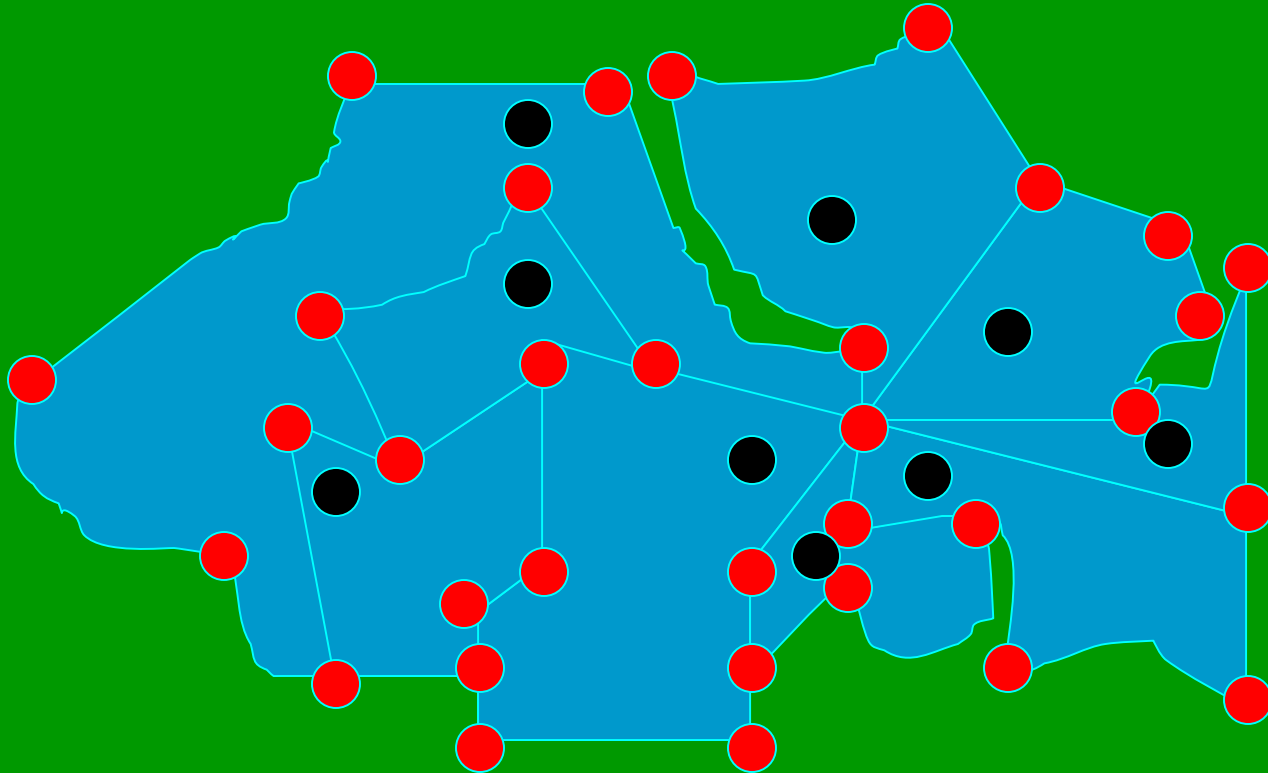
Így kapjuk a duális gráfot:



A térképtől a duális gráfig

Duális gráf:

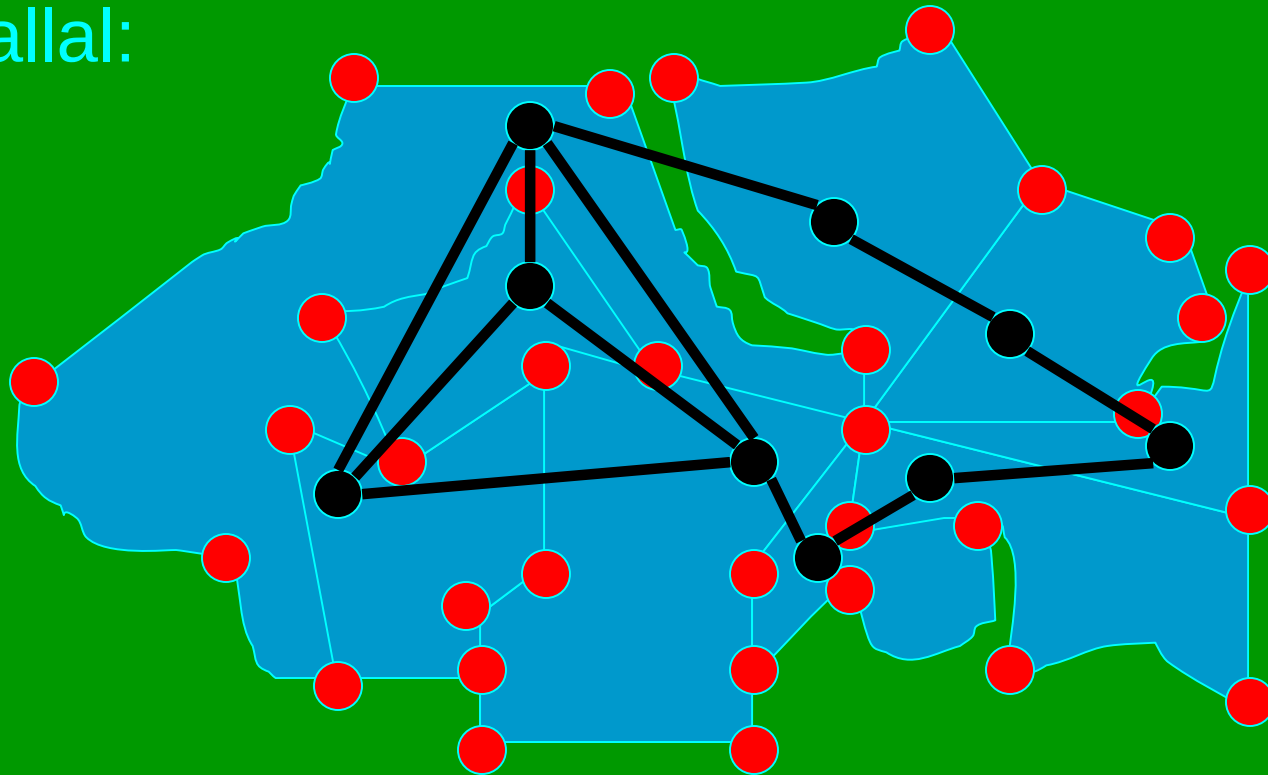
1) Minden terület belsejébe tegyünk egy pontot:



A térképtől a duális gráfig

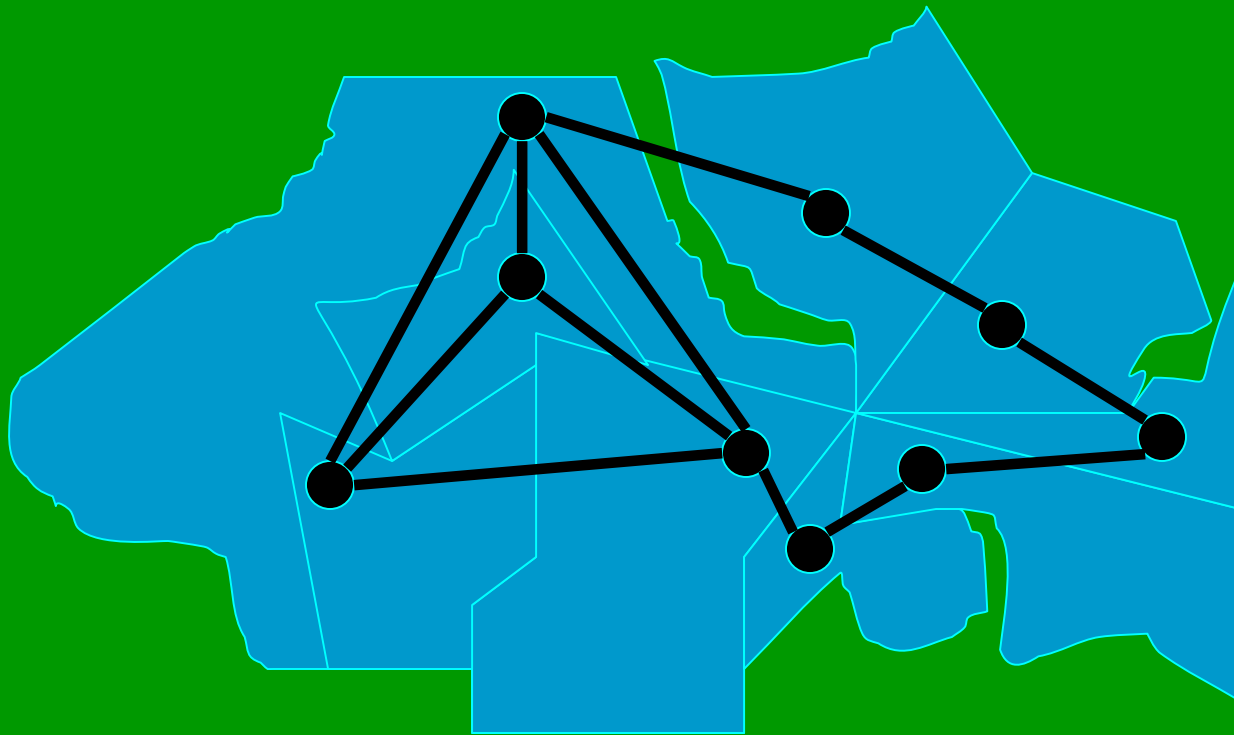
Duális gráf:

2) A pontokat kössük össze a határt metsző vonallal:



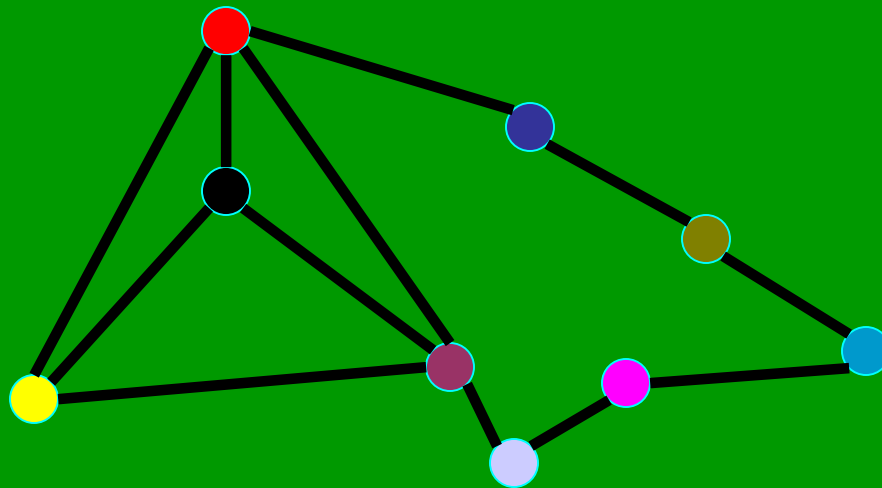
A térképszínezéstől a gráfszínezésig

Megrajzoljuk a duális gráfot:



A térképszínezéstől a gráfszínezésig

A térkép országainak színezése ekvivalens a duális gráf csúcsainak színezésével.



Színezés

DEF: Egy egyszerű gráf n -színezhető, ha minden csúcsához hozzárendelhető úgy egy szín hogy két szomszédos csúcshoz rendelt szín különböző.

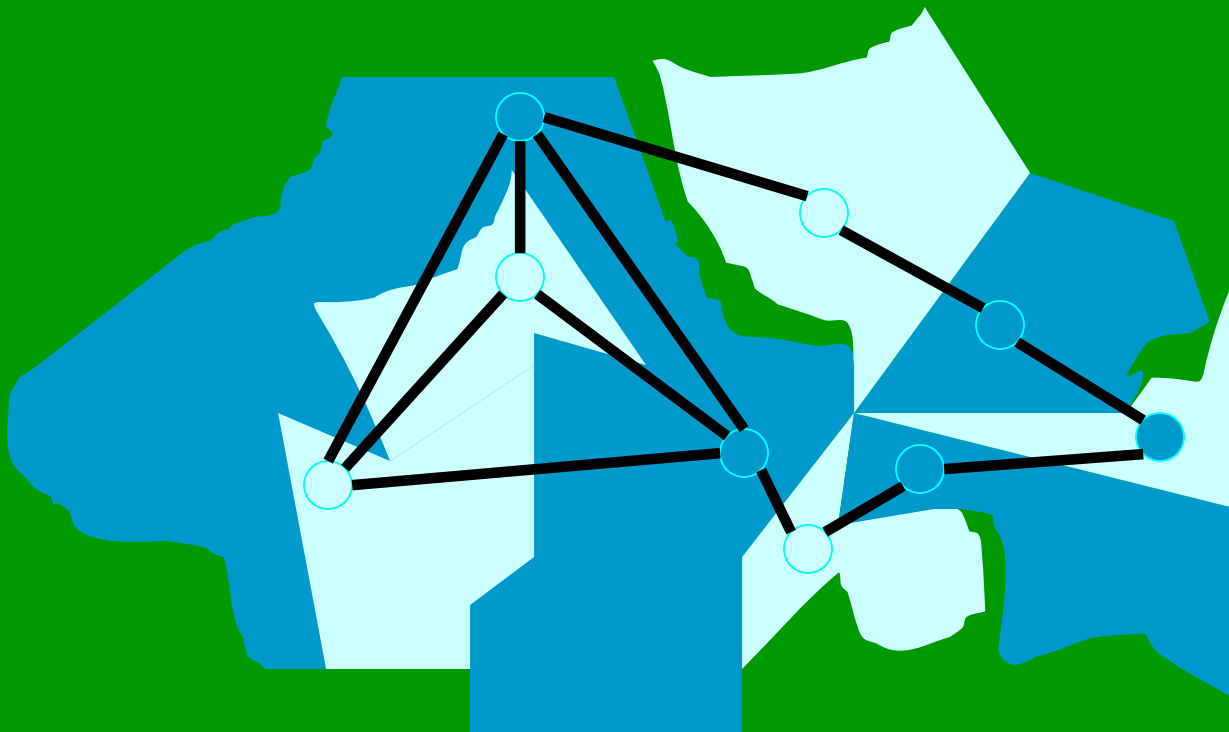
Az egyszerű gráf **kromatikus száma** az a legkisebb szám, ahány színnel kiszínezhető.

Tétel: Valamely gráf akkor és csak akkor páros, ha kromatikus száma 2.

Így pl.: $\chi(K_{n,m})=2$. $K_n=?$ Teljes gráfra $\chi=?$

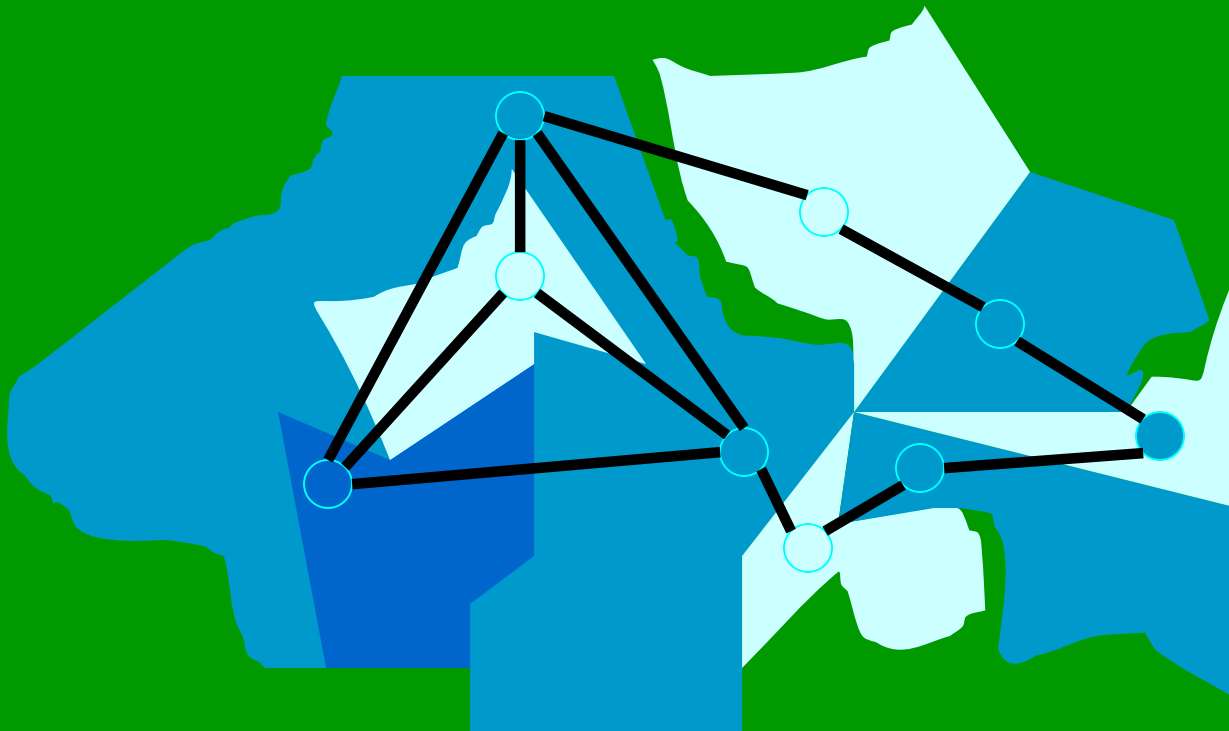
Példa

Ha a térkép nem színezhető ki két színnel, a duális gráfja sem:



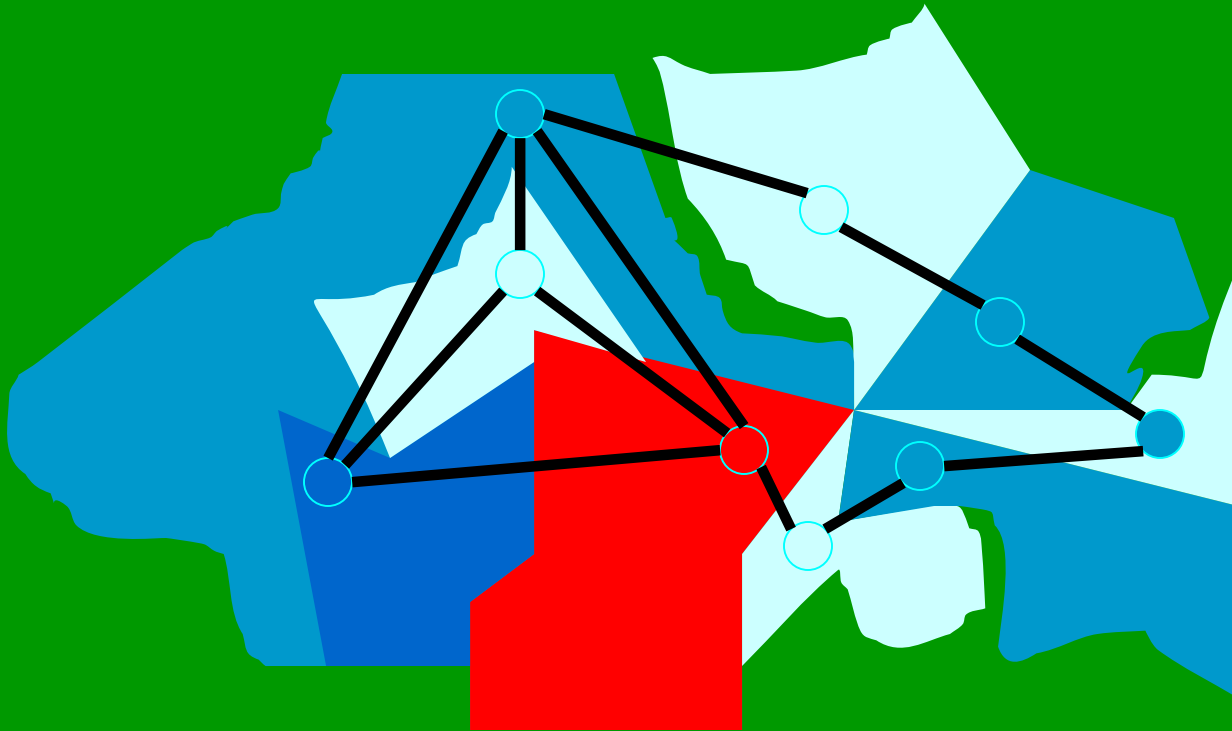
Példa

Ha a térkép nem színezhető ki 3 színnel, a
duális gráf sem:



Példa

A duális gráf 4 színnel kiszínezhető, a térkép is:



4-szín tétel gráfokra

Minden sík gráf kiszínezhető négy színnel

Egy ütemezési feladat megoldása gráf színezéssel

EG:Hány különböző alkalmat kell kiírni az első vizsgákra, ha a kurzusoknak van közös hallgatóik? A lehető legtöbb vizsgát egy alkalommal szeretnénk tartani, mert kevés a felügyelő tanár ☺

Legyenek a tárgykódok pl:

1007, 3137, 3157, 3203, 3261, 4115, 4118, 4156

Tegyük fel, hogy az alábbi tárgyak esetében nincsenek közös hallgatók:

1007-3137

1007-3157, 3137-3157

1007-3203

1007-3261, 3137-3261, 3203-3261

1007-4115, 3137-4115, 3203-4115, 3261-4115

1007-4118, 3137-4118

1007-4156, 3137-4156, 3157-4156

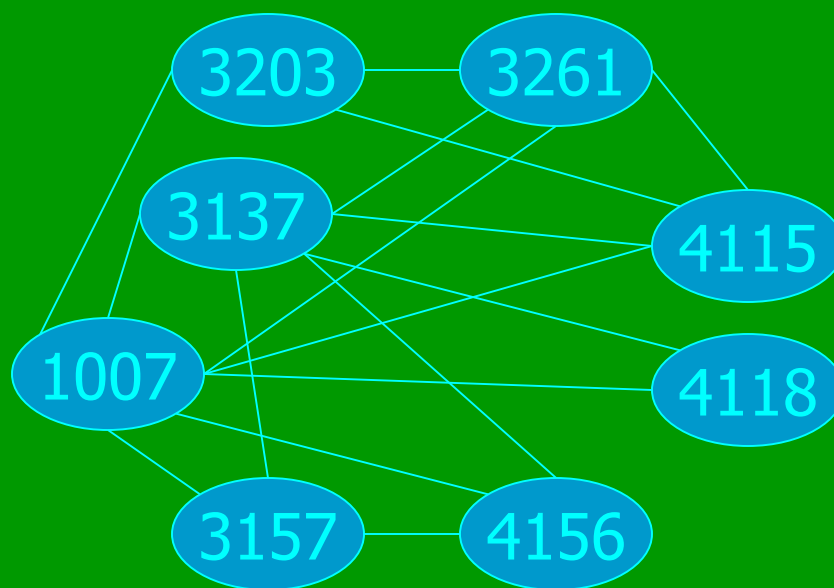
Egy ütemezési feladat megoldása gráf színezéssel

A probléma megoldása gráfszínezéssel:

A csúcsok a kurzusok, az él pedig akkor legyen két kurzus között, ha van közös hallgató-ezeket nem lehet egyszerre tartani.



Egy ütemezési feladat megoldása gráf színezéssel

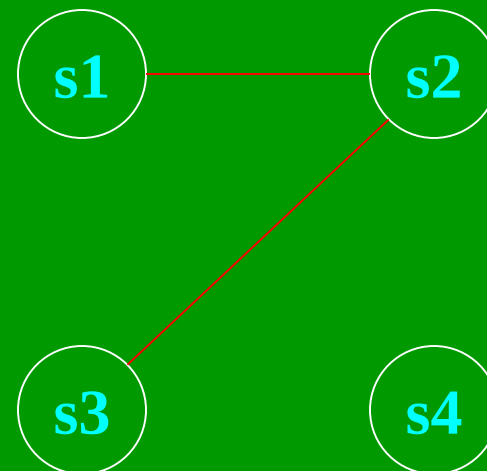


Gráf (csúcsainak) színezése

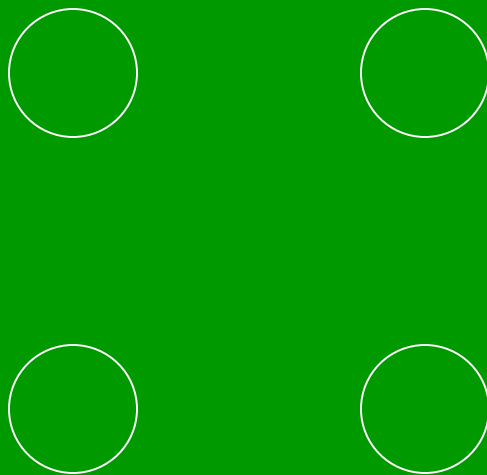
- Minden csúcshoz egy színt rendelünk
 - Szomszédos csúcsok színe különböző
- Klasszikus probléma: NP komplett
 - De vannak jó heurisztikák

Regiszter allokáció gráf színezéssel

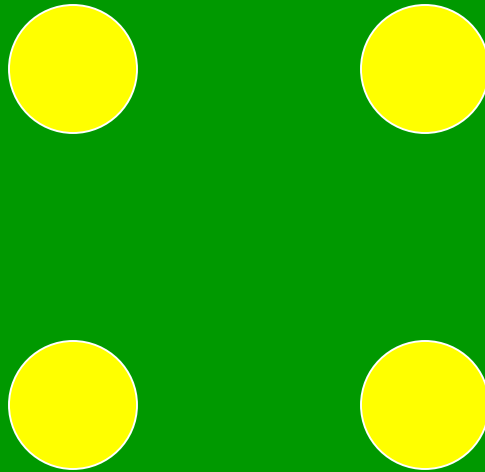
- Minden változó egy regiszterhez van hozzárendelve
 - Minden csúcs kap egy színt
 - HA 2 hely interferál, nem kaphat uo. regisztert, pl. ha egy ciklusban futnak
 - Ha két csúcs között van él, akkor különböző színnel kell színezni



Gráf színezése-példa

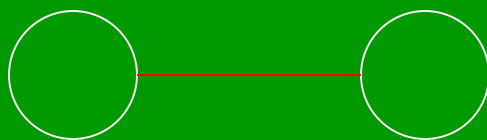


Gráf színezése-példa

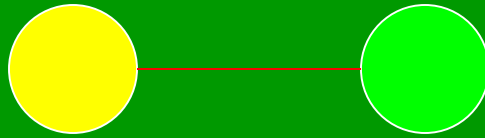


- 1 egy színnel

Gráf színezése-példa

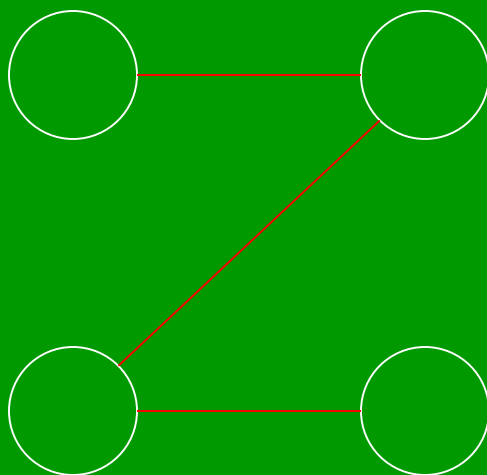


Gráf színezése-példa

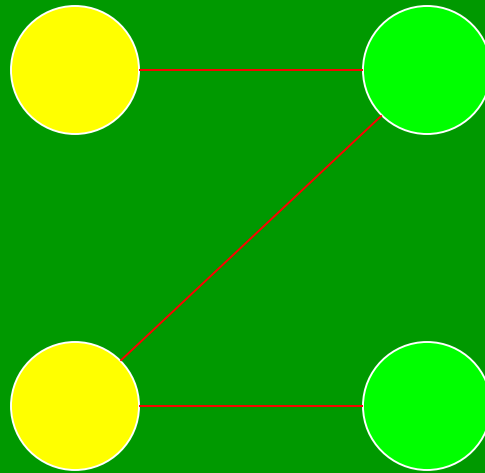


- 2 színnel

Gráf színezése-példa

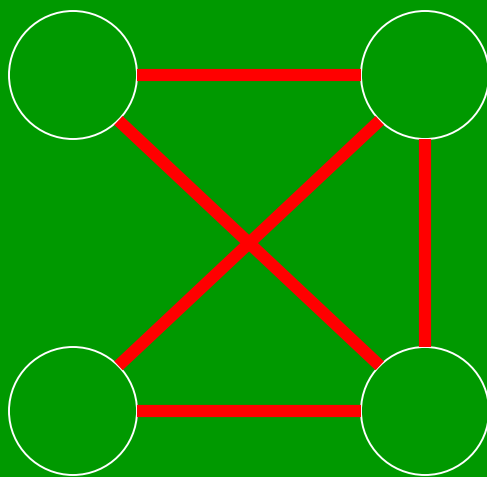


Gráf színezése-példa

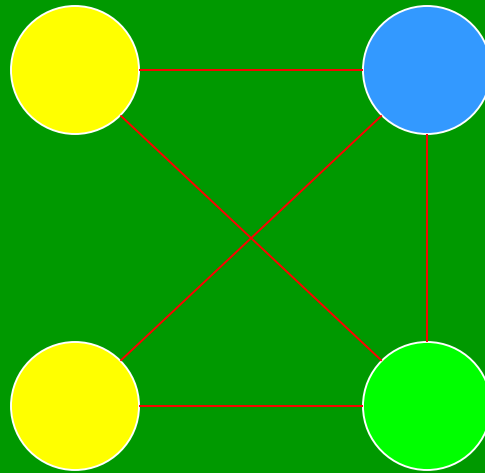


- Még mindig 2 színnel

Gráf színezése-példa



Gráf színezése-példa



- 3 színnel

Kromatikus szám

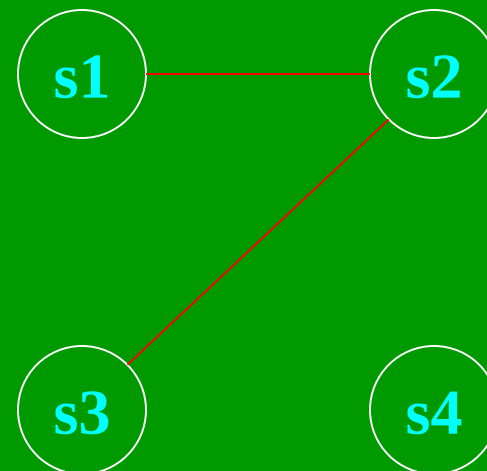
- Kromatikus szám: az a legkisebb szám, ahány színnel a gráf kiszínezhető
- Jele: χ
- Például páros körökre, páros gráfokra: $\chi(C_{2k})=2$
- Például páratlan körökre: $\chi(C_{2k+1})=3$
- Páros gráfra? (Tétel: G acsa páros, ha $\chi(G)=?$)
- Teljes gráfra?
- Klikk (olyan részgráf, mely teljes gráf)

Heurisztika

- N színnel kiszínezni
- Ha fokszám $< N$ = csúcsok száma
 - A csúcsot mindig ki tudjuk színezni
 - Minden csúcsot kiszínezünk, és a végén a kiindulást
- Ha a fokszám $\geq N$
 - lehet hogy ki lehet színezni N színnel

Regiszter allokáció gráf színezéssel

- Minden változót egy regiszterben tárolunk
 - Minden csúcs kap egy színt
 - HA 2 hely interferál, nem kaphat uo. regisztert
 - Ha két csúcs között van él, akkor különböző színnel kell színezni-ennyi regiszter kell

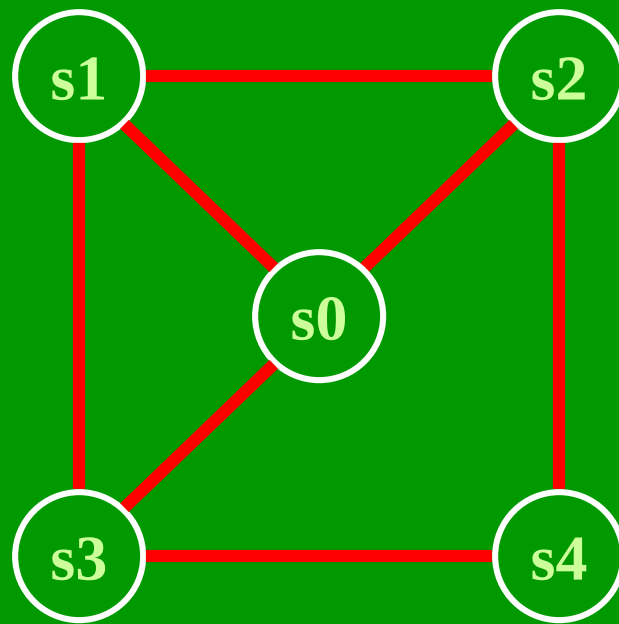


Heurisztika a regiszter allokációhoz

- A hurkok kiértékelése gyorsabb: változókat a CPU-ban tároljuk –ezek a csúcsok, él- ha egy időben kellenek-annyi regiszter kell, ahány színnel ez a gráf kiszínezhető
- Távolítsuk el az alacsony fokszámú $< N$ csúcsokat egy verembe
- Ha mindegyik csúcs fokszáma $\geq N$
 - Kiválasztunk egy csúcsot-erre nem lesz szín
 - ELtávolítjuk
- Ha üres, elkezdjük a színezést
 - Kiveszünk egy csúcsot
 - Olyan színűre színezzük, amilyen a szomszédaitól különbözik, ilyen van mert fokszám $< N$)

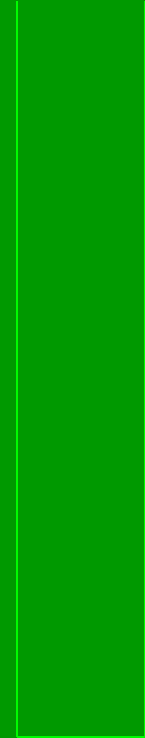
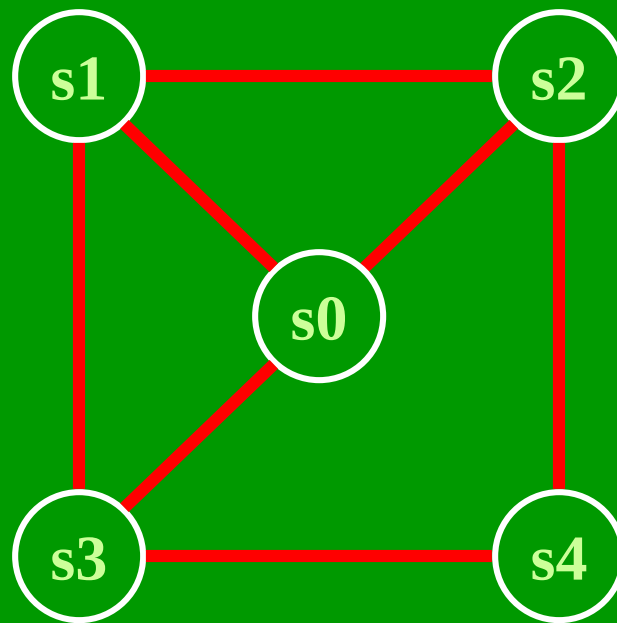
Gráf színezése-példa

$N = 3$



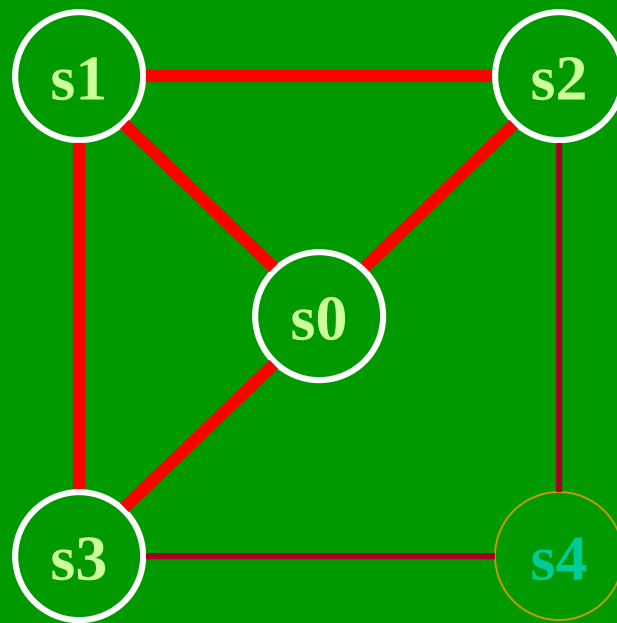
Gráf színezése-példa

$N = 3$



Gráf színezése-példa

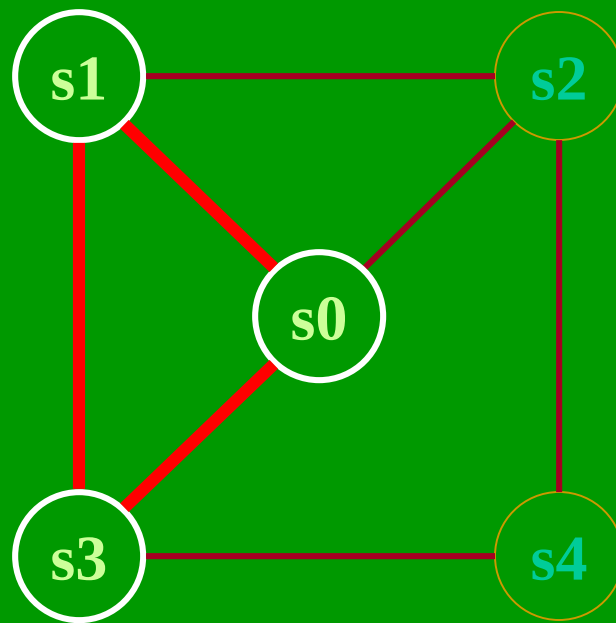
$N = 3$



$s4$

Gráf színezése-példa

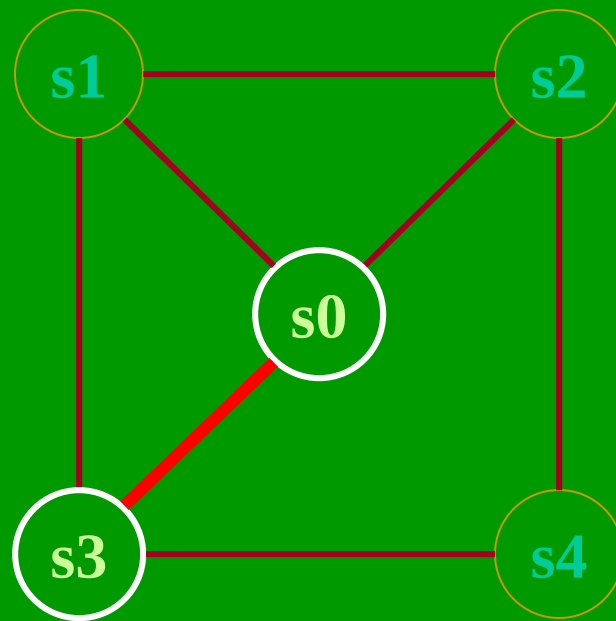
$N = 3$



s_2
 s_4

Gráf színezése-példa

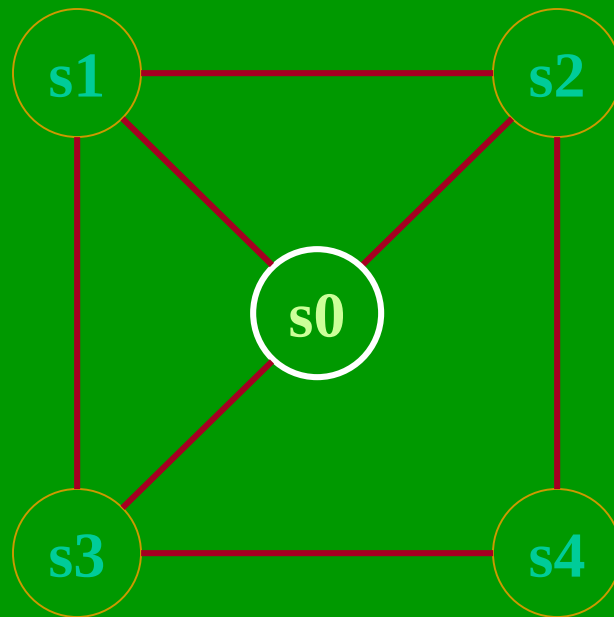
$N = 3$



s_1
 s_2
 s_4

Gráf színezése-példa

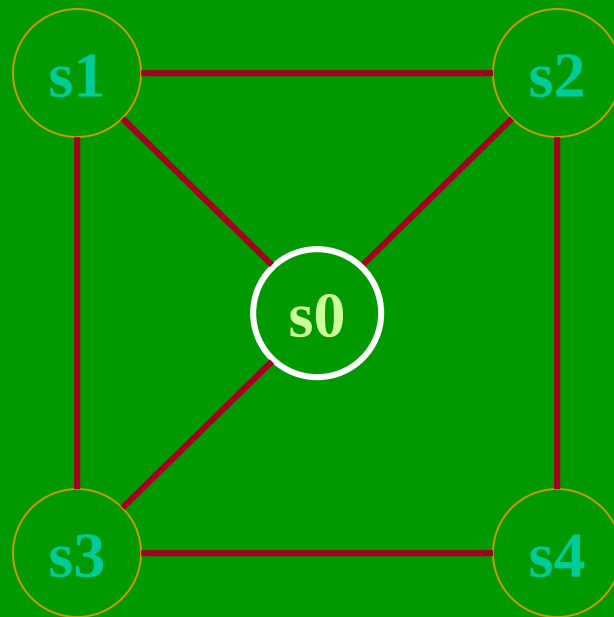
$N = 3$



s_3
 s_1
 s_2
 s_4

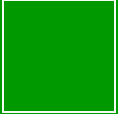
Gráf színezése-példa

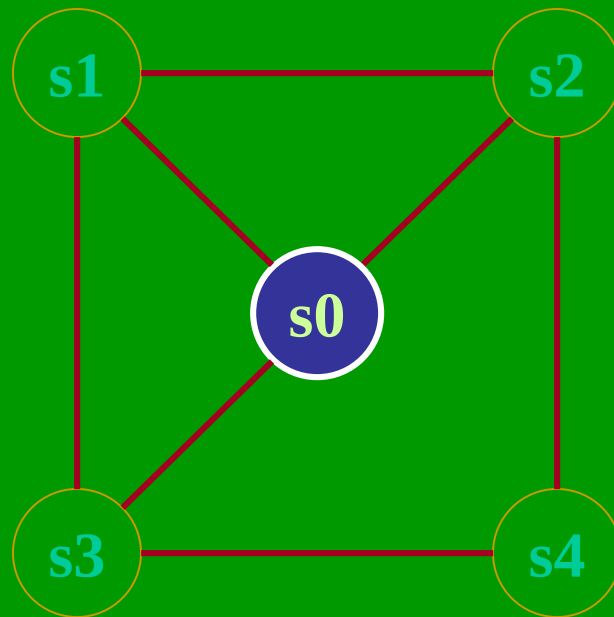
$N = 3$



s3
s1
s2
s4

Gráf színezése-példa

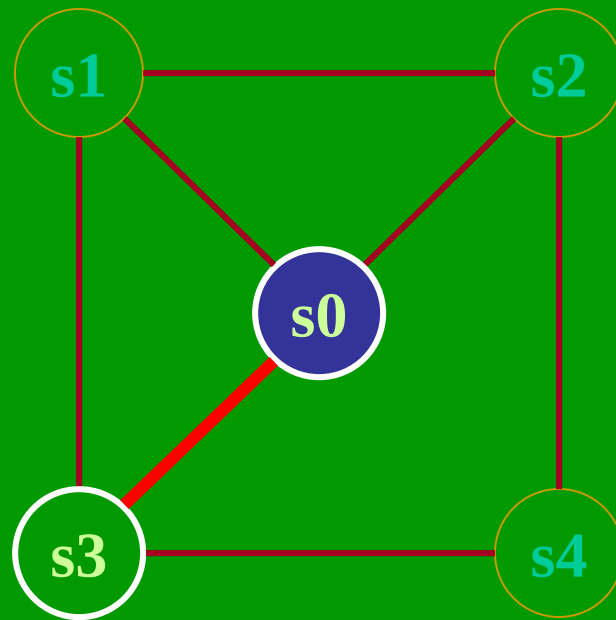
$N = 3$   



s3
s1
s2
s4

Gráf színezése-példa

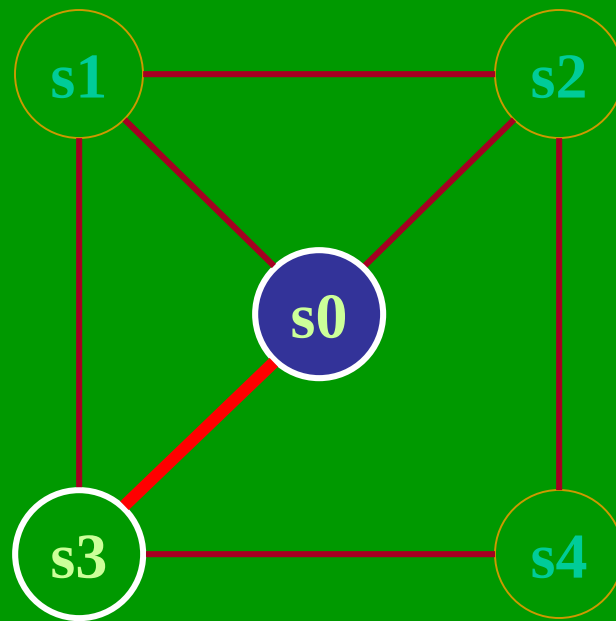
$N = 3$



s1
s2
s4

Gráf színezése-példa

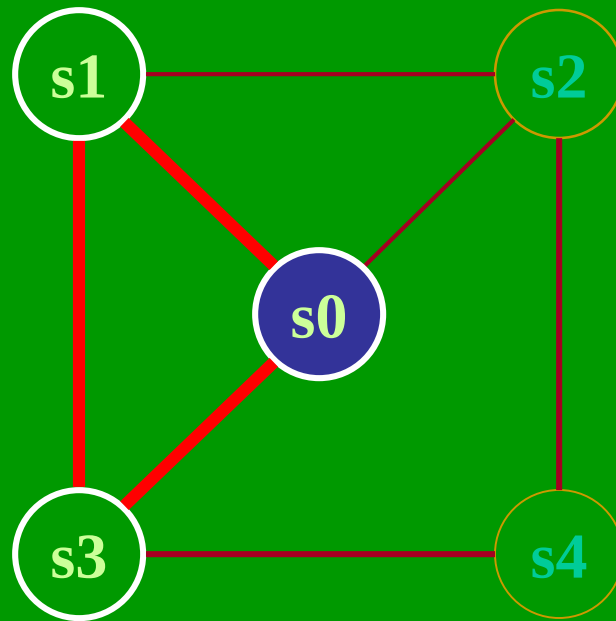
$N = 3$



s1
s2
s4

Gráf színezése-példa

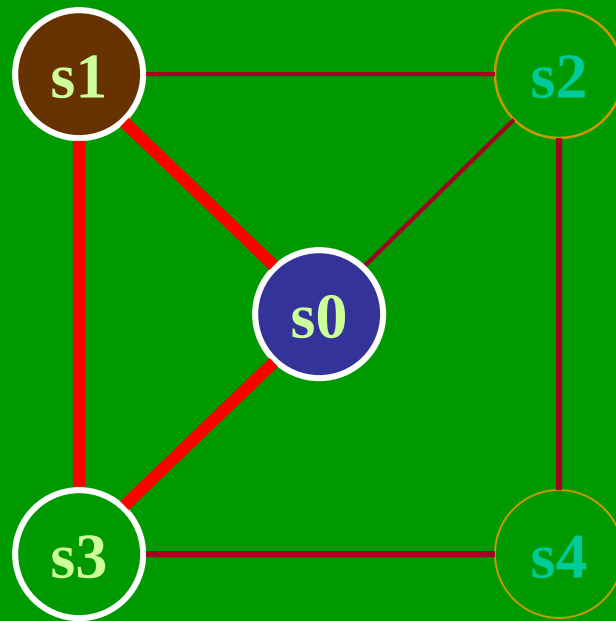
$N = 3$   



s2
s4

Gráf színezése-példa

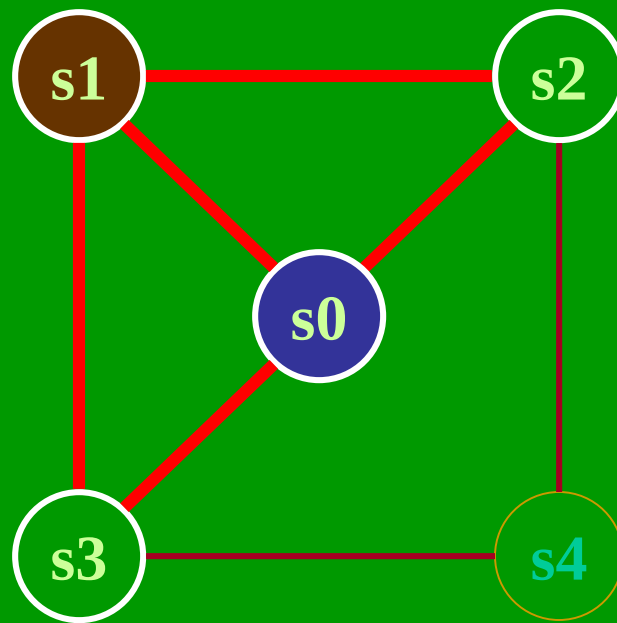
$N = 3$



s_2
 s_4

Gráf színezése-példa

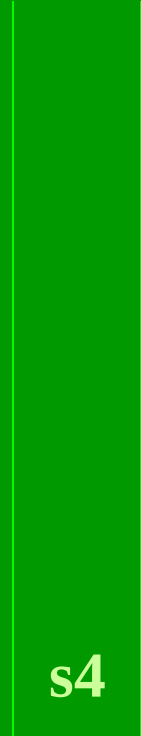
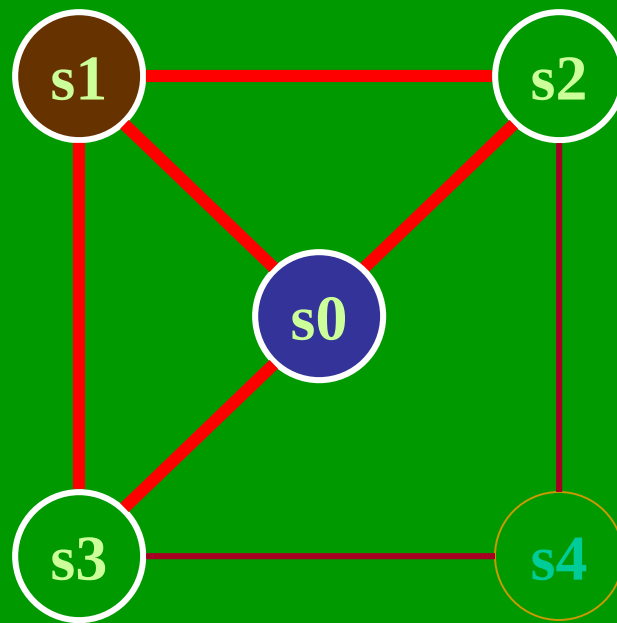
$N = 3$



s_4

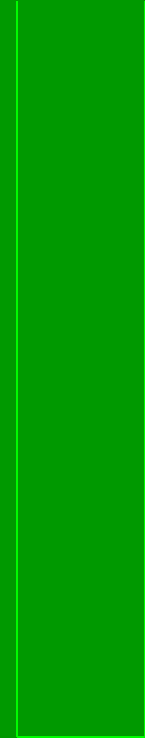
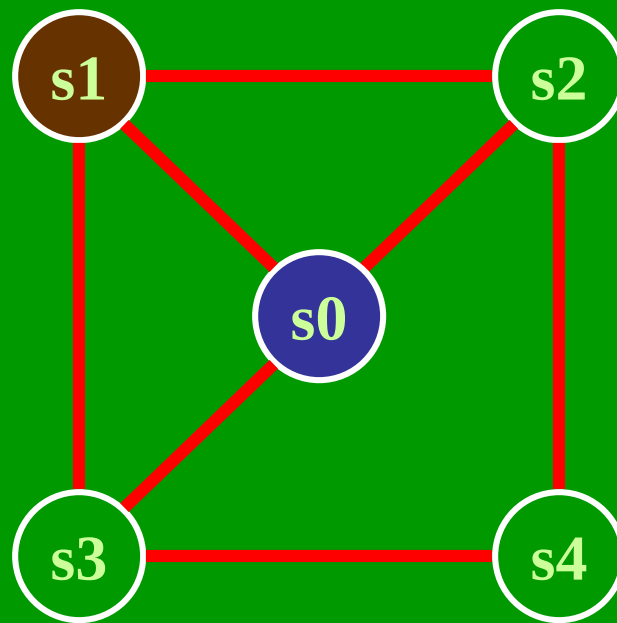
Gráf színezése-példa

$N = 3$



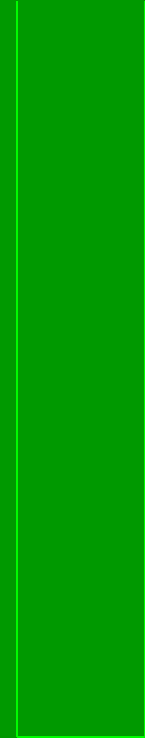
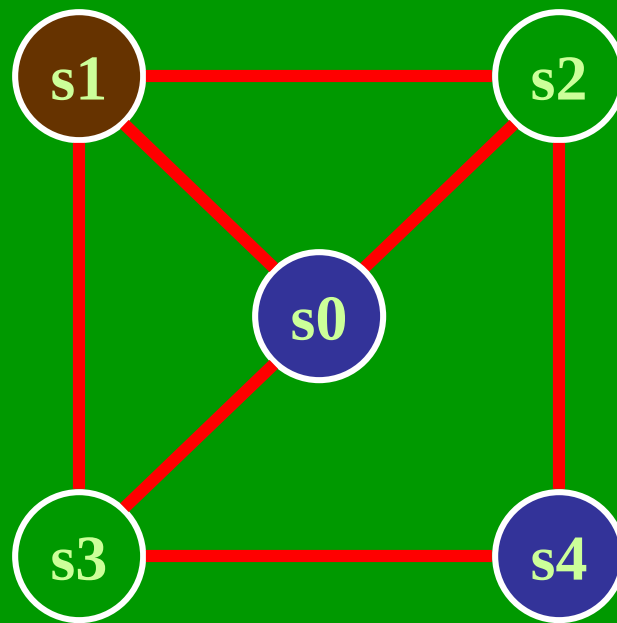
Gráf színezése-példa

$N = 3$



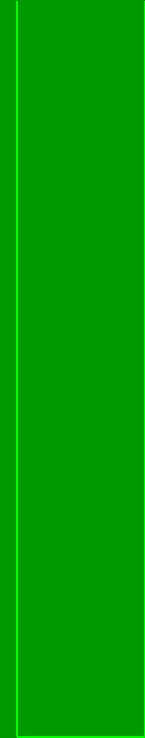
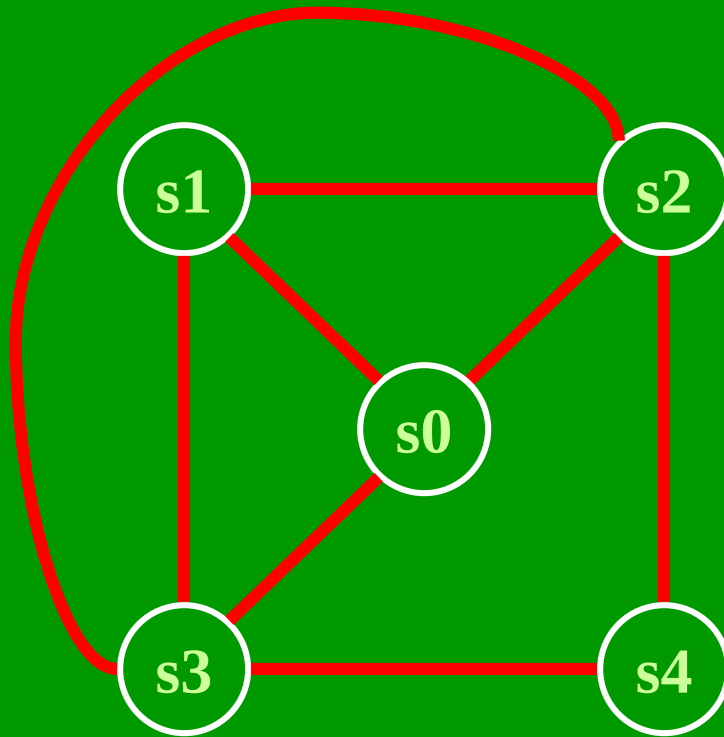
Gráf színezése-példa

$N = 3$



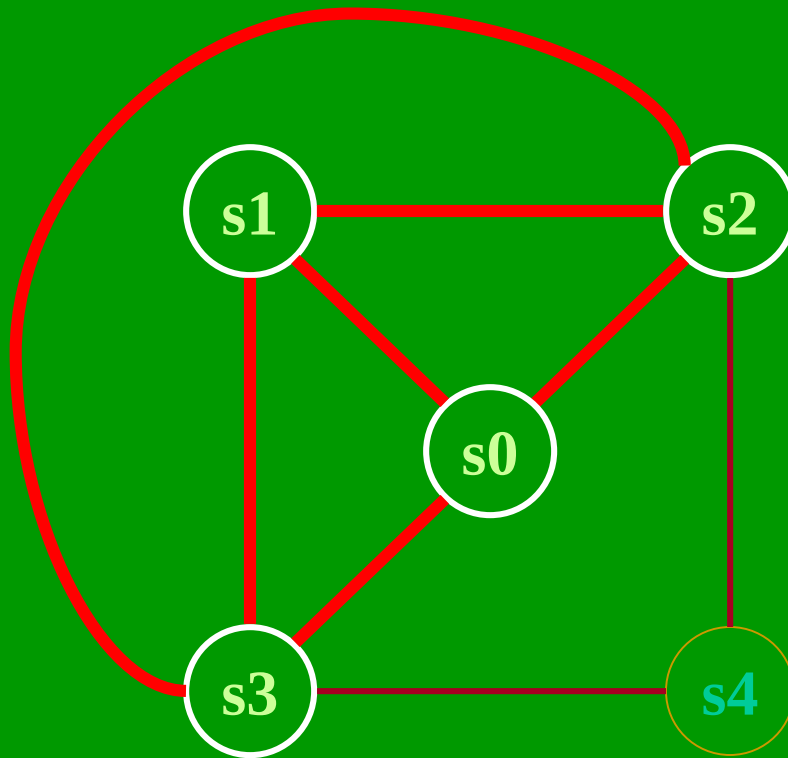
Gráf színezése-példa

$N = 3$



Gráf színezése-példa

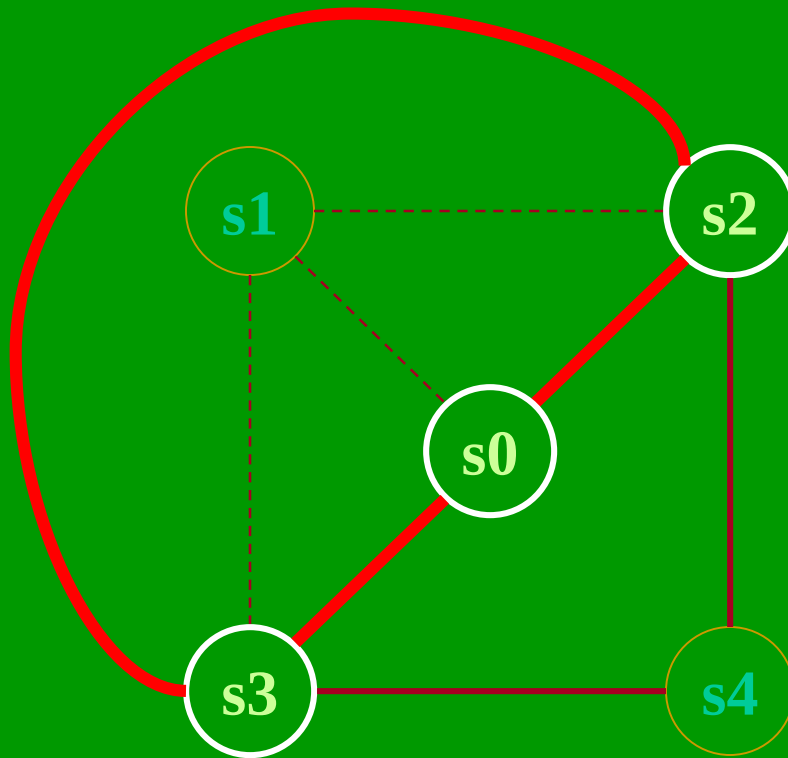
$N = 3$



$s4$

Gráf színezése-példa

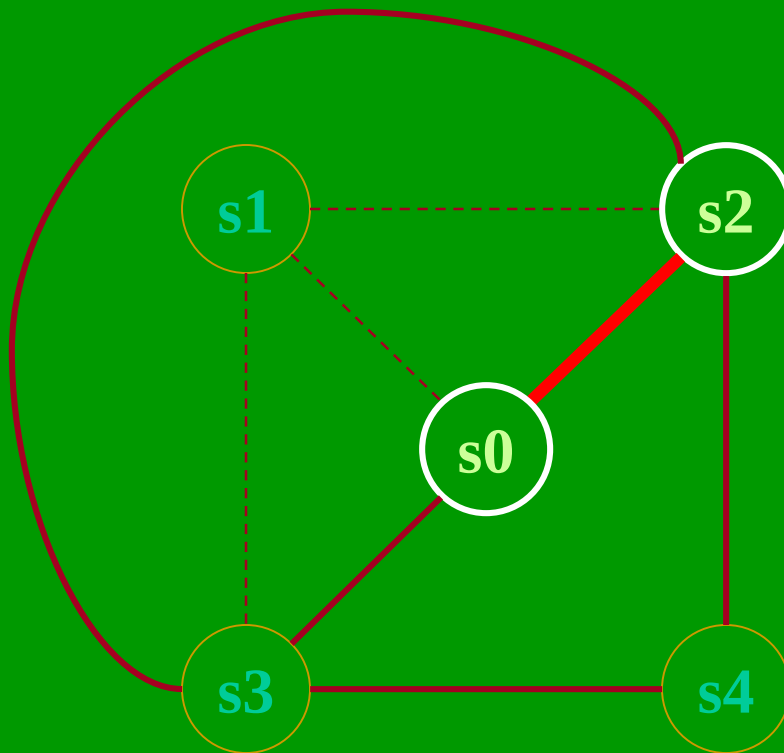
$N = 3$



s_4

Gráf színezése-példa

$N = 3$



s_3
 s_4

Gráf színezése-példa

$N = 3$



s_2
 s_3
 s_4

Gráf színezése-példa

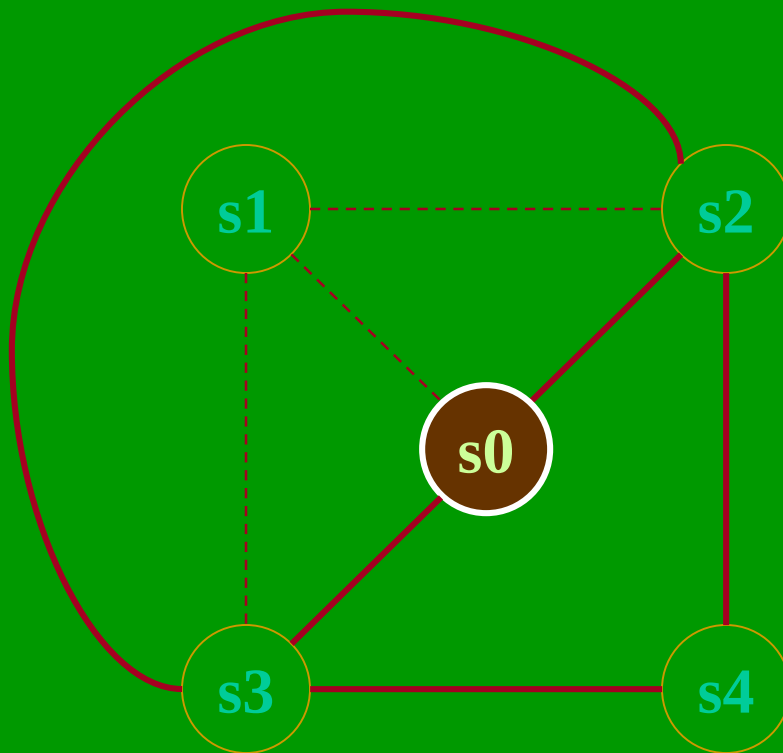
$N = 3$



s_2
 s_3
 s_4

Gráf színezése-példa

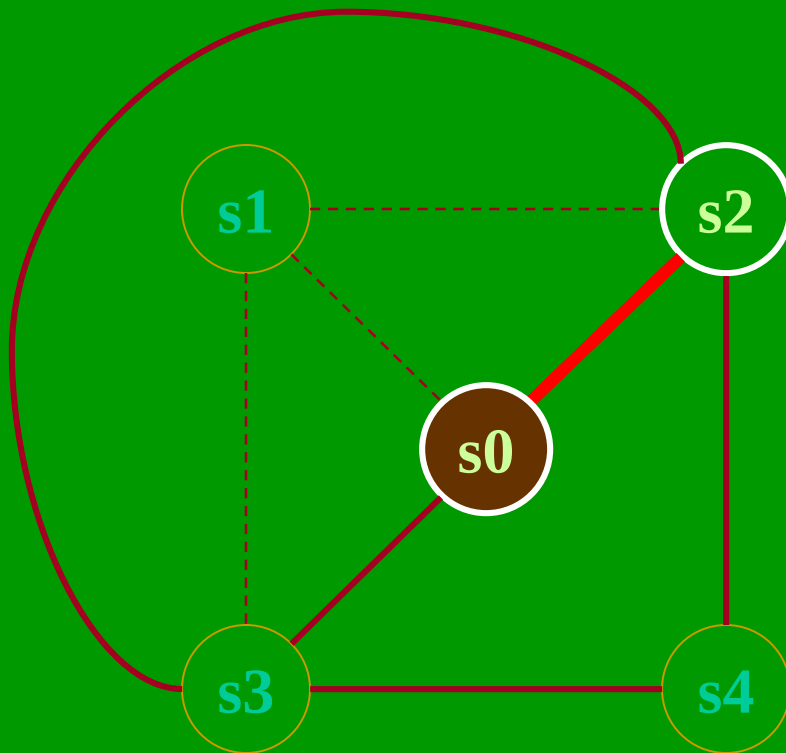
$N = 3$



s2
s3
s4

Gráf színezése-példa

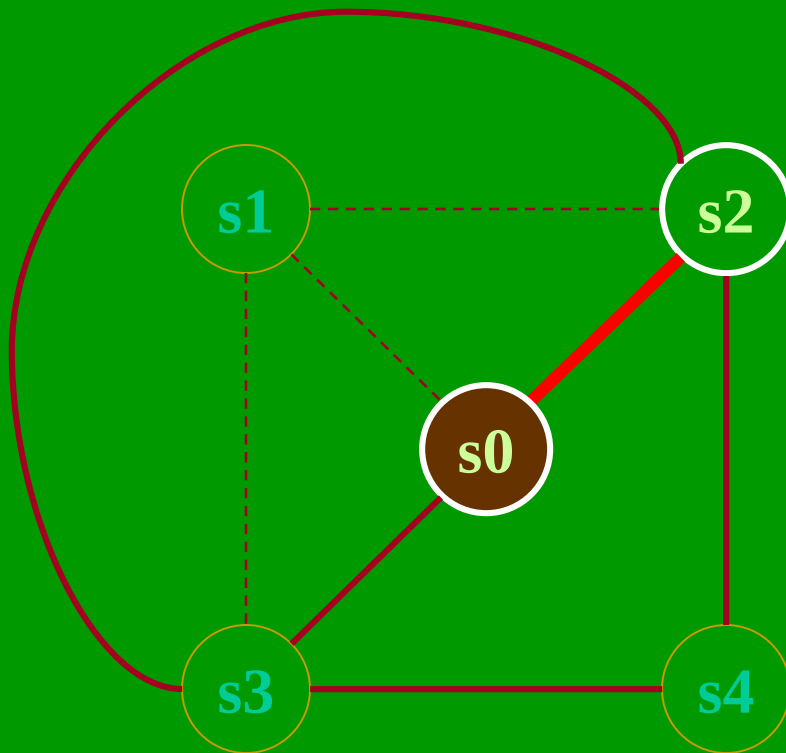
$N = 3$



s3
s4

Gráf színezése-példa

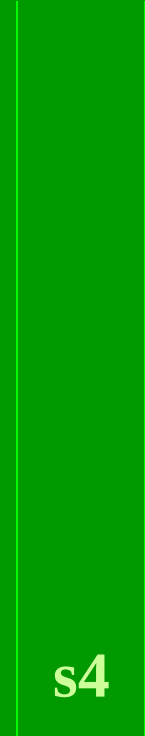
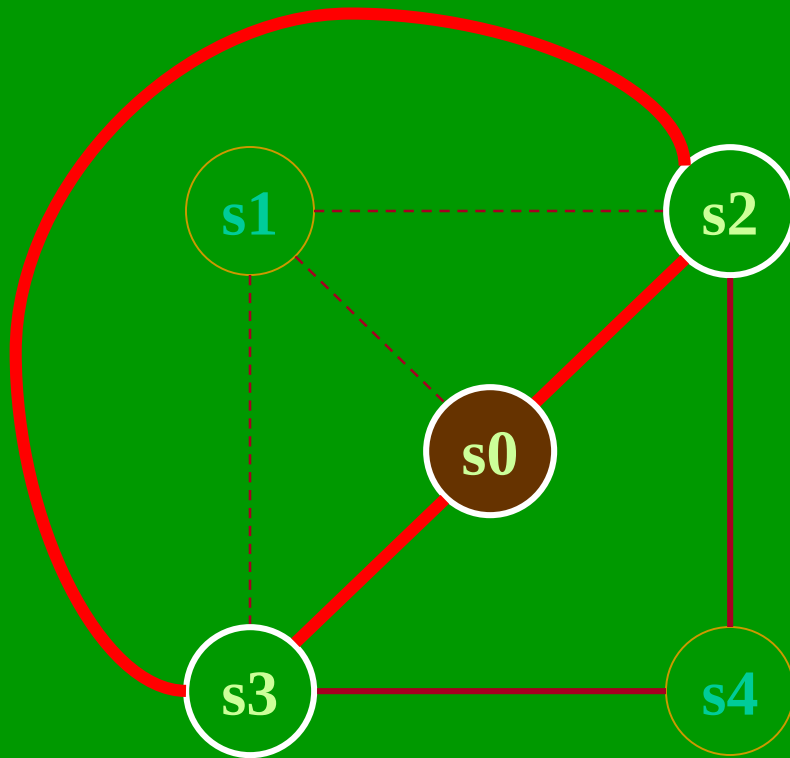
$N = 3$



s3
s4

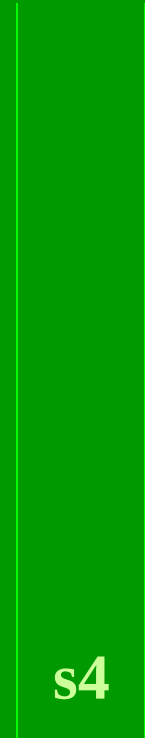
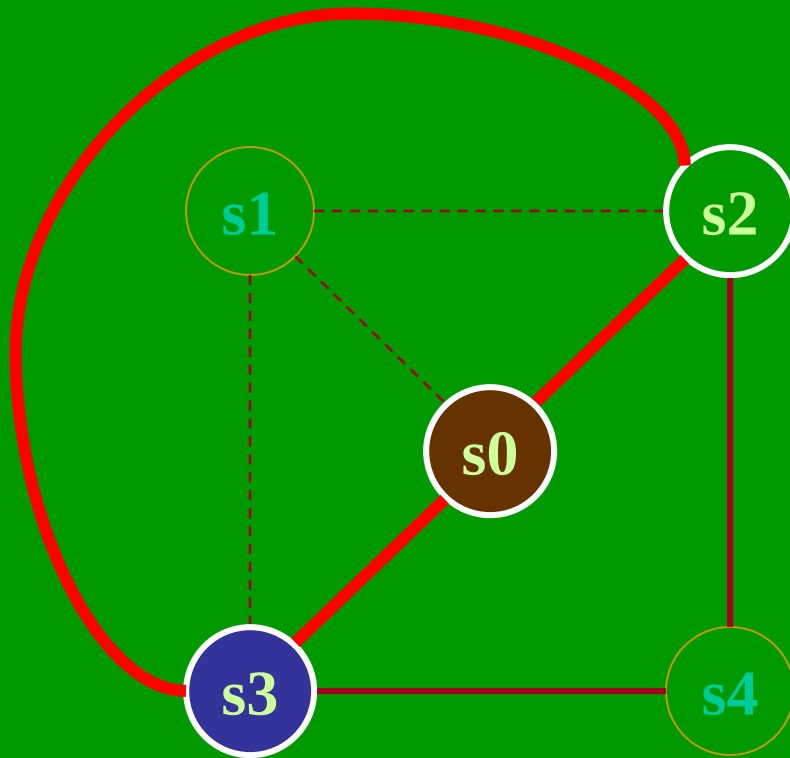
Gráf színezése-példa

$N = 3$



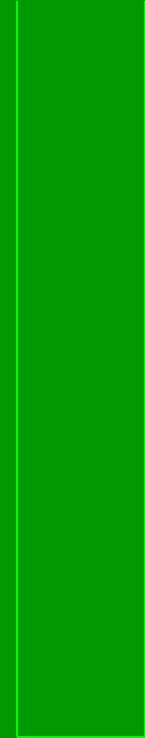
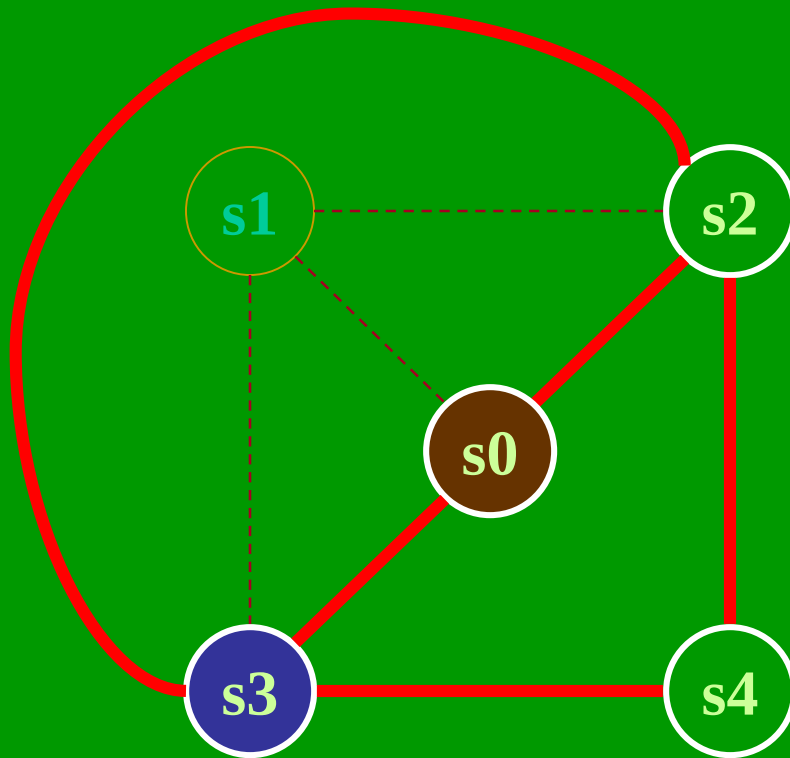
Gráf színezése-példa

$N = 3$



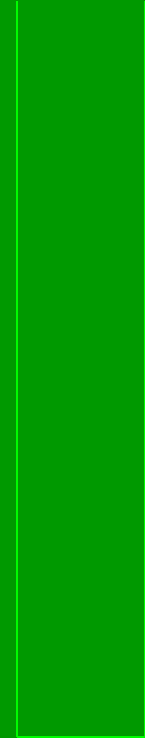
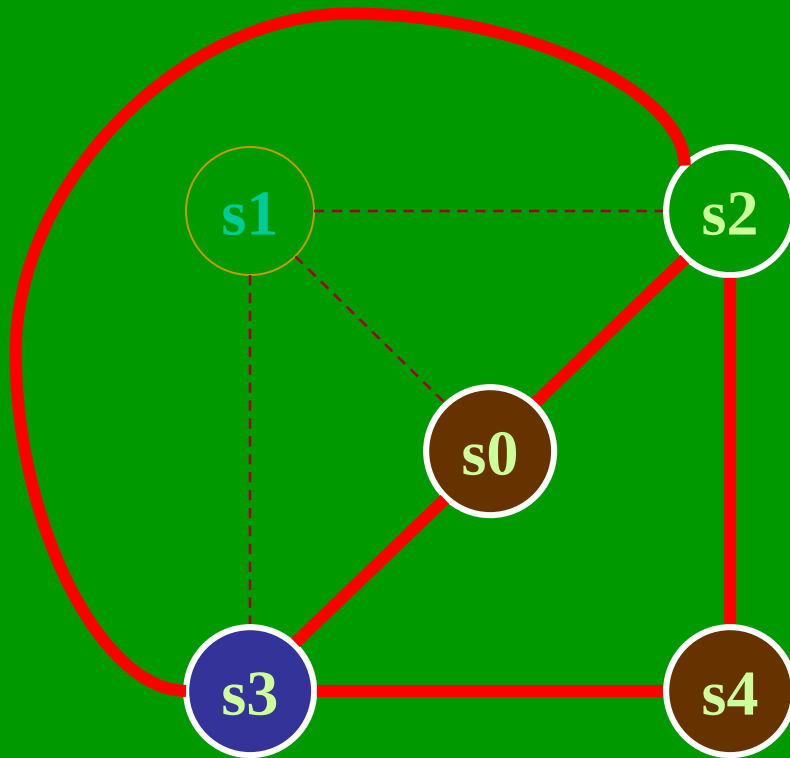
Gráf színezése-példa

$N = 3$



Gráf színezése-példa

$N = 3$



5-szín tétel és bizonyítása

Tétel: Ha G síkba rajzolható gráf, akkor $\chi(G) \leq 5$

Biz.:

Teljes ind. a gráf pontszámára

Ha a gráfnak max 5 db csúcs van, akkor nyilvánvalóan kiszínezhető 5 színnel.

TFH, $n=k$ csúcsú gráf kiszínezhető 5 színnel

$N = k+1$ -re:

VOLT: síkgráfokra: élek száma $\leq 3n-6$, következménye: van olyan csúcs, melynek fokszáma max 5.

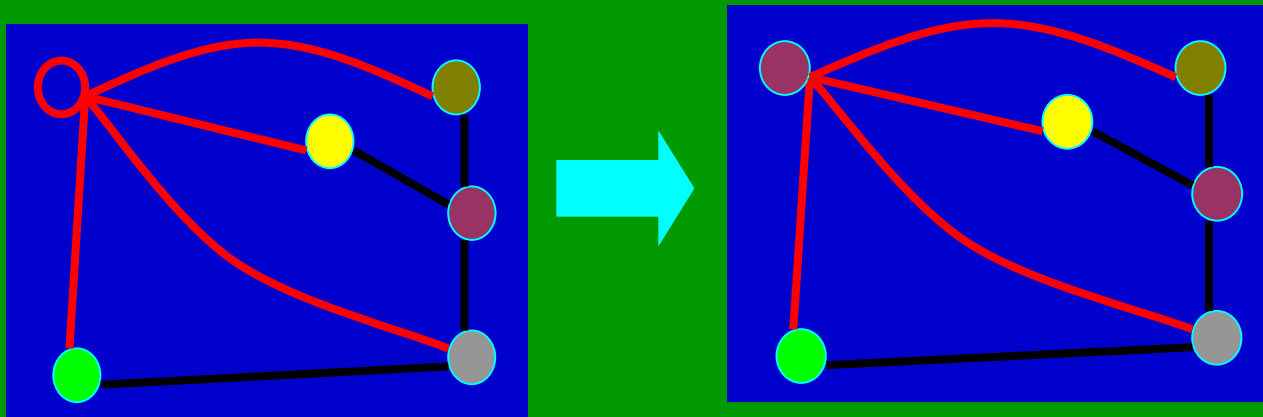
HA x foka=4, akkor x -et elhagyva a csúcsok száma eggyel csökken, tehát az ind. feltevés miatt ez kiszínezhető 5 színnel, visszavéve ezt a csúcsot, a szomszédait ki lehet színezni 4-gyel, $+x$, 5 szín!

Ha x foka=5, akkor minden szomszédja nem lehet összekötve egymással, mert akkor K_5 részgráf lenne:-nem sík!

Legyen z , y az x olyan szomszédjai, melyek nincsenek összekötve, ezeket vonjuk össze egy ponttá, hagyjuk el x -et. Az ind. feltevés miatt a maradék kiszínezhető 5 színnel. Visszavéve és szétszedve x - y - z csúcsokat, ezek kiszínezhetők max 3 színnel, hiszen x -nek összesen 5 szomszédja van, az y és z -kívüli csúcsok 3 színt lefoglalnak, de y és z egyszínű (nem szomszédok), marad egy szín x -nek.

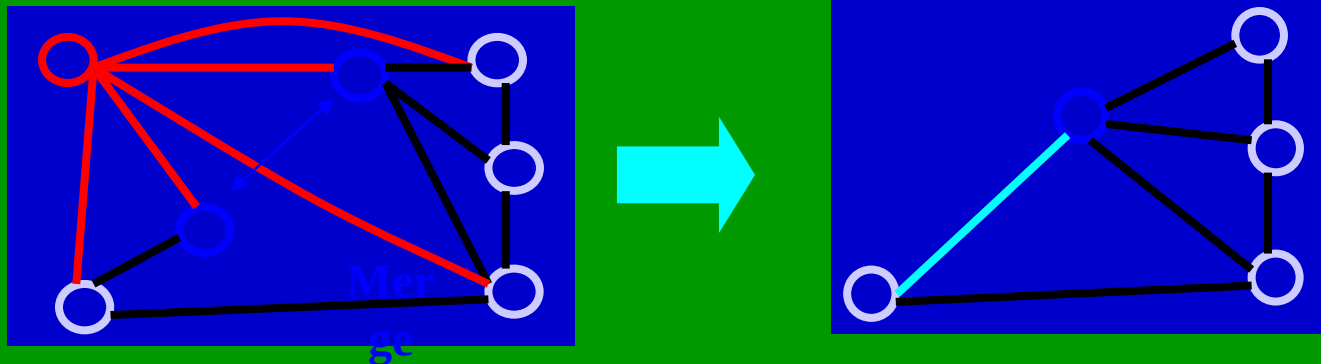
Ha a legkisebb foks szám 4

HA x foka=4, akkor x -et elhagyva a csúcsok száma eggyel csökken, tehát az ind. feltevés miatt ez kiszínezhető 5 színnel, visszavéve ezt a csúcsot, a szomszédait ki lehet színezni 4-gyel, $+x$, 5 szín!



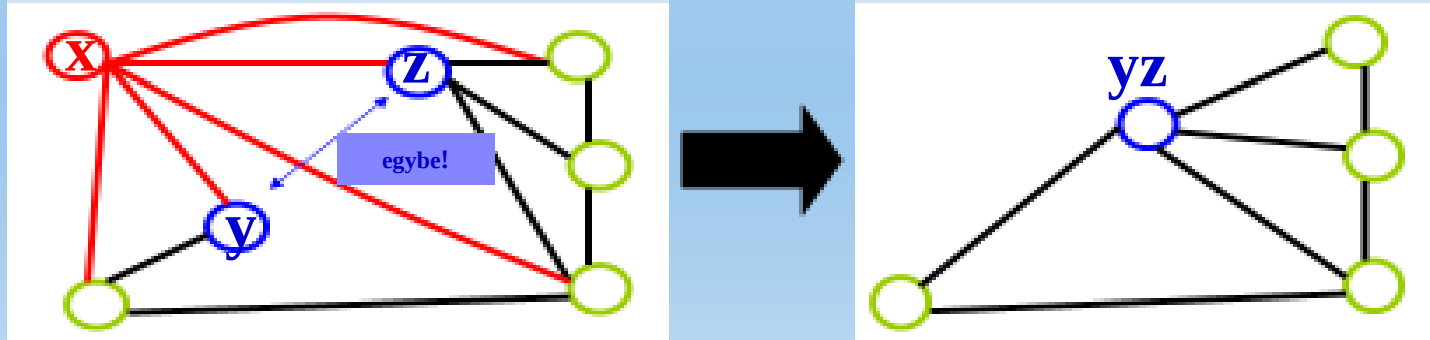
Ha a legkisebb fokszám 5

Ha x foka=5, akkor minden szomszédja nem lehet összekötve egymással, mert akkor K_5 részgráf lenne:-nem sík!



Ha a legkisebb fokszám 5

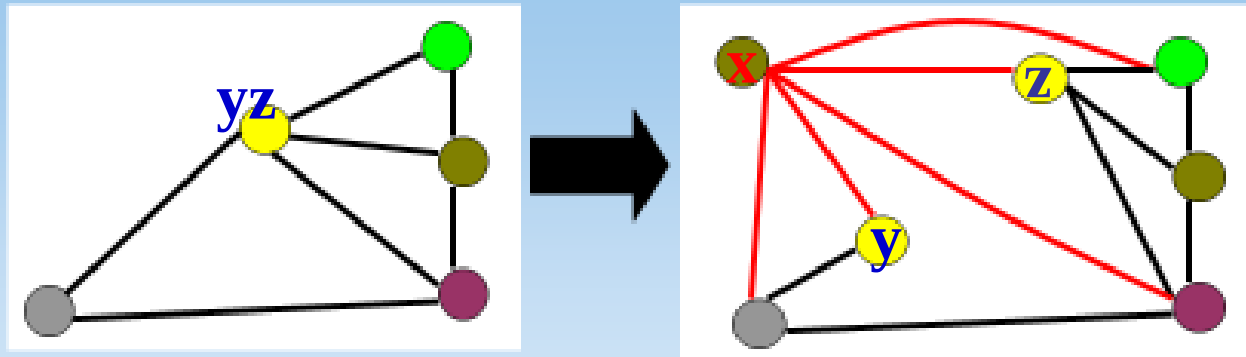
Ha x foka=5, akkor minden szomszédja nem lehet összekötve egymással, mert akkor K_5 részgráfja lenne:-nem lehetne sík a gráf!



Legyen z, y az x olyan szomszédjai, melyek nincsenek összekötve, ezeket vonjuk majd össze egy ponttá, miután elhagytuk az x csúcsot az illeszkedő élekkel együtt.

Ha a legkisebb fokszám 5 (folyt.)

Legyen z , y az x olyan szomszédjai, melyek nincsenek összekötve, ezeket vonjuk össze egy ponttá, hagyjuk el az x csúcsot az illeszkedő élekkel együtt. Ekkor az ind. feltevés miatt a maradék gráf kiszínezhető 5 színnel. Az xy összevont pont kap egy színt – amit meg is tartunk. (E pont fokszáma lehet nagyobb is az ábrán lévőnél, lényeg, hogy egy színe lesz!)



Visszavéve az x , és szétszedve az y - z csúcsokat, ezek kiszínezhetők max 3 színnel, hiszen x -nek összesen 5 szomszédja van, az y és z csúcsokon kívüli csúcsok 3 színt lefoglalnak, de y és z egyszínű (nem szomszédok), és még marad egy szín x -nek.

4 szín tétel

- Tétel: Ha G síkbarajzolható gráf, $\chi(G) \leq 4$
- APPEL és HAKEN, 1977