

Gráfelmélet

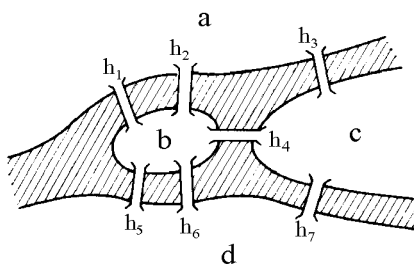
(Bércesné Novák Ágnes, Hosszú Ferenc, Rudas Imre: Matematika II, BDMF, 2000)

Bevezetés.

A gráfelmélet a kombinatorikának az elmúlt száz évben jelentős fejlődést elért ága, bár komoly eredmények már a XVIII. században is születtek. Az első ismert publikáció Eulertől származik (1736), amelyben megoldást adott az ú.n. königsbergi hidak problémájára.

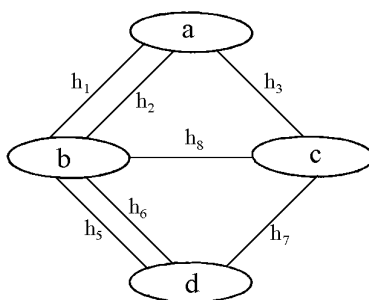
A probléma, amelyet a város polgárai vetettek fel, a következő:

Lehet-e olyan sétát tenni a városban, hogy a várost átszelő Pregel folyó mindegyik hídján (21. ábra) egyszer és csak egyszer haladjanak át?



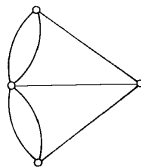
21. ábra

A feladat szempontjából lényegtelen, hogy a parton, ill. a szigeteken hogyan közlekedünk, csak a hidakon való áthaladásra kell figyelni. Így módon a megoldás szempontjából csak arra kell koncentrálnunk, hogy hány szárazföld (part, vagy sziget) van, és ezeket hány híd és mily módon köti össze. Ennek megfelelően készült a következő ábra:



22. ábra

melyet egyszerűbben is felrajzoltunk.



23. ábra

A Königsbergi probléma így módon a következőképpen fogalmazható meg:

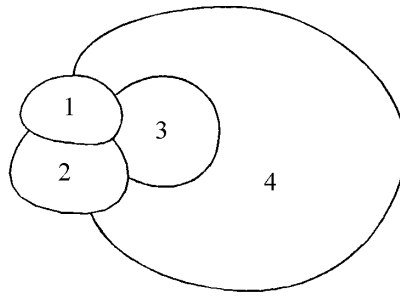
Be lehet-e járni a fenti, gráfnak nevezett, ábra éleit oly módon, hogy minden élen pontosan egyszer megyünk végig? (A feladatot Euler általánosan megoldotta, a megoldásra az anyag tárgyalása során visszatérünk.)

A gráfelmélet következő jelentős állomásának Kirchoff 1847-ben publikált eredményei tekinthetők, melyben gráfelméleti módszereket alkalmazott villamos hálózatok analízisére. Kirchoff ezen eredményei tekinthetők a gráfelmélet első műszaki alkalmazásainak is.

A gráfelmélet iránti érdeklődés felkeltésében nagyobb szerepe volt azonban a térképek négy színnel való kiszínezhetőségére vonatkozó sejtésnek. A *négyszín-sejtés* azt mondja ki, hogy ha egy térképet sík lapra felrajzolunk, akkor az egyes országok kiszínezhetők úgy, hogy a szomszédos országok színei különbözők legyenek. Ha a térképen látható valamennyi ország egy-egy pontját megjelöljük, és két pontot akkor és csak akkor kötünk össze, ha az ezeket tartalmazó országok szomszédosak, akkor egy ún. síkba rajzolható gráfhoz jutunk.

A négyszín-sejtés ezek után a következőképpen fogalmazható meg:

A síkba rajzolható gráfok kiszínezhetők négy színnel úgy, hogy az éllel összekötött pontok eltérő színűek legyenek. (24. ábra)



24. ábra

A sejtést először Francis Guthrie fogalmazta meg a metemetika nyelvén, bizonyítását valószínűleg először Möbius kísérelte meg 1840 körül és azóta is a matematikai kutatások homlokterében állt, de bizonyítani egészen a legutóbbi időkig nem sikerült. 1976-ban azonban Kenneth Appel és Wolfgang Haken egy - a matematikában rendkívülinek számító - bizonyítást adtak a sejtésre, ugyanis a bizonyítás egy lényeges része számítógépes futtatásokból állt. A bizonyítás elfogadhatóságáról azóta is viták folynak, azonban a matematikusok zöme ma már teljes értékűnek fogadja el.

Alapfogalmak.

Definíció. Egy $G = [V, E, \Theta]$ gráf

- szögpontok (vagy röviden pontok) egy V halmazából,
- élek egy E halmazából és
- egy Θ függvényből áll, amely

minden egyes $a \in E$ élnek egy $(u, v) = (v, u)$ rendezetlen párt feleltet meg, ahol $u, v \in V$ szögpontok, amelyeket az a él *végpontjainak* nevezünk.

Azokat a pontokat, amelyekhez nem illeszkedik él, *izolált pontoknak*, az (u, v) élt pedig *hurokélnak* nevezzük. Ha egy gráfban két pontot több él is összeköt, akkor azt mondjuk, hogy a gráf *többszörös éleket* tartalmaz.

Definíció. Ha az $a \in E$ élnek egy (u, v) rendezett pár felel meg, akkor az élt *irányított élnek*, míg különben *irányítatlannak* nevezzük.

Definíció. Ha egy gráf minden éle *irányított*, akkor *irányított gráfnak*, ha minden éle *irányítatlan*, akkor *irányítatlan gráfnak* nevezzük.

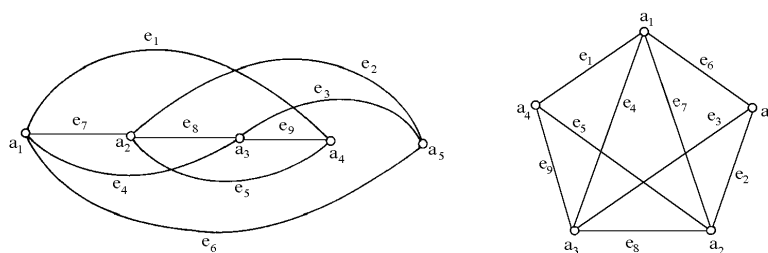
Jelölések:

- A szögpontokat kis körökkel jelöljük. A szögpont nevét vagy a kör mellé, vagy a kör belsejébe írjuk.
- Az irányítatlan éleket olyan görbékkel jelöljük, amelyek az él két végpontja között haladnak.
- Az irányított éleket nyíllal ellátott görbével jelöljük.

A továbbiakban gráfon mindig irányítatlan gráfot fogunk érteni, míg ha irányított gráfról beszélünk, akkor ezt külön hangsúlyozzuk.

Definíció. Két gráf *izomorf*, ha egyikük pontjai és élei kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó módon megfeleltethetők a másikuk pontjainak, ill. éleinek.

Szemléletesen ezt úgy lehet elképzelni, hogy a gráf pontjai merev karikák, élei pedig ezekhez rögzített nyújtható gumizsinórok. Ezt a gráfot most akárhogy mozgatjuk, nyújtjuk, zsugorítjuk, mindig izomorf gráfot kapunk. Általában izomorf gráfok között nem teszünk különbséget. (25. ábra)



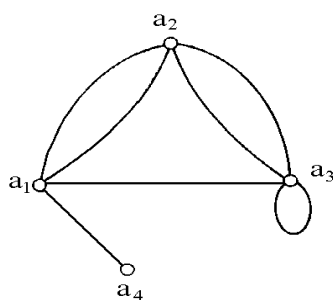
25. ábra

Definíció. A gráf v pontjához illeszkedő élvégek számát v *fokszámának* vagy röviden v *fokának* nevezzük, és $\varphi(v)$ -vel jelöljük. Ha a v foka n , akkor azt is mondjuk, hogy v n -edfokú.

Példa:

A 26. ábrán látható gráfnak 4 pontja van, 7 éle, ebből egy hurokél.

A pontok fokszámai: $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = 4$, $\varphi(a_3) = 5$, $\varphi(a_4) = 1$.



26.ábra

A szögpontok fokszáma és az élek száma közötti összefüggésre mutat rá a következő tétel.

Tétel. (Handshaking-kézfogási tétel) Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az e él az u és v szögpontokhoz illeszkedik, azaz u és v az e él két végpontja.

Ekkor, ha $u \neq v$, akkor az e élt $\varphi(u)$ -nál és $\varphi(v)$ -nél is beszámoltuk.

Ha pedig $u = v$, akkor az e él hurokél, és így $\varphi(u)$ -nál számoltuk kétszer.

Tehát a gráf összes szögpontjainak a fokszámát összeadva éppen az élek számának kétszeresét kapjuk.

A tétel nyilvánvaló következménye, hogy minden gráfban a fokszámok összege páros szám.

Példa.

Egy körmérkőzéses bajnokságon bizonyos csapatok már játszottak egymással. Bizonyítsuk be, hogy páros azoknak a csapatoknak a száma, akik páratlan sok csapattal játszottak!

Megoldás.

Jelöljük a gráf szögpontjai a csapatokat, két szögpont közötti él pedig azt, hogy a két csapat már játszott egymással. Így egy csapat annyi más csapattal játszott, ahány él illeszkedik az adott szögponthoz.

Azt kell tehát bizonyítani, hogy a páratlan fokszámú szögpontok száma páros.

Mint láttuk minden gráfban a fokszámok összege páros, amely a páros és páratlan fokszámok összegéből tevődik össze. A páros fokszámok összege nyilván páros, hiszen páros számok összege páros. Így a páratlan fokszámok összegének is

párosnak kell lenni. A páratlan foksámok összeke pedig csak úgy lehet páros, hogy páros sokkat adunk össze.

A példa során igazoltuk a következő tételt.

Tétel. Minden gráfban a páratlan foksámú pontok száma páros.

Definíció. Egy gráfot *egyszerűnek* nevezünk, ha sem hurokél, sem pedig többszörös él nem tartalmaz.

Definíció. Egy gráfot *teljes gráfnak* nevezünk, ha bármely két pontját pontosan egy él köti össze.

Tétel. Az n szögpontú teljes gráf éleinek száma: $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$.

Bizonyítás. A teljes n -gráf bármely két pontját pontosan egy él köti össze, így minden egyes szögpont foksáma $n - 1$, tehát a foksámok összege $n \cdot (n - 1)$. Tudjuk, hogy bármely gráf esetén a foksámok összege az élek számának kétszerese, amiből az állítás adódik.

Definíció. Egy G' gráfot a G gráf *részgráffjának* nevezzük, ha G' csak G -beli szögpontokat és éleket tartalmaz. Ha a G' nem azonos G -vel, akkor a G gráf *valódi részgráffjának* nevezzük.

Utak és körök.

Definíció. *Élsorozatnak* az élek olyan rendezett halmazát nevezzük, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- a sorozat első és utolsó élétől eltekintve bármely él egyik végpontja az előző élhez, másik végpontja a következő élhez illeszkedik,
- az első él egyik végpontja a következő élhez illeszkedik, másik végpontja az élsorozat kezdőpontja,
- az utolsó él egyik végpontja az előző élhez illeszkedik, másik végpontja az élsorozat végpontja,

- minden él pontosan egyszer fordul elő.

Definíció. *Nyílt élsorozatról* beszélünk, ha az élsorozat kezdőpontja és végpontja különböző. Ellenkező esetben *zárt élsorozatról* van szó.

Definíció. Egy *élsorozathoz tartozó gráf* az a gráf, amelyet az élsorozat élei alkotnak.

Definíció. Az u és v szögpontok közötti út olyan nyílt élsorozat éleinek halmaza, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- u és v kezdő és végpontok,
- ezek foka 1, míg az összes többi foka 2.

Definíció. Ha egy gráfban bármely két pont úttal elérhető, akkor a gráfot *összefüggőnek* nevezzük.

Definíció. Az olyan összefüggő gráfokat, melyekben minden pont foka 2, *körnek* nevezzük.

A definícióból nyilvánvaló, hogy egy zárt élsorozat élei kört alkotnak, ha minden pont foka 2.

Definíció. *Út*, ill. *kör hossza*n a benne lévő élek számát értjük.

Tétel. Az n szögpontú összefüggő gráfnak legalább $n - 1$ éle van.

Bizonyítás. A bizonyítás teljes indukcióval történik.

Az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz.

Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$ esetén minden n szögpontú gráfnak van $n - 1$ éle.

Belátjuk, hogy akkor minden $n + 1$ -pontú összefüggő gráfnak van n éle.

Legyen G egy $n + 1$ szögpontú összefüggő gráf.

Ha G -nek kevesebb éle van, mint $n + 1$, akkor van elsőfokú pontja. Ugyanis mivel G összefüggő, így izolált pontja nincs. Ha nem lenne elsőfokú pontja sem, akkor minden pont foka legalább 2 lenne, és így a fokszámok összege minimum $2 \cdot (n + 1)$ lenne. Mint tudjuk a fokszámok összege az élek számának kétszerese, így az élek száma legalább $n + 1$ lenne, ami ellentmond annak, hogy G -nek kevesebb éle van, mint $n + 1$.

Vegyük G egy elsőfokú pontját és a hozzátartozó éllel együtt töröljük a gráfból. Nyilván n szögpontú összefüggő gráfot kapunk, melyre érvényes az indukciós

feltétel, azaz minimum $n - 1$ éle van. A törölt élt hozzávéve adódik, hogy G -nek minimum n éle van.

Euler-gráf.

A Königsbergi hidak problémájának megoldásához akkor jutnánk el, ha találnánk a gráfban egy olyan élsorozatot, amely a gráf minden élet tartalmazza. Ezt az élsorozatot bejárva minden hídon pontosan egyszer haladnánk át, és végül a kiindulási pontba érnénk vissza. A probléma megoldásához vizsgáljuk meg, hogy mely gráfoknak van ilyen zárt élsorozata.

Definíció. A G gráf egy zárt élsorozatát *Euler-vonalnak* nevezzük, ha abban a G valamennyi éle szerepel.

Definíció. A G gráf egy nyílt élsorozatát *nyílt Euler-vonalnak* nevezzük, ha abban a G valamennyi éle szerepel.

Definíció. Ha egy izolált pontot nem tartalmazó gráfnak van Euler-vonala, akkor *Euler-gráfnak* nevezzük.

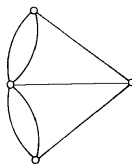
Tétel. Ha egy gráf Euler-gráf, akkor minden pontjának foka páros.
Ha egy izolált pontot nem tartalmazó gráfnak van nyílt Euler-vonala, akkor két pontjának foka páratlan, a többi pedig páros.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a G gráf Euler-gráf. Ekkor létezik G -ben olyan élsorozat, amelyben G valamennyi éle szerepel. Ha a gráf pontjait bejárjuk az Euler-vonal mentén, akkor a kezdőpontba érkezünk vissza, és a bejárás során valahányszor egy szögpontra érünk onnan ki is kell lépni, azaz két illeszkedő élvéget járunk be. Ha ezeket párosítottak tekintjük, és figyelembe vesszük, hogy a kezdőpontra érkezünk vissza, akkor nyilván minden pont foka páros kell legyen.

Ha egy izolált pontot nem tartalmazó gráfnak van nyílt Euler-vonala, és bejárjuk a gráf éleit, akkor minden szögpontra foka az előző szerint páros lesz, kivéve a kezdő és a végpontot, hiszen az elsőnek és utolsóinak bejárt élvégek pár nélkül maradnak. Így a gráf két pontjának foka páratlan, a többi pedig páros.

Példa A Königsbergi probléma.

Tekintsük a probléma átfogalmazásával nyert gráfot. (27. ábra)



27. ábra

A probléma tehát az, hogy bejárható-e az ábrán látható gráf oly módon, hogy a gráf élein pontosan egyszer haladunk végig. Az előző tétel szerint, ha egy gráf éleit be tudjuk járni úgy, hogy minden élen pontosan egyszer haladunk át, akkor a gráf két pontjának foka páratlan, a többi páros, vagy valamennyi pontjának foka páros. Mint látható az ábrán lévő gráf három pontjának foka három, egy pontjának pedig öt, azaz négy páratlan fokszámú pontja van. Így a gráf nem járható be.

Fák.

Definíció. Ha egy gráf összefüggő és nem tartalmaz kört, akkor *fagráf*nak vagy röviden *fának* nevezzük.

Tétel. Az n szögpontú és $n - 1$ élű összefüggő gráfok fák.

Bizonyítás. Tegyük fel ugyanis, hogy a G gráf nem fa, azaz tartalmaz kört. Ha a kör egy élét töröljük, akkor n szögpontú, $n - 2$ élű összefüggő gráfot kapunk, ami ellentmond annak, hogy egy n szögpontú összefüggő gráfnak legalább $n - 1$ éle van.

Be kell még látnunk, hogy ha egy összefüggő gráf valamely körének egy tetszőleges élét töröljük, akkor ismét összefüggő gráfot kapunk.

Tegyük fel ehhez, hogy a törölt él nem hurokél, hiszen hurokél törlése nem szünteti meg az összefüggőséget. Töröljük a G gráf K körének (u, v) élét. A G gráfban az u -ból a v -be most is el tudunk jutni a K kör megmaradt élein keresztül, azaz az (u, v) törlése után is eljuthatunk bármelyik pontból bármelyik pontba, tehát a kapott gráf is összefüggő.

Segéd-tétel. Ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van kör.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az ún. *leghosszabb út módszerét!* Legyen az 1 hosszúságú L út a G gráf egy leghosszabb útja, és ennek egy végpontja v . Tekintsük most G -nek v -hez illeszkedő éleit! Ezek közül bármelyiknek a végpontja L -hez tartozik, ugyanis ellenkező esetben L hossza 1-nél nagyobb lenne, ami ellentmond annak, hogy L a leghosszabb út.

Ha G minden pontjának foka legalább 2, akkor illeszkedik v -hez egy e él is. Ha e hurokél, akkor ez G egy körét kijelöli. Ha e nem hurokél, akkor u -nak v -től különböző w végpontja L -ben van, tehát L -nek a v és w pontokat összekötő része e -vel együtt G egy körét alkotja.

Tétel. Ha egy n szögpontú gráfnak legalább n éle van, akkor van benne kör.

Bizonyítás. A bizonyítást n -re vonatkozó teljes indukcióval végezzük.

Az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz.

Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$ -re minden n szögpontú és legalább n élű gráfban van kör.

Legyen G egy $n + 1$ pontú gráf, amelynek legalább $n + 1$ éle van.

Visszatérve a bizonyításra, vegyük G egy L leghosszabb útját. Ha L valamely végpontja G -nek nem elsőfokú pontja, akkor az előzőek szerint G -ben van kör.

Ellenkező esetben töröljük G -nek egy elsőfokú pontját a hozzátartozó éllel együtt.

A kapott gráfnak n pontja van és legalább n éle, tehát az indukciós feltétel miatt tartalmaz kört, amit viszont G is tartalmaz.

Tétel. Az n szögpontú fagráf éleinek száma $n - 1$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy minden n szögpontú összefüggő gráfnak legalább $n - 1$ éle van. Az előző tétel szerint, ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor a gráfban van kör. Eszerint minden n pontú körmentes összefüggő gráfnak pontosan $n - 1$ éle van, ami az állítást igazolja.

Az előzőek alapján a fák a következő négy tulajdonsággal rendelkeznek:

- összefüggők,
- szögpontjaik száma n ,
- éleinek száma $n - 1$.
- nem tartalmaz kört.

Az irányított gráf fogalmának általánosításaként vezessük be a következő gráfokat:

Definíció. *Cimkézett* irányított gráfnak nevezzük azokat az irányított gráfokat, amelyekben a szögpontokat és/vagy az éleket külön megcímkézzük.

A címkézett irányított gráfok alkalmazására mutatnak példát a játékok gráfjai. Ezen gráfok segítségével sok kétszemélyes játék, így pl. a sakk, a malom, stb., nyerő stratégiája analizálható.

Minden ilyen játékhoz hozzárendelhető egy gráf, melynek pontjai a különböző lehetséges állások, élei pedig a megengedett lépések, amelyeket annak a játékosnak a jelével címkézünk meg, aki ezeket a lépéseket megteheti.

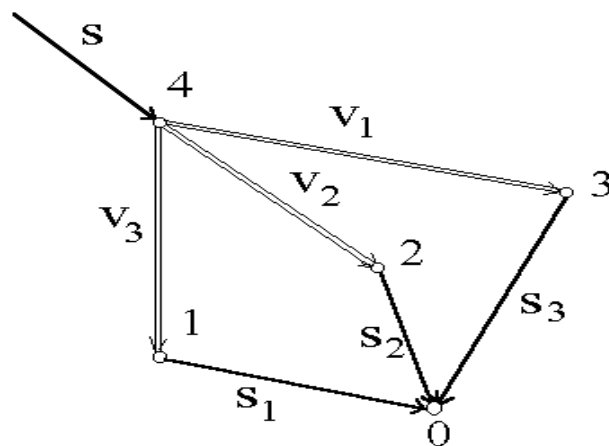
Példa. Tekintsük a halomjáték egy egyszerű változatát.

A játékot két játékos játssza, tetszőleges számú gyufából álló gyufahalommal.

A játékosok lépésenként felváltva 1, 2 vagy 3 db. gyufát vehetnek el. Az nyer aki az utolsó gyufát elveszi.

Reprezentáljuk a játékot egy olyan címkézett irányított gráffal, melynek pontjai a lehetséges állások (a halomban lévő gyufák száma), élei pedig a megengedett lépések, melyeket annak a játékosnak a jelével címkézünk meg, aki ezeket a lépéseket megteheti.

A sötét játékos utolsó nyerő lépéseit ábrázolja az alábbi gráf (28. ábra).



v_i - világos i db gyufát vesz el
 s_i - sötét i db gyufát vesz el $i = 1, 2, 3$.

28. ábra

Az ábrából leolvasható, hogy sötét (s) akkor nyer, ha világos (v) utolsó lépése előtt 4 gyufa van a halomban. A nyerő stratégia tehát az, hogy a világos által elvett gyufák számát ki kell egészíteni 4-re, vagyis világos lépése előtt a halomban mindig négyvel osztható számú gyufának kell lenni.

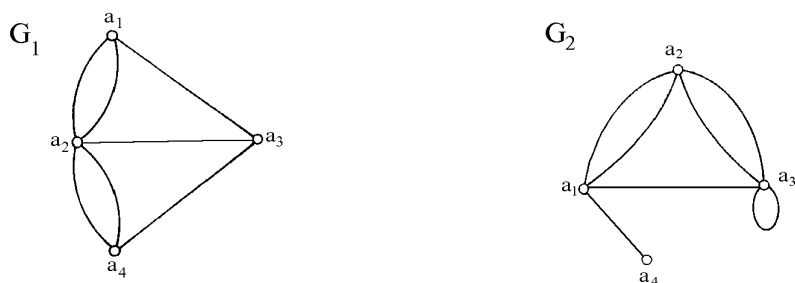
Gráfok mátrix reprezentációja

Definíció. Jelöljük a gráf pontjait $u_1, u_2, \dots, u_n$, az u_i és u_j pontokat összekötő élek számát pedig a_{ij} . Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ $n \times n$ -es mátrixot a gráf *csúcsmátrixának*, vagy *adjacenciamátrixának* nevezzük.

Irányított gráf esetén az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ adjacenciamátrix a_{ij} eleme az u_i kezdőpontú és u_j végpontú irányított élek számát jelenti.

Példa.

Tekintsük a 29. ábrán látható gráfokat.



29. ábra

A gráfok adjacenciamátrixai:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés.

Ha a gráf egyszerű, akkor nyilván a_{ij} értéke 0, vagy 1 lehet, aszerint, hogy az u_i és u_j pontok között halad-e él, vagy sem.

Legyen G egy egyszerű gráf, és emeljük négyzetre az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ adjacenciamátrixát.

Az $\mathbf{A}^2 = [a_{ij}^{(2)}]$ elemei ekkor

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{kj}.$$

Az a_{ik} azt mutatja meg, hogy hány 1 hosszúságú út vezet az u_i csúcsból az u_k csúcsba, az a_{kj} pedig azt, hogy hány él megy az u_k pontból az u_j pontba. Nyilvánvaló így, hogy az $a_{ik} \cdot a_{kj}$ szorzat azoknak az u_i pontból az u_j pontba vezető kettő hosszúságú utaknak a számát adja meg, melyek középső pontja u_k . Az $a_{ij}^{(2)}$ tehát az összes u_i pontból az u_j pontba vezető kettő hosszúságú utak számát adja meg.

Ezek alapján teljes indukcióval könnyen igazolható a következő tétel.

Tétel. Legyen G egyszerű gráf, és jelölje adjacenciamátrixát $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Az $\mathbf{A}$ mátrix k -adik hatványának $a_{ij}^{(k)}$ eleme megegyezik az u_i csúcsból az u_j csúcsba vezető k hosszúságú utak számával.

Definíció. Jelölje az u_i pontból az u_j pontba vezető legrövidebb út hosszát $\rho(u_i, u_j)$.

A fentiek alapján az adjacenciamátrix ismeretében bármely gráfban $\rho(u_i, u_j)$ értéke a következőképpen határozható meg:

hatványozzuk az $\mathbf{A}$ mátrixot addig a k hatványig, amíg $a_{ij}^{(k)}$ elem először nullától különböző nem lesz. Ekkor $\rho(u_i, u_j) = k$.

Az adjacenciamátrix egy lehetséges alkalmazását mutatja be a következő példa.

Példa.

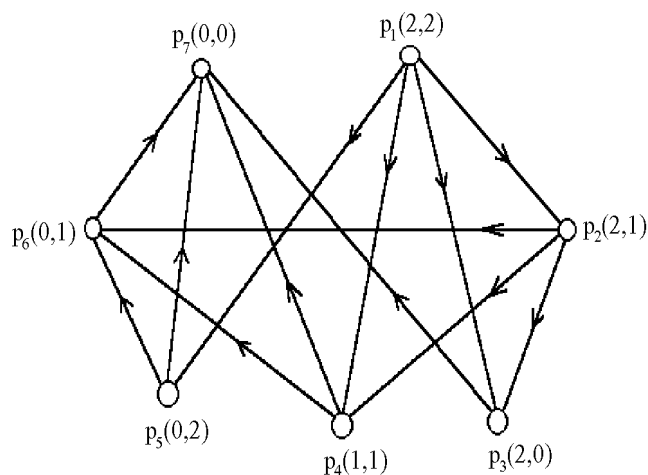
Két misszionárius és két kannibál egyszerre érkezik egy folyó partjára, és mindannyiuknak át kell jutniuk a folyó tulsó partjára. Az átkeléshez csak egyetlen csónak áll rendelkezésre, amely egyszerre két embert bír el. A kannibálok száma egyik parton sem haladhatja meg a misszionáriusok számát (kivéve azt az esetet, amikor a misszionáriusok száma nulla), mert akkor veszélyeztetik az életét. Adjuk meg az átkelés algoritmusát!

Megoldás.

Jellemezze a kiindulási part egy állapotát az a rendezett számpár, melynek első eleme azon a parton lévő misszionáriusok, második eleme pedig a kannibálok száma. A megengedett állapotok ekkor a következők:

$$\alpha_1 = (2, 2), \alpha_2 = (2, 1), \alpha_3 = (2, 0), \alpha_4 = (1, 1), \alpha_5 = (0, 2), \alpha_6 = (0, 1), \alpha_7 = (0, 0).$$

Vezessük be a G irányított gráfot, melynek (α_i, α_j) éle azt jelenti, hogy az α_i állapotból az α_j állapot közvetlenül elérhető, ha a csónak átmegy a túlsó partra (lsd. 30. ábra).



30. ábra

A gráf adjacenciamátrixa $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ a következő:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az α_i állapotból az α_j állapot akkor és csak akkor érhető el a túlsó partra történő átevezés után, ha az α_j állapotból az α_i állapot elérhető a visszatevezés során. Tehát, ha a kiindulási irányított G gráf mindem élét megfordítjuk, olyan G_1 gráfhoz jutunk, melynek élei azt adják meg, hogy mely állapotok érhetők el közvetlenül a visszatevezés során. A G_1 gráf adjacenciamátrixa $\mathbf{A}'$. Az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}'$ mátrix c_{ij} eleme:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot a_{j1} + a_{i2} \cdot a_{j2} + \dots + a_{i7} \cdot a_{j7},$$

ami megadja, hogy az α_i állapotból az α_j állapot hányféleképpen érhető el egyszeri oda-vissza csónakúttal.

Képezzük az $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}') \cdot \mathbf{A}$ szorzatot. Az i -edik sor j -edik eleme megadja, hogy hányféleképpen érhető el az α_i állapotból az α_j állapot oda-vissza, majd a túlpartra evezve.

Az eljárást folytatva láthatjuk, hogy ha $\exists k \in \mathbb{Z}$, hogy az $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}')^k \cdot \mathbf{A}$ mátrix első sorának hetedik oszlopában nem zérus elem áll, akkor az α_i állapotból az α_j állapot elérhető utolsóként a túlsó partra történő átevezéssel, éspedig $2k + 1$ lépésben. K -szor oda és vissza, majd végül a túlsó partra evezve.

A feladat megoldásához nyilván a legkisebb ilyen k -t célszerű megkeresnünk. Képezzük ehhez az

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}')\mathbf{A}, (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}')^2 \mathbf{A}, (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}')^3 \mathbf{A}, K$$

szorzatokat. Ha nem vagyunk kíváncsiak arra, hogy a feladat hányféleképpen oldható meg, akkor a fenti szorzatokban a nem zérus elemek helyére mindenhol 1-et írhatunk.

Az így nyert szorzatok:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}') \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}')^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}')^2 \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A feladat tehát megoldható 5 lépésben. A megoldás menetét visszafelé haladva tudjuk megadni.

Az $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}')^2 \cdot \mathbf{A}$ mátrix $(1, 7)$ indexű eleme az $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}')^2$ mátrix első sorának és az $\mathbf{A}$ mátrix hetedik oszlopának szorzataként adódik. Nézzük meg, hogy az $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}')^2$ első sorának melyik eleme ad $\mathbf{A}$ utolsó oszlopának megfelelő elemével szorozva nullától különböző eredményt. Az egyik lehetőség az $(1, 4)$ és $(4, 7)$, a másik pedig az $(1, 5)$ és $(5, 7)$ indexű elemek szorzata.

Válasszuk ebből az elsőt.

Ez azt jelenti, hogy a megoldás utolsó lépése az (α_4, α_7) .

Vizsgáljuk most az $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}')^2$ mátrix $(1, 4)$ indexű elemét. Ide az $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}') \cdot \mathbf{A}$ mátrix $(1, 6)$ indexű eleméből és az $\mathbf{A}$ mátrix $(6, 4)$ indexű eleméből kerülhet 1-es.

Az utolsó előtti lépés tehát (α_6, α_4) .

Az $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}') \cdot \mathbf{A}$ mátrix $(1, 6)$ indexű eleme az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}'$ $(1, 2)$ és az $\mathbf{A}$ $(2, 6)$ indexű elemeiből adódik.

Tehát visszafelé a következő állapot az (α_2, α_6) .

Az eljárást hasonlóan folytatva a megoldásra a következő (visszamenő) algoritmus adódik:

$$(\alpha_4, \alpha_7), (\alpha_6, \alpha_4), (\alpha_2, \alpha_6), (\alpha_3, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3),$$

ami a kiindulási oldal állapotaival kifejezve:

$$(2, 2), (2, 0), (2, 1), (0, 2), (1, 1), (0, 0).$$

Definíció. Jelöljék a gráf pontjait $u_1, u_2, \dots, u_n$, K , u_n éleit pedig $e_1, e_2, \dots, e_m$.

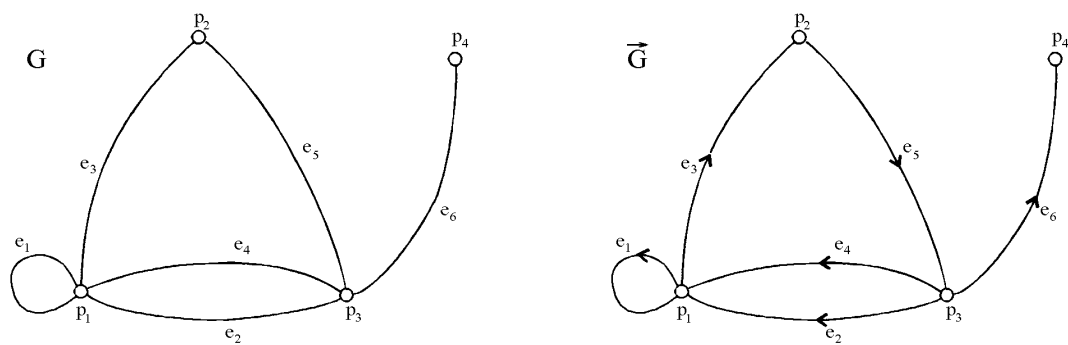
Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ $n \times m$ -es mátrixot *illeszkedési*, vagy *incidencia-mátrixnak* nevezzük, ha

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e_j \text{ nem hurokél, és illeszkedik az } u_i \text{ ponthoz,} \\ 0, & \text{ha } e_j \text{ hurokél, vagy nem illeszkedik az } u_i \text{ ponthoz.} \end{cases}$$

Irányított gráfok esetén az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ incidenciamátrixnak elemei a következők:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e_j \text{ nem hurokél és kezdőpontja az } u_i \text{ pont,} \\ -1, & \text{ha } e_j \text{ nem hurokél és végpontja az } u_i \text{ pont,} \\ 0, & \text{ha } e_j \text{ hurokél vagy nem illeszkedik az } u_i \text{ ponthoz.} \end{cases}$$

Példa. Tekintsük a 31. ábrán látható $\mathbf{G}$ és $\mathbf{G}^1$ gráfokat.



31. ábra

A gráfok incidencia-mátrixai:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$